გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე
ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი

მათემატიკა

XI კლასი

მასწავლებლის წიგნი

რედაქტორი **თეიმურაზ ვეფხვაძე**

გრიფი მიენიჭა 2012 წელს სსიპ განათლების ხარისხის განვითარების ეროვნული ცენტრის (ბრძანება №375, 18. 05. 2012) მიერ

გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი 2012

გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე,
ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი

მათემატიკა

XI კლასი

მასწავლებლის წიგნი

გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი 2012

Guram Gogishvili, Teimuraz Vepkhvadze,
Ia Mebonia, Lamara Kurchishvili

MATHS XI

Teacher's book

INTELEKTI Publishers
Tbilisi 2012

გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი, ილია ჭავჭავაძის გამზ. 5. ტელ.: 225 05 22

www.intelekti.ge info@intelekti.ge inteleqti@caucasus.net

INTELEKTI PUBLISHERS
5 Ilia Chavchavadze Ave., Tbilisi, Georgia. Tel.: (995 32) 225 05 22

ISBN 978–9941–439–12–4

სარჩევი

შესავალი

წიგნის შეიცავს მეთოდიკურ რეკომენდაციებს 2011-2016 წლების ეროვნული სასწავლო გეგმით შედგენილი XI კლასის სახელმძღვანელოსთვის (გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი, მათემატიკა XI).

ამ წიგნში მოცემული რეკომენდაციები მასწავლებელს დაეხმარება სასწავლო პროცესის დაგეგმვასა და წარმართვაში. ყოველ თემას თან ახლავს მისი მეცნიერული და მეთოდოლოგიური საფუძვლების მოკლე მიმოხილვა, მითითებული იქნება დამატებითი ლიტერატურა და მისამართები ინტერნეტში, სადაც მასწავლებელი მოიძიებს დამატებით მასალას წარმოდგენილი საკითხების შესახებ. მოწოდებულია საკონტროლო წერის ნიმუშები და მათი შეფასების კრიტერიუმები.

მოცემული იქნება შესაბამისი ახსნა-განმარტებები მასალის წარდგენის ფაზების შესახებ — მოტივაცია, საკითხის დასმა, ამოცანის განსაზღვრა, პრობლემათა გადაჭრის გზები, შემოწმების ფორმები.

გთავაზობთ გაკვეთილის დაგეგმვის სქემებს და რამდენიმე სანიმუშო გაკვეთილის სცენარს.

წიგნში თავებისა და პარაგრაფების ნუმერაცია და დასახელება ემთხვევა მოსწავლის სახელმძღვანელოში შემოღებულ ნუმერაციასა და დასახელებას.

XI კლასის წინამდებარე სარეკომენდაციო წიგნი იმავე პრინციპებითაა აგებული, რაც წინა — X კლასის მასწავლებელის სარეკომენდაციო წიგნი — სასწავლო გეგმა, შინაარსისა და მიზნების რუკა, მეცნიერული და მეთოდიკური რეკომენდაციები, რომლებიც მასწავლებლების წიგნების აუცილებელი შემადგენელი ნაწილებია, მთელი სასწავლო წლის განმავლობაში გამოიყენება, აძლევს მასწავლებელს მასალის გადაცემის ორიენტირებსა და შეფასების ფორმებს.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მოსწავლის შეფასება უნდა იყოს ხშირი და მრავალმხრივი, უნდა შეფასდეს არა მარტო ინფორმაციის ფლობა, არამედ შეძენილი უნარ-ჩვევები. თქვენ, ალბათ, უკვე გაეცანით იმ სტატიებს, რომლებიც წინა სარეკომენდაციო წიგნში შემოგთავაზეთ (*http://www.mccme.ru/edu*). ისინი XXI საუკუნეში მათემატიკის სწავლების ორგანიზაციის გაუმჯობესებისადმია მიძღვნილი. ამ მოხსენებებში ძირითადი აქცენტი კეთდება სასწავლო პროცესში მოსწავლის აქტიური ჩაბმის აუცილებლობაზე; მითითებულია, რომ სწავლება ძიებისა და დასაბუთების გზით უნდა მიმდინარეობდეს; მოსწავლე, როგორც წესი, თვით უნდა აღმოაჩენდეს ჭეშმარიტებას მოტივირებული სიტუაციის დაგეგმვის შემდეგ; მთავარია კვლევის პროცესი; არა მარტო პასუხების მოსმენა კითხვაზე „რა“, არამედ კითხვაზე — „როგორ“ ან — „კიდევ როგორ“. ამასთანავე, მნიშვნელოვანია იმის ცოდნაც — „რატომ“ — და პასუხები კითხვაზე — ეს რისთვის მჭირდება“. ყველაფერი ეს აუცილებელია მოსწავლეთა მომავალი პროფესიული საქმიანობისთვის, დემოკრატიულ პროცესებში აქტიური მონაწილეობისთვის. დღევანდელი საზოგადოება სულ უფრო მეტად ხდება მათემატიკაზე დამოკიდებული.

X კლასის სარეკომენდაციო წიგნში ცნობილ მეცნიერთა ის გამონათქვამები შეგახსენეთ (კერძოდ, პოიასა და კლაინის), სადაც ლაპარაკია მასწავლებელთა სრული მზადყოფნის აუცილებლობაზე, რაც მასალის მოსალოდნელ კარდინალურ ცვლილებასთან არის ხოლმე დაკავშირებული. ვცდილობთ XI კლასის სარეკომენდაციო წიგნი ამ მიმართებითაც იყოს სასარგებლო — მოგაწვდით დამხმარე მასალას ან რეკომენდაციებს შესაბამისი ლიტერატურის შერჩევის საკითხში.

წიგნი დაგეხმარებათ სასწავლო პროცესის წარმართვის მეთოდიკური ხერხების შემუშავების საკითხშიც კვლევის პროცესი შეიძლება ინდივიდუალური იყოს, შეიძლება

ჯგუფური მუშაობით განხორციელდეს. უპირატესობას, ცხადია, თემის ერთობლივ განხილვას ვანიჭებთ. საჭიროების შემთხვევაში წინა მასალის ერთობლივი გახსენებისა და ამოცანის დასმის შემდეგ, რომელიც წინა მასალის ლოგიკური გაგრძელება შეიძლება იყოს, მიმდინარეობს ამოცანის ამოხსნის ძიების პროცესი. ხშირად ეს ამოცანა პრაქტიკული შინაარსის საკითხის განხილვას მოსდევს, ეს პროცესი მოსწავლეთა მოტივირებისა და სწავლაში ჩართვის კარგი საშუალებაა.

ცხადია, **სწავლების პროცესის ძირითადი წარმართველი მასწავლებელია,** სასწავლო პროგრამით დასახული ამოცანების შესრულების საქმეში მან შეიძლება სხვადასხვა საშუალება გამოიყენოს, სხვადასხვა მასალა მოიშველიოს; „სწავლება ხელოვნებაა ... სწავლება მასწავლებლის ინდივიდუალურ თვისებებზეა დამოკიდებული და სწავლების კარგი მეთოდი იმდენია, რამდენიც კარგი მასწავლებელი არსებობს“ [31].

სწავლების წარმართვის მეთოდიკა მასალის გადაცემის თავისებურებებსაც გულისხმობს. სწავლების მიზნების განხორციელებაში ერთ-ერთი ქმედითი საშუალება მოსწავლის სახელმძღვანელოა. ამიტომ საჭიროდ ვთვლით გაგაცნოთ მისი აგების პრინციპები და მასალის სტრუქტურირების საკითხები.

ისევე, როგორც X კლასის მოსწავლის სახელმძღვანელოს შედგენისას, ძირითადი ორიენტირი ეროვნული სასწავლო გეგმა და იქ მოცემული რეკომენდაციებია — ორიენტირება შედეგზე და ამ შედეგის დემონსტრირებაზე, კავშირი საგნებს შორის და თვით ერთი საგნის შიგნით — მის სხვადასხვა ნაწილებს შორის; საკლასო და კლასგარეშე საქმიანობის ერთიანობა; ორიენტაცია უკლებლივ ყველა მოსწავლეზე (საკუთარი შესაძლებლობებიდან გამომდინარე, ყოველი მოსწავლე სხვადასხვა ხარისხით მიაღწევს შედეგებს). ვითვალისწინებთ, რომ მასწავლებელთა ინდივიდუალური თავისებურებები მნიშვნელოვნად აისახება სასწავლო პროცესებზე — ეროვნული სასწავლო გეგმის შესრულება სხვადასხვა გზით შეიძლება.

მე-11 კლასის სახელმძღვანელო მე-10 კლასის სახელმძღვანელოს ორგანული გაგრძელებაა. ვითვალისწინებთ ექსპერტთა რჩევებს, მათთან კონსულტაციებისას გამოთქმულ მოსაზრებებს საკითხების გადმოცემის თანამიმდევრობის შესახებ. სრულად არის გათვალისწინებული 2011-2016 წლების ეროვნული სასწავლო გეგმით მოთხოვნილი ცვლილებები სასწავლო გეგმის შინაარსში. ერთადერთი საკითხი, რომელიც X კლასის შინაარსშია წარმოდგენილი და ჩვენ მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ მისი გადმოცემა XI კლასის სახელმძღვანელოში, ტრიგონომეტრიული განტოლებებია, რომლებიც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების შესწავლას უნდა მოსდევდეს. ჩვენი ახალი სახელმძღვანელო, ახალი სტანდარტის შესაბამისადაა დაწერილი და ამით განსხვავდება წინა წლების სახელმძღვანელოსგან. ამოვიღეთ საკითხები, რომლებსაც ეროვნული სასწავლო გეგმის მოთხოვნები არ ითვალისწინებს.

სახელმძღვანელოს შინაარსს ახალი სასწავლო პროგრამის მოთხოვნები განსაზღვრავს. იგი მათემატიკის ერთიანობის სულისკვეთებით და პრაქტიკული გამოყენებების წინ წამოწევით ხასიათდება. მაგალითად, სასწავლო პროგრამაში მოცემული გეომეტრიული ნაწილი საშუალებას გვაძლევს განვახორციელოთ ამ ნაწილის ახალი იდეებით შევსებით პროცესი; დავუკავშიროთ გეომეტრიული ფაქტების დასაბუთების პროცესი ვექტორულ აღრიცხვას, გეომეტრიულ გარდაქმნებსა და მათ წარმოდგენებს კოორდინატებით. მრავალი სპეციალობის დასაუფლებლად სივრცული წარმოდგენის საკმაოდ მაღალი დონე მოითხოვება. ამ წარმოდგენების განვითარებას ემსახურება იმ გეომეტრიული მასალის (სივრცეში წრფეებსა და სიბრტყეებს შორის მიმართებები) გადმოცემის მეთოდიკა, რომელსაც ჩვენ გთავაზობთ. თანაბრად ვითვალისწინებთ მოსწავლეთა ინტუიციის, სივრცითი და ლოგიკური აზროვნების განვითარებას. სასკოლო მათემატიკაში გეომეტრიის როლი ლოგიკური აზროვნების გან-

ვითარებაში საკმაოდ მნიშვნელოვანია. თუმცა, ამ მხრივ გეომეტრიის მონოპოლისტად მიჩნევა სრულიად გაუმართლებელია. იქნებ არანაკლებ მნიშვნელოვანია ის, რომ მთელი თავისი აბსტრაქტულობის მიუხედავად, გეომეტრია პრაქტიკამ წარმოშვა და პრაქტიკაში გამოიყენება. ამიტომ მუდმივად ვუკავშირებთ განხილულ მასალას რეალურ საგნებს, სხვა დისციპლინებს, პრაქტიკულ გამოყენებებს; მასალის ახსნა, როგორც წესი, სურათის განხილვის პარალელურად მიმდინარეობს, არ გვავიწყდება წარმოდგენილი თვალსაჩინო მასალის გარკვეული „თეორიული უზრუნველყოფა“, ლოგიკით „გაჟღენთვა“.

თავები თემების მიხედვით თითქოს სასწავლო გეგმის მიმართულებების მიხედვითაა წარმოდგენილი, თუმცა ამავე სასწავლო გეგმისა და ინტეგრირებული სასწავლო კურსის მოთხოვნების შესაბამისად, ყოველი თემის გადმოცემისას, მასალას ხშირად სხვა თემასაც ვუკავშირებთ.

გეომეტრიული ფაქტებისა და, საერთოდ, მე-11 კლასის სხვა საკითხების გადაცემისას მნიშვნელოვანი ადგილი აქვს დათმობილი დედუქციური მსჯელობის ნიმუშებს; ვიზიარებთ ნიკოლა ბურბაკის ცნობილ გამონათქვამებს: „ბერძნებიდან მოყოლებული — ვიტყვით „მათემატიკა“ — ვგულისხმობთ დამტკიცებას“. თუმცა, მასალის გადმოცემის სქემა მაინც აღწერით ხასიათს ატარებს, ინდუქციის პრინციპი, სტერეომეტრიის ელემენტები და სხვა თემები აქსიომური მეთოდის მოთხოვნების შესაბამისად არ არის გადმოცემული; თეორიულ-სიმრავლური ენაც ზომიერად არის გამოყენებული. სტერეომეტრიის საწყისი ნაწილი ისეა გადმოცემული, რომ რაც შეიძლება სწრაფად მოხდეს შინაარსობრივ მასალაზე გადასვლა — ანალოგიურად ვიქცეოდით VII კლასში პლანიმეტრიის საწყისების გადმოცემისას. ვეთანხმებით ცნობილი მათემატიკოსის რენე ტომის მიერ გამოთქმულ სიტყვებს: „ჰილბერტისგან ვისწავლეთ, რომ აბსოლუტური სიმკაცრე მხოლოდ შინაარსის უგულვებელყოფით მიიღწევა“.

მასალის გადმოცემისას დაუშვებლად მიგვაჩნია საბუნებისმეტყველო საგნებისგან იზოლირება. მაგალითად, ვექტორული აღრიცხვა ფიზიკასთან მჭიდრო კავშირში უნდა მიმდინარეობდეს — იგი აუცილებელია ფიზიკისთვის, მაგრამ ვექტორი მათემატიკური ცნებაა და ფიზიკის კურსთან შესაბამისობაში უნდა ისწავლებოდეს. ვექტორული აღრიცხვა, ცხადია, არ შემოიფარგლება მისი ფიზიკაში გამოყენებით. მაგალითად, გეომეტრიაშიც ვთავაზობთ გამოყენებათა ნიმუშებს. „ხშირად უაზრო ვითარება იქმნება — ფიზიკოსები ვექტორებზე საკუთარი საჭიროების მიხედვით თავისებურად საუბრობენ, მათემატიკოსები კი — თავისებურად — ყოველგვარი საჭიროების გარეშე“.

თანამედროვე ტენდენციებსაც ფრთხილად ვუდგებით — ერთი უკიდურესობიდან (ზედმეტი ფორმალიზმიდან) მეორეზე (მხოლოდ თვალსაჩინოებასა და ინტუიციაზე) გადასვლამ შეიძლება დაუკარგოს სასკოლო მათემატიკას საგანმანათლებლო ფასეულობა. ფორმალისტური მიდგომის კრიტიკა, ტერმინებითა და სიმბოლოებით ზედმეტ გატაცებაზე უარის თქმა არ უნდა ნიშნავდეს მათემატიკის დამახასიათებელ ისეთ თვისებებზე უარის თქმას, როგორიცაა სიზუსტე, ზოგადობა და კონკრეტულობა, საკითხების ნათლად, ლაკონურად ჩამოყალიბება. ვცდილობთ ცალკეული ფრაგმენტები ლოგიკური თანამიმდევრობით, დედუქციური მსჯელობების გამოყენებით, ანალიზისა და სინთეზის, განზოგადებისა და სპეციალიზაციის, აბსტრაქციისა და კონკრეტიზაციის მეთოდებით გადმოვცეთ. მათემატიკური კვლევის ამ მნიშვნელოვან მეთოდებს, რომლებიც სწავლების პროცესშიც გამოიყენება, შეიძლება გაეცნოთ მითითებულ ლიტერატურაში. მასალის გადმოცემისას ჩვენც ხშირად ვიყენებთ ამ წიგნებს (მაგალითად, I თავში). ეროვნულ სასწავლო გეგმაში მითითებული ინდიკატორების შესრულებაც გვავალდებულებს აღნიშნული სახით მასალის გადმოცემას. ამ გეგმის შესაბამისადაა წარმოდგენილი მათემატიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური ცნების — ფუნქციის

ცნების შესახებ მოსწავლეთა ცოდნის გაფართოება, პრაქტიკული მოთხოვნების შესაბამისად ფუნქციათა ახალი კლასების შემოღება; მონაცემთა ანალიზისა და სტატისტიკის ელემენტების, ალბათობის საკითხების შესახებ ცოდნის გაფართოება. ამასთანავე, ახალი ალბათურ-სტატისტიკური ცნებების შემოტანა წინა წელს შესწავლილის გამეორებითა და გაფართოებით, ახალი პრაქტიკული მაგალითებით გამდიდრების ფონზე მიმდინარეობს.

მასალის შერჩევა და განაწილება ისეა მოფიქრებული, რომ თითქმის ყოველი საგაკვეთილო ციკლი მოიცავს კონკრეტული გამოცდილების მიღებას, მის მიმოხილვას, აბსტრაქტული შედეგის მიღებას და ექსპერიმენტირებასაც. ამ მხრივ მნიშვნელოვანია ჯგუფური მუშაობის პროექტები, რომლებიც სხვადასხვა ფორმით შეიძლება წარიმართოს — რაიმე გაკვეთილის ფრაგმენტის ჯგუფური მუშაობით განხორციელება, ან მთელი ერთი თემის ირგვლივ პაექრობის ფორმით ჩატარება. ჯგუფური მუშაობისას, შესაძლებელი საქმიანობის ხასიათის მიხედვით, ლიდერობას თავის თავზე, შესაძლოა, შესაბამისი ტიპის ერთი-ორი მოსწავლე იღებდეს, რაც ჯგუფის თითოეულ წევრს უმსუბუქებს სასწავლო საქმიანობით განპირობებულ დატვირთვას; ამასთანავე, მუშაობის ეს ფორმა ყოველ მოსწავლეს თავის გამოჩენის საშუალებას აძლევს, ავითარებს ჯგუფური პასუხისმგებლობის გრძნობას.

მოსწავლეთა მათემატიკური განსწავლულობის შეფასებისას ჩამოყალიბებული მოთხოვნების შესაბამისად, ვცდილობთ სახელმძღვანელოს საშუალებით იმ უნარების განვითარებას, რომლებიც მათემატიკური ცოდნის მრავალფეროვან ცხოვრებისეულ სიტუაციებში გამოყენებასთან არის დაკავშირებული. ამ მოთხოვნების შესაბამისად არის სავარჯიშოები, რომლის პასუხები „ორობითი ლოგიკის“ ჩარჩოებში არ თავსდება; დიდი ყურადღება ეთმობა ე. წ. სტრუქტურირებულ სავარჯიშოებს, როცა ამოცანას მოსდევს კითხვათა სისტემა, რომელშიც ყოველი შემდგომი კითხვა წინა კითხვების ანალიზს ეფუძნება.

ზოგადი კონცეპტუალური მოთხოვნები, რომლებსაც სახელმძღვანელოს შინაარსს ვუყენებთ, შეიძლება ასე შევაჯამოთ:

ა) ხელი შეუწყოს ცოდნის სხვადასხვა სფეროს შორის ურთიერთკავშირის გაცნობიერებას. პარაგრაფების უმეტესი ნაწილი ილუსტრირებული იყოს ფაქტებითა და სავარჯიშოებით ცოდნის სხვადასხვა სფეროდან;

ბ) ემყარებოდეს თანამედროვე კონცეფციებს, რომლებიც თეორიულ-სიმრავლური ენის ზომიერ გამოყენებას, მოსწავლეთა ასაკობრივი თავისებურებების გათვალისწინებას, საგნისადმი ინტერესის აღძვრას, მიღებული ცოდნით პრაქტიკული და ყოფითი ამოცანების ამოხსნის უნარ-ჩვევების ჩამოყალიბებას გულისხმობს;

გ) მასალა ისე იყოს დაგეგმილი, რომ მიმდინარეობდეს უწყვეტი გამეორება;

დ) საშუალებას იძლეოდეს მოსწავლეებს გამოუმუშავდეს ინდივიდუალური და ჯგუფური პროექტების განხორციელებისა და მათი პრეზენტაციის ჩვევები. პროექტების დაცვისას შეეძლოს დებატებში აქტიური მონაწილეობა;

ე) ყოველი სიახლე ემყარებოდეს უკვე არსებულ ცოდნას, აფართოებდეს და ავითარებდეს ამ ცოდნას (როგორც მოცემულ საგანში, ასევე — მომიჯნავე დისციპლინებში).

XI კლასის სახელმძღვანელოში მასალა გადმოიცემა იმავე მეთოდიკით, რაც იყო X კლასის სახელმძღვანელოში. იმედია, მოსწავლეებმა და მასწავლებლებმა უკვე გაითავისეს ჩვენ მიერ შემოთავაზებული სიახლეები: ყოველი პარაგრაფის ბოლოს შემაჯამებელი დასკვნებია, წარმოდგენილი მიმართულებები (რიცხვები, ალბათობა და სტატისტიკა, ალგებრა და კანონზომიერებები, გეომეტრია და სივრცის აღქმა) ერთმანეთთან მჭიდრო კავშირშია გადმოცემული; ლოგიკურად დასრულებული რაიმე თემის თანამიმდევრული გადმოცემისას საილუსტრაციო მაგალითები მათემატიკის სხვა ნაწილიდანაც გვაქვს შერჩეული. გეომეტრიული მასალის გადმოცემისას გამოყენებულია კოორდინატთა მეთოდი,

მიმდევრობებისა და, საზოგადოდ, ფუნქციური დამოკიდებულებების აღწერისას საკმაო ადგილს ვუთმობთ გეომეტრიულ წარმოდგენებს. შენარჩუნებულია პარაგრაფების ნაწილებად დაყოფის სისტემაც, ზოგჯერ ბოლო ნაწილი, რომელიც სპეციალური ნიშნაკით — „ს" (სხვადასხვა) არის გამოყოფილი, ისტორიული ფაქტების, ტერმინების წარმოშობის ისტორიისა და საინტერესო მათემატიკური ფაქტების გადმოცემას ეთმობა. ზოგჯერ ეს ნაწილი მათემატიკის გაღრმავებულ სწავლებას ემსახურება; სავარჯიშოების სისტემაც ისეა მოფიქრებული, რომ ისინი თეორიული მასალის შესწავლის სტიმულიცაა. ამოცანების ნაწილი პარაგრაფის ძირითად შინაარსს პასუხობს, ნაწილი — ადრე ნასწავლის გამეორებისა და განმტკიცებისთვისაა განკუთვნილი, მათი ნაწილი მათემატიკის გაღრმავებული სწავლებისთვისაა განკუთვნილი; ყველა პარაგრაფში ამოცანები სხვადასხვა აკადემიური დონის გათვალისწინებითაა შედგენილი. მასწავლებელის სარეკომენდაციო წიგნის საშუალებით მიიღებთ საჭირო რეკომენდაციებს ამ მიმართულებითაც.

დიდ ყურადღებას ვუთმობთ მასალის შემზადების, ათვისებისა და განმტკიცების საკითხებს.

ეს კეთდება ყოველი თავის, ყოველი პარაგრაფის დონეზე. ზოგჯერ შემზადების პროცესს მთელი პარაგრაფი აქვს დათმობილი. მაგალითად, ახალი ალბათურ-სტატისტიკური ცნებების შემოტანას წინ უძღვის ძველი ცნებების გამეორება, ახალი მაგალითებით შეძენილი ცოდნის ათვისებასა და განმტკიცებაზე ზრუნვა. ამავე მოთხოვნებს უყენებს მოსწავლის სახელმძღვანელოს სასწავლო პროგრამებში მითითებული სწავლების შედეგებისა და ინდიკატორების სისტემა.

ამ სახელმძღვანელოს სტრუქტურა და აგებულება ისეთივეა, როგორც X კლასის სახელმძღვანელოსი. იგი მოსწავლის წიგნისადმი წაყენებული ყველა მოთხოვნის შესაბამისადაა აგებული.

მოსწავლის სახელმძღვანელო სწავლების პროცესის დაგეგმვისა და წარმართვის ერთ-ერთი საშუალებაა. მოსწავლეებთან საუბარი შეიძლება წიგნის ტექსტისგან განსხვავებულიც იყოს. სახელმძღვანელო ეხმარება მასწავლებელს — იქ დაფიქსირებულია შემეცნებითი საქმიანობა, რომელიც მან უნდა აწარმოოს. მასწავლებელის საქმიანობა კი სხვა საშუალებების გამოყენებასაც გულისხმობს — მასწავლებელის წიგნი, თვალსაჩინო მასალა; დამატებითი ლიტერატურა. თუმცა, შევეცადეთ, რომ არ შეიქმნას დამატებითი სავარჯიშოების სხვა კრებულების გამოყენების საჭიროება; **მოსწავლეთა წიგნში მოცემული სავარჯიშოები მოსწავლეთა სხვადასხვა შესაძლებელობების გათვალისწინებითაა მოცემული; საჭიროა შერჩევა და კონკრეტული სიტუაციის მიხედვით მათი სწორი გამოყენება.** სასწავლო პროცესისთვის მზადების სხვადასხვა ეტაპი (სასწავლო წლის წინ, ტრიმესტრის წინ, მოცემული გაკვეთილის წინ) მასწავლებელმა ნაყოფიერად უნდა გამოიყენოს. მასალის შერჩევის საკითხში ჩვენც გეხმარებით. ამასთანავე ამოხსნილია მოსწავლის წიგნში მოცემული თითქმის ყველა ამოცანა, მითითებულია მეთოდიკური რეკომენდაციები მასალის წარმოდგენისა და ფაზების შესახებ. უნდა გვახსოვდეს, რომ მათემატიკა სჭირდება და იგი უნდა შეისწავლოს ყველა მოსწავლემ (შესწავლის ხარისხი შეიძლება იყოს სხვადასხვა — იგი შეფასებებში აისახება).

ძვირფასო მასწავლებლებო!

წარმატებებს გისურვებთ თქვენს საპატიო და მნიშვნელოვან საქმიანობაში.

XI კლასი

მათემატიკა

სტანდარტი

წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები მიმართულებების მიხედვით:

რიცხვები და მოქმედებები	კანონზომიერებები და ალგებრა	გეომეტრია და სივრცის აღქმა	მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა
მათ. XI.1. მოსწავლეს შეუძლია რიცხვთა პოზიციური სისტემების/ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების ერთმანეთთან დაკავშირება. მათ. XI.2.მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება. მათ. XI.3. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხების გამოყენება მათ. XI.4. მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა.	მათ. XI.5. მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება რეალური ვითარების მოდელირებისას. მათ. XI.6. მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად. მათ. XI.7. მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ცნებებისა და აპარატის გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.	მათ. XI.8. მოსწავლეს შეუძლია ვექტორებზე ოპერაციების შესრულება და მათი გამოყენება გეომეტრიული და საბუნებისმეტყველო პრობლემების გადაჭრისას. მათ. XI.9. მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად. მათ. XI.10. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას. მათ. XI.11. მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად.	მათ. XI.12. მოსწავლეს შეუძლია დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო მონაცემების მოპოვება. მათ. XI.13. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია. მათ. XI.14. მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა. მათ. XI.15. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.

წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები

მიმართულება: რიცხვები და მოქმედებები

მათ.XI.1. მოსწავლეს შეუძლია რიცხვთა პოზიციური სისტემების/ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების ერთმანეთთან დაკავშირება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- მოყავს ინფორმაციის ციფრული კოდირების/ტექნოლოგიების მაგალითები; აკავშირებს რიცხვის სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში ჩაწერას ერთმანეთთან (მაგალითად, **ორობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილ რიცხვს წერს ათობით პოზიციურ სისტემაში**);
- ახდენს ირაციონალური რიცხვის რაციონალური რიცხვების მიმდევრობით მიახლოების დემონსტრირებას პრაქტიკულ ამოცანებთან დაკავშირებული გამოთვლების კონტექსტში;
- მსჯელობს რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს შორის განსხვავებაზე მათი პოზიციური სისტემის გამოყენებით ჩაწერისას.

მათ.XI.2. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ამარტივებს ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების (მათ შორის ხარისხისა და ლოგარითმის) შემცველ გამოსახულებას ან პოულობს მის მნიშვნელობას მოქმედებათა თვისებების, თანმიმდევრობისა და მათ შორის კავშირის გამოყენებით;
- პოულობს არითმეტიკული მოქმედების შედეგს დასახელებული სიზუსტით; მსჯელობს შედეგის ცვლილებაზე და ცდომილებაზე, რომელიც გამოწვეულია გამოსახულების წევრების დამრგვალებით;
- იყენებს შეფასების სხვადასხვა ხერხს ნამდვილ რიცხვებზე შესრულებული გამოთვლების (მათ შორის ფესვი და ლოგარითმი მარტივ შემთხვევებში) შედეგის ადეკვატურობის შესამოწმებლად;
- ახდენს უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე სიდიდეების, მათზე მოქმედებებისა და მოქმედებათა შედეგის ინტერპრეტაციას, მიმდევრობის ან რომელიმე პროცესის ამსახველი ფუნქციის კონტექსტში.

მათ.XI.3. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხების გამოყენება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდს ამოცანების ამოხსნისას ან რიცხვების შესახებ მარტივი დებულებების დამტკიცებისას (მაგალითად, **საწინააღმდეგოს დაშვებით ამტკიცებს რომელიმე რიცხვის ირაციონალურობას**);
- აყალიბებს და გამოსახავს რიცხვების თვისებების ან რიცხვითი კანონზომიერებების შესახებ გამონათქვამებს შორის კერძო/ზოგადი ტიპის მიმართებებს, იყენებს გამოსახვის ხერხს გამოთქმული მოსაზრების მართებულობის შემოწმებისას/ დასაბუთებისას;
- რაოდენობებთან და სიდიდეებთან დაკავშირებული მსჯელობის ნიმუშზე ახდენს მსჯელობის ხაზის და დასკვნითი ნაწილის ანალიზს, აღნიშნავს მის სუსტ და ძლიერ მხარეებს.

მათ.XI.4. მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს რიცხვის ხარისხსა და ლოგარითმს, ხარისხისა და ლოგარითმის თვისებებს პრაქტიკული საქმიანობიდან ან მეცნიერების სხვადასხვა დარგებიდან მომდირე ამოცანების ამოხსნისას (მაგალითად, **ენტროპია ბიოლოგიასა და ფიზიკაში, რადიოაქტიული დაშლა და დათარიღების მეთოდები**);
- განსაზღვრავს და იყენებს შესაფერის ერთეულებს სიდიდის ცვლილების სიჩქარის აღსაწერად; ადგენს სხვადასხვა ერთეულებს შორის თანაფარდობას.

მიმართულება: კანონზომიერებები და ალგებრა

მათ. XI.5 მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება რეალური ვითარების მოდელირებისას.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს (ტრიგონომეტრიულ, უბან-უბან წრფივ, საფეხურებრივ, მაჩვენებლიან, ლოგარითმულ) ფუნქციებს და მათ თვისებებს რეალური პროცესების მოდელირებისას;
- ახდენს ფუნქციის ნულების, ფუნქციის მაქსიმუმის/მინიმუმის ინტერპრეტირებას იმ რეალური პროცესის/ვითარების კონტექსტში, რომელიც ამ ფუნქციით აღიწერება;
- იყენებს სიბრტყეზე წრფივი ოპტიმიზაციის მეთოდებს რეალურ ვითარებასთან დაკავშირებულ ამოცანებში (მაგალითად, **შეზღუდული რესურსების ეფექტიანად გამოყენების ამოცანებში**) წრფივის ფუნქციის მაქსიმუმის/მინიმუმის მოძებნისას.

მათ. XI.6 მოსწავლესშეუძლიაგრაფიკული,ალგებრულიმეთოდებისადატექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს ფუნქციის გრაფიკის გეომეტრიულ ნიშნებს (მაგალითად, **საკოორდინატო ღერძის პარალელური წრფის მიმართ სიმეტრიულობა, კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრულად სიმეტრიულობა, პარალელური გადატანის მიმართ** ინვარიანტულობა) ფუნქციის თვისებების დასადგენად;
- იყენებს შესაფერის გრაფიკულ, ალგებრულ მეთოდებს ან ტექნოლოგიებს (ტრიგონომეტრიული, უბან-უბან წრფივი, საფეხურებრივი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული) ფუნქციის ისეთი თვისებების დასადგენად, როგორიცაა: ზრდადობა/კლებადობა, ნიშანმუდმივობა, პერიოდულობა/პერიოდი, ფესვები, ექსტრემუმები;
- აღწერს თუ რა გავლენას ახდენს ფუნქციის პარამეტრების ცვლილება ფუნქციის გრაფიკზე.

მათ.XI.7 მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ცნებებისა და აპარატის გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ასახელებს ისეთ სტრუქტურებს (მაგალითად, **მიმდევრობებს, ასახვებს; მათ შორის რეალურ ვითარებაში**), რომელთა აღწერისას შესაძლებელია რეკურენტული წესის გამოყენება; იყენებს რეკურენტულ წესს ასეთი სტრუქტურის აღსაწერად;
- დებულებების დამტკიცებისას, შესაბამის შემთხვევებში, იყენებს მათემატიკურ ინდუქციას (მათ შორის არითმეტიკულ/გეომეტრიულ პროგრესიასთან დაკავშირებული ზოგიერთი ფორმულის მისაღებად);
- იყენებს ხისებრ დიაგრამებს და გრაფებს ვარიანტების დასათვლელად, გეგმის/განრიგის შესადგენად, ოპტიმიზაციის დისკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად.

მიმართულება: გეომეტრია და სივრცის აღქმა

მათ.XI.8 **მოსწავლეს შეუძლია ვექტორებზე ოპერაციების შესრულება და მათი გამოყენება გეომეტრიული და საბუნებისმეტყველო პრობლემების გადაჭრისას.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ახდენს ვექტორის სიგრძისა და მიმართულების, ვექტორებზე მოქმედებების (შეკრება, სკალარზე გამრავლება, სკალარული ნამრავლი) და მათი თვისებების გეომეტრიულ და ფიზიკურ ინტერპრეტაციას;
- იყენებს ვექტორებს გეომეტრიული დებულებების დასამტკიცებლად და ზომების დასადგენად სიბრტყეზე;
- იყენებს კოორდინატებს ვექტორებისა და ვექტორებზე ოპერაციების გამოსახვისას.

მათ.XI.9 **მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- პოულობს ლოგიკურ კავშირებს (მაგალითად, **გამომდინარეობა**) მოცემულ გეომეტრიულ დებულებებს შორის; იყენებს დედუქციურ და ინდუქციურ მსჯელობას;
- განაზოგადებს ცალკეულ გეომეტრიულ დებულებებს; აყალიბებს ჰიპოთეზას და ასაბუთებს/უარყოფს მას (მათ შორის მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით; მაგალითად, **ეილერის ფორმულა სიბრტყეზე და სივრცეში**);
- მსჯელობს ევკლიდური გეომეტრიის აქსიომატიკის არაწინააღმდეგობრიობის შესახებ;
- იყენებს ალგებრულ გარდაქმნებს გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.

მათ.XI.10 **მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ასახელებს გეომეტრიული ფიგურის იმ მახასიათებლებს, რომლებიც არ იცვლება მოცემული გეომეტრიული გარდაქმნისას (გარდაქმნის ინვარიანტებს);
- ფიგურების შესახებ სხვადასხვა მონაცემების (მაგალითად, **ფიგურათა ზომები, ფიგურათა წვეროების კოორდინატები, ფიგურათა ელემენტებს შორის ალგებრული თანაფარდობები**) გამოყენებით ასაბუთებს ან უარყოფს ორი გეომეტრიული ფიგურის ეკვივალენტობას მოცემული გარდაქმნის ან გარდაქმნის ტიპის მიმართ.

მათ.XI.11 **მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- მსჯელობს სივრცული ფიგურის კვეთის შესაძლო ფორმაზე და აგებს სივრცული ფიგურის მითითებულ კვეთას;
- პოულობს ფიგურის გეგმილს მითითებული პარალელური დაგეგმილებისას;
- მსჯელობს სივრცული ფიგურის შესაძლო ფორმაზე მისი კვეთის/კვეთების მიხედვით;
- მსჯელობს ფიგურის შესაძლო ფორმაზე მისი ანასახის მიხედვით პარალელური დაგეგმილებისას.

მიმართულება: მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა

მათ.XI.12 მოსწავლეს შეუძლია დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო მონაცემების მოპოვება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ირჩევს და იყენებს მონაცემთა შეგროვების შესაფერის საშუალებას (დაკვირვება, გაზომვა, მითითებულ რესპონდენტთა ჯგუფის გამოკითხვა მზა ანკეტით/კითხვარით, მონაცემთა მოპოვება მონაცემთა სხვადასხვა წყაროებიდან), ასაბუთებს თავის არჩევანს;
- განსაზღვრავს რესპონდენტებს, ირჩევს კითხვების დასმის შესაფერის ფორმას (ღია კითხვები, დახურული კითხვები, უჯრედის მონიშვნა, შკალაზე მონიშვნა), ქმნის მარტივ კითხვარს და იყენებს მას მონაცემთა შესაგროვებლად;
- წარმოადგენს საკითხის შესასწავლად შესაფერისი ექსპერიმენტის გეგმას, ატარებს ექსპერიმენტს და აგროვებს მონაცემებს.

მათ.XI.13 მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ირჩევს მონაცემთა წარმოდგენის შესაფერის გრაფიკულ ფორმებს, ასაბუთებს თავის არჩევანს, აგებს და განმარტავს ცხრილებს/დიაგრამებს (მათ შორის ინტერვალთა კლასებად დაჯგუფებული მონაცემებისათვის);
- ადგენს სიხშირეთა განაწილებას, წარმოადგენს მას გრაფიკული ფორმით და აღწერს მას სიმეტრიულობის, მოდების რაოდენობის, გაშლილობის ან სხვა ნიშნების საშუალებით;
- ერთი გრაფიკული ფორმით წარმოდგენილ მონაცემებს წარმოადგენს განსხვავებული გრაფიკული ფორმით და წარმოაჩენს თითოეული ფორმის ხელსაყრელ და არახელსაყრელ მხარეებს;
- ამოიცნობს დიაგრამის მცდარ ინტერპრეტაციებს ან არაკორექტულად აგებულ/გაფორმებულ დიაგრამებს, განმარტავს და ასწორებს ნაკლს.

მათ.XI.14 მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- აღწერს შემთხვევითი ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს, ითვლის დამოუკიდებელ ხდომილობათა ალბათობებს (მათ შორის ჯამის ალბათობის ფორმულების გამოყენებით);
- ითვლის რთულ ხდომილობათა ალბათობებს კომბინატორული ანალიზის გამოყენებით;
- შემთხვევითი ექსპერიმენტის ჩასატარებლად ერთ მოწყობილობას ცვლის მისი ეკვივალენტური სხვა მოწყობილობით და ასაბუთებს არჩევანს.

მათ.XI.15 მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ითვლის და იყენებს შემაჯამებელ რიცხვით მახასიათებლებს დაუჯგუფებელ მონაცემთა ერთობლიობების დასახასიათებლად/შესადარებლად და მოსაზრებათა/არგუმენტების შესაფასებლად;
- განსაზღვრავს მოდალურ კლასს და აფასებს საშუალოს, მედიანას და დიაპაზონს დაჯგუფებულ მონაცემთა სიმრავლისთვის, ითვალისწინებს მათ რეალურ ვითარებაში გადაწყვეტილების მიღებისას;

- გამოთქვამს ვარაუდს ხდომილობის მოსალოდნელობის შესახებ მონაცემთა საფუძველზე (მაგალითად, **ფარდობითი სიხშირის მიხედვით**) და ასაბუთებს ვარაუდის მართლზომიერებას.

პროგრამის შინაარსი

1. ნამდვილ რიცხვთა ქვესისტემები: რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეები.
2. სხვადასხვა პოზიციური სისტემები და მათ შორის კავშირები.
3. სხვადასხვა სახით მოცემული რიცხვების შედარება/დალაგება.
4. ალგებრული მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე.
5. ნამდვილი რიცხვის დამრგვალება და არითმეტიკული მოქმედებების შედეგის შეფასება, არითმეტიკული მოქმედებების შედეგის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოძებნა.
6. რიცხვის ხარისხი და ლოგარითმი (ნებისმიერი ფუძით).
7. ძირითადი ლოგარითმული იგივეობა.
8. ნამრავლის, შეფარდების და ხარისხის ლოგარითმი.
9. ნაშთების არითმეტიკის ელემენტები.
10. უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე სიდიდეები და მათზე მოქმედებები მიმდევრობების და ფუნქციების კონტექსტში.
11. ტრიგონომეტრიული, უბან-უბან წრფივი, საფეხურებრივი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული ფუნქციები: განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე; ნულები, მაქსიმუმები და მინიმუმები; ზრდადობის/კლებადობის და ნიშანმუდმივობის შუალედები.
12. ფუნქციის პერიოდულობა და პერიოდი.
13. ფუნქციის გრაფიკის გეომეტრიული თვისებები.
14. ძირითადი დამოკიდებულებები ერთი და იგივე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.
15. დაყვანის ფორმულები.
16. მაჩვენებლიანი განტოლებები და უტოლობები და მაჩვენებლიანი განტოლებების და უტოლობების ამოხსნა.
17. ლოგარითმული განტოლებები და უტოლობები: მუდმივფუძიანი ლოგარითმული განტოლებების და უტოლობების ამოხსნა.
18. წრფივი ოპტიმიზაციის ამოცანები სიბრტყეზე.
19. მათემატიკური ინდუქცია და მისი გამოყენება რეკურენტული წესით მოცემული რიცხვითი მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულის მისაღებად (მაგალითად: არითმეტიკული/გეომეტრიული პროგრესია, ფიბონაჩის მიმდევრობა).
20. წრფეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის, სიბრტყეებს შორის მიმართებები სივრცეში.
21. წერტილის, წრფის, მონაკვეთის ორთოგონალური დაგეგმილება სიბრტყეზე.
22. მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე.
23. წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმართობულობა და ურთიერთმართობულობის ნიშანი.
24. წრფისა და სიბრტყის პარალელობა და პარალელობის ნიშანი.
25. სიბრტყეთა პარალელობა და პარალელობის ნიშანი.
26. კუთხე სიბრტყეებს შორის.
27. სიბრტყეთა ურთიერთმართობულობა და ურთიერთმართობულობის ნიშანი.
28. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის.
29. ორწახნაგა კუთხე და მისი ზომა.
30. სიბრტყისადმი მართობი და დახრილი.

31. თეორემა სამი მართობის შესახებ.
32. ცილინდრი და მისი ელემენტები: რადიუსი, მსახველი, ფუძე, სიმაღლე, ცილინდრის ღერძი.
33. ცილინდრის ღერძული კვეთა.
34. კონუსი და მისი ელემენტები: წვერო, ფუძე, მსახველი, სიმაღლე.
35. კონუსის ღერძული კვეთა.
36. ბირთვი, სფერო და მათი ელემენტები: ცენტრი, რადიუსი, დიამეტრი.
37. ბირთვის კვეთა სიბრტყით.
38. ვექტორები და მათზე მოქმედებები: შეკრება, სკალარზე გამრავლება, სკალარული ნამრავლი.
39. კუთხე ორ ვექტორს შორის; ვექტორის სიგრძე.
40. ვექტორებისა და ვექტორული ოპერაციების გამოსახვა კოორდინატებში.
41. გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე: გადაადგილებები და მსგავსების გარდაქმნები.
42. ფიგურის (მრავალკუთხედის, წრის) ინვარიანტები გეომეტრიული გარდაქმნის მიმართ.
43. სივრცული ფიგურის კვეთები და გეგმილები.
44. მონაცემთა შეგროვების საშუალებანი: კითხვარის/ანკეტის შედგენა და რესპონდენტთა გამოკითხვა (წარმომადგენლობითი ჯგუფის შერჩევის გარეშე).
45. მონაცემთა კლასიფიკაცია და ორგანიზაცია: რაოდენობრივ მონაცემთა დაჯგუფება სასრული რაოდენობის ინტერვალთა კლასებად.
46. მონაცემთა მოწესრიგებული ერთობლიობების რაოდენობრივი და თვისობრივი ნიშნები: ტიპური და გამორჩეული (მაგალითად, ექსტრემალური, იშვიათი) მონაცემები; სიხშირეთა განაწილება; დაგროვილი სიხშირე, დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე; მონაცემთა პოზიციის მახასიათებელი - რანგი.
47. მონაცემთა წარმოდგენის საშუალებანი თვისობრივი და რაოდენობრივი მონაცემებისთვის: დიაგრამის ნაირსახეობანი (ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამები, ჰისტოგრამა, სიხშირული პოლიგონი, ოგივა, დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა დიაგრამა).
48. შემაჯამებელი რიცხვითი მახასიათებლები თვისობრივი და დაუჯგუფებელი რაოდენობრივი მონაცემებისთვის: მონაცემთა გაფანტულობის საზომები (სტანდარტული გადახრა).
49. ალბათობა: ოპერაციები ხდომილობებზე (ხდომილობათა გაერთიანება, თანაკვეთა); დამოუკიდებელ ხდომილებათა ალბათობების გამოთვლა ჯამის ალბათობისა და კომბინატორული ანალიზის გამოყენებით; გეომეტრიული ალბათობა მონაკვეთზე და ბრტყელ ფიგურაზე.

შინაარსისა და მიზნების რუკა

თემების ჩამონათვალი	თემების კავშირი მიზნებთან,რა პუნქტებს ფარავს თემა	სავარაუდო სასწავლო დრო
სიმრავლე. რიცხვითი სიმრავლეები. გრაფების გამოყენების მაგალითები.	სიმრავლეთა თეორიის ელემენტთა გამეორება; ირაციონალური რიცხვის რაციონალური რიცხვების მიმდევრობით მიახლოების დემონსტრირება პრაქტიკულ ამოცანებთან დაკავშირებული გამოთვლების კონტექსტში; რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს შორის განსხვავების ანალიზი მათი პოზიციური სისტემის გამოყენებით ჩაწერისას. XI.1. ხისებრი დიაგრამების და გრაფების გამოყენებით ვარიანტების დათვლა; გრაფების გამოყენება გეგმის/განრიგის შესადგენად, ოპტიმიზაციის დისკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად. XI.7.	8 სთ.
მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი. დამტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით.	საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა და/ან რიცხვების შესახებ მარტივი დებულებების დამტკიცება (მაგალითად, **საწინააღმდეგოს დაშვებით რომელიმე რიცხვის ირაციონალურობის დამტკიცება**); რიცხვების თვისებების ან რიცხვითი კანონზომიერებების შესახებ გამონათქვამების ჩამოყალიბება, მათ შორის კერძო/ზოგადი ტიპის მიმართებებისაც; გამოთქმული მოსაზრების მართებულობის შემოწმებისას/დასაბუთებისას სხვადასხვა ხერხის გამოყენება; რაოდენობებთან და სიდიდეებთან დაკავშირებული მსჯელობის ჩატარება. XI.3. დებულებების დამტკიცებისას, შესაბამის შემთხვევებში, მათემატიკური ინდუქციის გამოყენება (მათ შორის არითმეტიკულ და/ან გეომეტრიულ პროგრესიებთან დაკავშირებული ზოგიერთი ფორმულის მისაღებად). XI.7.	6 სთ.
უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები.	უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე სიდიდეების, მათზე მოქმედებებისა და მოქმედებათა შედეგის ინტერპრეტაცია მიმდევრობის ან რომელიმე პროცესის ამსახველი ფუნქციის კონტექსტში. XI.2. მიმდებრობების აღსაწერად რეკურენტული ფორმულების გამოყენება. XI.7.	8 სთ.

გეომეტრიული გარდაქმნები და გარდაქმნათა თვისებები.	ალგებრულ გარდაქმნების საშუალებით გეომეტრიულ დებულებათა დასაბუთება. XI.9. გეომეტრიული ფიგურის იმ მახასიათებლების გამოყოფა, რომლებიც არ იცვლება მოცემული გეომეტრიული გარდაქმნისას (გარდაქმნის ინვარიანტები); ფიგურების შესახებ სხვადასხვა მონაცემების (მაგალითად, ფიგურათა ზომები, ფიგურათა წვეროების კოორდინატები, ფიგურათა ელემენტებს შორის ალგებრული თანაფარდობები) გამოყენებით ორი გეომეტრიული ფიგურის ეკვივალენტობის დასაბუთება მოცემული გარდაქმნის ან გარდაქმნის ტიპის მიმართ. XI.10.	9 სთ.
პერიოდული პროცესები და პერიოდული ფუნქციები. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. სინუსისა და კოსინუსის პერიოდულობა. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკები. ტრიგონომეტრიული განტოლებები.	ფუნქციების(ტრიგონომეტრიული,უბან-უბანწრფივი, საფეხურებრივი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული) და მათი თვისებების გამოყენება რეალური პროცესების მოდელირებისას; ფუნქციის ნულების, ფუნქციის მაქსიმუმის/მინიმუმის ინტერპრეტირება იმ რეალური პროცესის/ვითარების კონტექსტში, რომელიც ამ ფუნქციით აღიწერება. XI.5. ფუნქციის გრაფიკის გეომეტრიული ნიშნების გამოყენება (მაგალითად, საკოორდინატო ღერძის პარალელური წრფის მიმართ სიმეტრიულობა, კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრულად სიმეტრიულობა, პარალელური გადატანის მიმართ ინვარიანტულობა) ფუნქციის (ტრიგონომეტრიული, უბან-უბან წრფივი, საფეხურებრივი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული) თვისებების დასადგენად; შესაფერისი გრაფიკული, ალგებრული მეთოდების ან ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის ისეთი თვისებების დასადგენად, როგორიცაა: ზრდადობა/ კლებადობა, ნიშანმუდმივობა, პერიოდულობა/ პერიოდი, ფესვები, ექსტრემუმები; ფუნქციის პარამეტრების ცვლილების გავლენის აღწერა ფუნქციის თვისებების ცვლილებაზე. XI.6.	24 სთ.

სივრცეში წერტილების, წრფეების, სიბრტყეების ურთიერთგანლაგების შესახებ. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა. წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი. ორი სიბრტყის პარალელურობა. სივრცული ფიგურის გამოსახვა სიბრტყეზე პარალელური დაგეგმილებისას. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. ორწახნაგა კუთხე. ორი სიბრტყის მართობულობა. მიმართებები სივრცეში გეომეტრიულ ფიგურებს შორის. ცილინდრი. კონუსი. ბირთვი. სფერო.	ფიგურათა შესახებ ცოდნის (მაგალითად,მართობულობისა და პარალელურობის ნიშანთა) პრაქტიკული გამოყენება; სივრცული ფიგურის კვეთის შესაძლო ფორმების განხილვა და სივრცული ფიგურის მითითებულ კვეთის აგება; ფიგურის გეგმილის პოვნა მითითებული პარალელური დაგეგმილებისას; სივრცული ფიგურის შესაძლო ფორმის განსაზღვრა მისი კვეთის/კვეთების მიხედვით. XI.11.	23 სთ.
ვექტორი. ვექტორის კოორდინატები. ვექტორის რიცხვზე გამრავლება. ვექტორთა შეკრება. ვექტორის დაშლა საკოორდინატო ღერძების მიმართ. ორ ვექტორს შორის კუთხე. ვექტორის გამოყენება. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი. სკალარული ნამრავლის გამოყენება. ვექტორები სივრცეში. ვექტორების გამოყენების მაგალითები. დებულებები სამი მართობის შესახებ.	ვექტორის სიგრძისა და მიმართულების განსაზღვრა, ვექტორებზე მოქმედებების (შეკრება, სკალარზე გამრავლება, სკალარული ნამრავლი) და მათი თვისებების გეომეტრიული და ფიზიკური ინტერპრეტაცია; ვექტორების გამოყენება გეომეტრიული დებულებების დასამტკიცებლად და ზომების დასადგენად სიბრტყეზე; კოორდინატების გამოყენება ვექტორებისა და ვექტორებზე ოპერაციების გამოსახვისას. XI.8.	25 სთ.

მონაცემთა შეგროვება. მონაცემთა კლასიფიკაცია და ორგანიზაცია. დაგროვილი სიხშირე. რანგი. მონაცემთა წარმოდგენის ხერხები. შემაჯამებელი რიცხვითი მახასიათებლები.	მონაცემთა შეგროვების შესაფერისი საშუალების (დაკვირვება, გაზომვა, მითითებულ რესპონდენტთა ჯგუფის გამოკითხვა მზა ანკეტით/კითხვარით, მონაცემთა მოპოვება მონაცემთა სხვადასხვა წყაროებიდან) შერჩევა/გამოყენება, ამ არჩევანის მიზანშეწონილობის ახსნა/დასაბუთება; გამოკვლევების შესაფერისი კითხვების შერჩევა (ღია კითხვები, დახურული კითხვები, უჯრედის მონიშვნა, შკალაზე მონიშვნა), მარტივი კითხვარის შედგენა და მისი გამოყენება მონაცემთა შესაგროვებლად; საკითხის შესასწავლად შესაფერისი ექსპერიმენტის გეგმის შემუშავება, ექსპერიმენტის ჩატარება და მონაცემთა შეგროვება. XI.12. მონაცემთა წარმოდგენის შესაფერისი გრაფიკული ფორმის შერჩევა, ცხრილების/დიაგრამების აგება (მათ შორის ინტერვალთა კლასებად დაჯგუფებული მონაცემებისათვის); სიხშირეთა განაწილების ანალიზი, მისი გრაფიკული ფორმით წარმოდგენა და აღწერა სიმეტრიულობის, მოდების რაოდენობის, გაშლილობის ან სხვა ნიშნების საშუალებით; ერთი გრაფიკული ფორმით წარმოდგენილი მონაცემების წარმოდგენა განსხვავებული გრაფიკული ფორმით და თითოეული ფორმის ხელსაყრელი და არახელსაყრელი მხარეების წარმოჩენა; დიაგრამის მცდარი ინტერპრეტაციების ამოცნობა/გასწორება. XI.13. შემაჯამებელი რიცხვითი მახასიათებლების პოვნა/გამოყენება დაუჯგუფებელ მონაცემთა ერთობლიობების დასახასიათებლად/შესადარებლად და მოსაზრებათა/არგუმენტების შესაფასებლად. XI.15.	14 სთ.

მაჩვენებლიანი ფუნქცია. ლოგარითმული ფუნქცია. ლოგარითმის თვისებები. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნის მაგალითები. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების გამოყენების მაგალითები. წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის მაგალითები.	ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების, მათ შორის ხარისხისა და ლოგარითმის შემცველი გამოსახულების გამარტივება და/ან მისი მნიშვნელობის პოვნა მოქმედებათა თვისებების, თანამიმდევრობისა და მათ შორის კავშირის გამოყენებით XI.2. რიცხვის ხარისხისა და ლოგარითმის, ხარისხისა და ლოგარითმის თვისებების გამოყენება პრაქტიკული საქმიანობიდან ან მეცნიერების სხვადასხვა დარგებიდან მომდირე ამოცანების ამოხსნისას (მაგალითად, **ენტროპია ბიოლოგიასა და ფიზიკაში, რადიოაქტიული დაშლა და დათარიღების მეთოდები**). XI.4. ფუნქციების(ტრიგონომეტრიული,უბან-უბანწრფივი, საფეხურებრივი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული) და მათი თვისებების გამოყენება რეალური პროცესების მოდელირებისას; სიბრტყეზე წრფივი ოპტიმიზაციის მეთოდების რეალურ ვითარებასთან დაკავშირებულ ამოცანებში (მაგალითად, **შეზღუდული რესურსების ეფექტიანად გამოყენების ამოცანებში)** გამოყენება წრფივი ფუნქციის მაქსიმუმის/მინიმუმის მოძებნისას. XI.5	22 სთ.
კომბინატორიკა. ხდომილობათა სივრცე. ხდომილობის ალბათობა. ოპერაციები ხდომილობებზე. ხდომილობათა ჯამის ალბათობა. გეომეტრიული ალბათობა.	შემთხვევითი ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის აღწერა, დამოუკიდებელ ხდომილობათა ალბათობების (მათ შორის ჯამის ალბათობის ფორმულების გამოყენებით) გამოთვლა. რთულ ხდომილობათა ალბათობების გამოთვლა კომბინატორული ანალიზის გამოყენებით; შემთხვევითი ექსპერიმენტის ჩასატარებლად სხვადასხვა მოწყობილობების შერჩევა და ამ არჩევანის შესაბამისობის დასაბუთება. XI.14. ხდომილობის მოსალოდნელობის შესახებ ვარაუდის გამოთქმა მონაცემთა საფუძველზე (მაგალითად, ფარდობითი სიხშირის მიხედვით) და ამ ვარაუდის მართლზომიერების დასაბუთება. XI.15.	14 სთ.
ნაშთთა არითმეტიკა. ნაშთთა არითმეტიკის ზოგიერთი გამოყენება. სხვადასხვა პოზიციური სისტემა.	ინფორმაციის ციფრული კოდირების მაგალითების განხილვა; სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში რიცხვების ჩანაწერების დაკავშირება (მაგალითად, ორობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვის წარმოდგენა ათობით სისტემაში და პირიქით) XI.1.	10 სთ.

შენიშვნა:მითითებული სასწავლო დრო სავარაუდოა და,ცხადია,შეიძლება შეიცვალოს მასწავლებლის შეხედულებებისამებრ; ამასთანავე,გასათვალისწინებელია სარეზერვო დრო და საათების გარკვეული ოდენობა მასალის გამეორებისთვის.

სასწავლო მასალის წარდგენის ფაზები და გაკვეთილის დაგეგმვის ზოგადი პრინციპები

სასწავლო პროცესის ორგანიზაციის ძირითადი ფორმა გაკვეთილია; საგანმანათლებლო, აღმზრდელობითი და პრაქტიკული მიზნების განხორციელება გაკვეთილზე ხდება. ამიტომ მათემატიკის სწავლების ძირითადი საკითხი გაკვეთილის კარგი მომზადება და ჩატარებაა.

მეთოდიკურ ლიტერატურაში დიდაქტიკური ცნება — „გაკვეთილი“ ძირითადად ასე აღიწერება: გაკვეთილი ლოგიკურად დასრულებული, მთლიანი სასწავლო-აღმზრდელობითი პროცესის გარკვეული შემოსაზღვრული მონაკვეთია. მასში რთულ ურთიერთდამოკიდებულებაშია პროცესის ყველა ძირითადი ელემენტი: შინაარსი, მიზანი, საშუალებები, მეთოდები, ორგანიზაცია; ყოველ გაკვეთილზე განსაზღვრული საგანმანათლებლო და აღმზრდელობითი ამოცანები წყდება; ამ ამოცანების გადაწყვეტა კონკრეტული სასწავლო მასალის განხილვის პროცესში მიმდინარეობს.

მათემატიკის გაკვეთილისადმი წაყენებული მთავარი მოთხოვნაა ძირითადი დიდაქტიკური ამოცანის არსებობა — იმ თემის შესწავლის მიზნის არსებობა, რომლის გადაწყვეტის პროცესი მოცემულ გაკვეთილზე მიმდინარეობს. ყოველი გაკვეთილის წინ კარგად უნდა გაიაზროთ მისი შინაარსი და მიზანი, ამაში ჩვენ მიერ მოწოდებული რუკა დაგეხმარებათ. მიზნის შესაბამისი უნდა იყოს კარგად გააზრებული და დაგეგმილი სასწავლო მასალის წარდგენის ფაზები:

• **მოტივაცია;** არ არის საკმარისი, რომ მასწავლებელს გააზრებული ჰქონდეს მიზანი; საჭიროა, რომ იგი მოსწავლეებისთვისაც გახდეს ძირითადი მიზანი. მოსწავლეებთან საუბარი უნდა დავიწყოთ არა იმით, თუ რას ვასწავლით, არამედ მნიშვნელოვანია თავიდანვე ინტერესის აღძვრა და ისეთი სიტუაციის შექმნა, როცა მოსწავლე მოტივირებულია და პოულობს პასუხებს კითხვაზე — „რისთვისაა საჭირო“. მოტივაცია შესაძლებელია პრაქტიკული ამოცანის დაყენებითა და მისი ამოხსნის ხერხების ძიებით დავიწყოთ, ან მათემატიკის შიგა კანონზომიერების გააზრებით, პრობლემური სიტუაციის შექმნის ხელშეწყობით; მხოლოდ ამის შემდეგ ხდება შესაბამისი ამოცანის დასმა და მისი ამოხსნის ძიება.

• ამოცანის განსაზღვრის შემდეგ მიმდინარეობს მისი ამოხსნის გზის ძიების პროცესი. ამოხსნის ძიების პროცესის წარმართვის სხვადასხვა მეთოდიკური საშუალება არსებობს. ყოველ ამოცანას, როგორც წესი, ამოხსნის ძიების გარკვეული ფორმა მიესადაგება. ეს ფორმებია — მუშაობა ჯგუფებად (შესაძლებელია ორ-ორადაც), მთელი კლასის ერთობლივი მონაწილეობით, ინდივიდუალური მუშაობა და ა. შ. იმ შემთხვევაშიც კი, როცა ამოცანის ამოხსნის ძიებაში მთელი კლასი ერთდროულადაა ჩაბმული, მასწავლებელმა სწავლება ისე უნდა წარმართოს (მოხერხებული კითხვის დასმის საშუალებით), რომ თემის შესწავლის პროცესის ძირითადი შემოქმედები თავად მოსწავლეები აღმოჩნდნენ; მასწავლებელი ამ შემთხვევაში წარმართველის, დირიჟორის ფუნქციას უნდა ასრულებდეს.

მოსწავლის სახელმძღვანელოს ტექსტი მოგცემთ ასეთი გაკვეთილების ჩატარების საშუალებას. იგი ძირითადი სასწავლო საშუალებაა და ამიტომ გაკვეთილისთვის მზადების პროცესში ტექსტების, ილუსტრაციების, სავარჯიშოების გაცნობას, დახარისხებას დიდი დრო უნდა დაუთმოთ. თუმცა, მასწავლებლის წიგნიც დაგეხმარებათ თითოეულ ეტაპზე (საწყისი, დამაგვირგვინებელი) შესასრულებელი სავარჯიშოების შერჩევის საკითხში.

შინარსისა და მიზნების რუკაში ვერ მივუთითეთ თემის შესწავლის ყველა მიზანი, რომელიც საგანმანათლებლო და აღმზრდელობითი ამოცანების გადაწყვეტის კომპონენტებისგან შედგება. არ უნდა გავაიგივოთ მიზანი შინაარსთან. მაგალითად, სამკუთხედის კუთხეების ჯამის ფორმულის გამოყვანა სახელმძღვანელოში ისეა წარმოდგენილი, რომ იგი ამ თემის შინაარსის მიზნად გარდაქმნის პროცესს კარგად წარმოგვიდგენს; დასმული

ამოცანის ამოხსნა კრიტიკული აზროვნების, მსჯელობისა და დასაბუთების უნარის გამომუშავება, გეომეტრიულ ფიგურათა გამოსახვის და ამ ფიგურათა თვისებების შესწავლაში ექსპერიმენტის გამოყენების უნარის გამომუშავებაა. ამ მიზნების განსახორციელებლად ქაღალდისგან გამოჭრილ სამკუთხედზე (მოდელზე) ჩატარებული ექსპერიმენტის (გამოიყენება რამდენიმე ღერძული სიმეტრია) ან დასაბუთების ხერხია მოწოდებული. მეორე მათგანი დასმულ კითხვებზე პასუხის შერჩევის, მსჯელობისა და დასაბუთებების ფონზე მიმდინარეობს. აქ მასწავლებელმა შეიძლება სხვა ექსპერიმენტიც დაამატოს (ტრანსპორტირის გამოყენებით). უფრო დაწვრილებით ამ გაკვეთილის შესახებ ქვემოთ მოგახსენებთ.

ამ კონკრეტული მაგალითიდან ჩანს, რომ აქტივობის მიზანი საგანმანათლებლო და აღმზრდელობითი მიზნების ერთობლიობაა.

გაკვეთილზე შესწავლილი ფაქტები თავისთავად არის მნიშვნელოვანი; თუმცა, კიდევ უფრო მნიშვნელოვანია ის, რომ მათი შესწავლის დროს განხორციელებული პროცესი თავის კვალს ტოვებს — კრიტიკული აზროვნების განვითარება, მსჯელობა და დასაბუთების უნარის გამომუშავება. ამასთანავე, მოსწავლეთა გონებაში გაიაზრება მნიშვნელოვანი საკითხები: ადამიანის მიერ ფაქტების აღმოჩენა, აღმოცენებული ამოცანების ამოხსნა და შედეგების დაფიქსირება აზროვნებაში. კონკრეტული დედუქციური მსჯელობა, დასაბუთება იმ შემთხვევაში ატარებს აღმზრდელობით ფუნქციას, როცა მოსწავლეს გავაგებინებთ მისი ჩატარების მნიშვნელობას.

ახლა დავასახელებთ რამოდენიმე სასარგებლო ზოგად რეკომენდაციას, რომელიც მეთოდიკის საკითხებს განეკუთვნება:

• მასწავლებელი ცდილობს, რომ ყოველი ახალი შემეცნებითი ამოცანა თვით მოსწავლემ ჩამოაყალიბოს;

• მასწავლებლის ხელმძღვანელობით და მოსწავლეთა ძალისხმევით — დაკვირვების, ცდის, კონკრეტული შემთხვევების ანალიზის შედეგად იქმნება წარმოდგენა, ჰიპოთეზა არსებულ კანონზომიერებაზე.

• მასწავლებლის ხელმძღვანელობით მიმდინარეობს დასაბუთებით გზის ძიება, ამოცანის ამოხსნის გეგმის შედგენა; რასაც ხშირად მოსდევს თვით მოსწავლეების მიერ ამ გეგმის რეალიზაცია.

ახლა შევეხოთ სასწავლო პროცესისთვის მზადების ზოგად სქემას:

• მასწავლებლის მუშაობა სასწავლო წლის წინ.
• გაკვეთილთა სისტემის გააზრება სასწავლო წლის წინ;
• კონკრეტული გაკვეთილისთვის მომზადება.

მომზადებისას მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს მოსწავლის წიგნი, მასწავლებელის სარეკომენდაციო წიგნი და, საჭიროების შემთხვევაში, იქ მითითებული ლიტერატურა. სარეკომენდაციო წიგნის მიხედვით, სასურველია, მასწავლებელი თავდაპირველად სასწავლო გეგმას, შეფასების სისტემას და გაკვეთილების შემოთავაზებულ ნიმუშებს გაეცნოს. სარეკომენდაციო წიგნის შესავალი მას გააცნობს ავტორთა მიერ სახელმძღვანელოს აგების ძირითად პრინციპებს.

მასწავლებელი შემოქმედებითად უნდა მიუდგეს ჩვენს რეკომენდაციებს; იგი საფუძვლად იღებს ჩვენ მიერ შემოთავაზებულ გეგმას და აზუსტებს მას საკუთარი გამოცდილებითა და კლასის თავისებურებების გათვალისწინებით. ეს დაზუსტებები განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია საწყის ეტაპზე შესასრულებელი სავარჯიშოების და დამამთავრებელ ეტაპზე შესასრულებელი სავარჯიშოებისა და საკონტროლო წერის ვარიანტების შერჩევისას.

გაკვეთილის დაგეგმვა ითვალისწინებს ჩასატარებელი პროცესის ტიპს:

- ახალი მასალის გაცნობა
- მასალის განმტკიცება
- ცოდნის შემოწმება
- სხვა ტიპის გაკვეთილები (გაკვეთილი ბუნებაში, გაკვეთილი-პროექტი ...)

თუმცა, ზოგიერთი ტიპის პროცესი (ახალი მასალის გაცნობა, განმტკიცება, შემოწმება), როგორც წესი, ყოველ გაკვეთილზე მიმდინარეობს, შესაძლებელია — სხვადასხვა მოცულობით.

მოსწავლეთა ცოდნის შემოწმება, მოსწავლეთა მუშაობაზე დაკვირვება ყოველ გაკვეთილზე მიმდინარეობს. გაკვეთილზე მთავარია ვასწავლოთ და აღვზარდოთ. სწავლება არ ნიშნავს მხოლოდ ცოდნის გადაცემას — სწავლება ცოდნის შემოქმედებითად დაუფლებას უნდა ნიშნავდეს, მისი გამოყენების უნარის განვითარებაზე უნდა იყოს მოგებული. მოსწავლეთა შეფასება სწავლის პროცესზე მასწავლებლის დაკვირვებებით, მოსწავლეთა მიერ საკონტროლო და დამოუკიდებელი სამუშაოების შესრულების ხარისხით განისაზღვრება. ყოველი გაკვეთილის შემდეგ საკუთარ წიგნაკში ჩაინიშნეთ მოსწავლეებზე დაკვირვებების შედეგები, გაითვალისწინეთ მოსწავლეთა შემოქმედებითი აქტიურობა (მასალის ათვისების დონე კარგად ჩანს სავარჯიშოების ამოხსნის დროსაც — განმტკიცების პროცესში).

სასწავლო მასალის დასაბუთებული შერჩევა ითვალისწინებს შემდეგ მოთხოვნებს:

- სასწავლო მასალის შესაბამისობა თემის მიზანთან
- გაკვეთილზე შესასრულებელი სამუშაოს მოცულობის სწორი განსაზღვრა
- ოპტიმალური თანაფარდობა კონკრეტულსა და ზოგადს შორის
- თეორიასა და პრაქტიკას შორის აუცილებელი ურთიერთკავშირის განხორციელება

მასწავლებელმა, როგორც წესი, თავიდან ბოლომდე დეტალურად უნდა გაიაზროს გაკვეთილი, წინასწარ, დროის მიხედვით უნდა იყოს განაწილებული მთელი სამუშაო.

მაგალითად, თუ გაკვეთილზე ახალ თემაზე გადასვლაც არის გათვალისწინებული, მაშინ შეიძლება იმ საკითხების შესახებ მსჯელობა, რომელთა ბუნებრივ და კანონზომიერ გაგრძელების ახალი საკითხები შეიცავს, შეიძლება გაკვეთილი პირდაპირ იმ პრაქტიკული ამოცანის განხილვით დავიწყოთ, რომლის მათემატიკური მოდელის შესწავლა ახალი მათემატიკური ფაქტების აღმოჩენას, ჰიპოთეზის ჩამოყალიბებასა და დასაბუთებებს მოითხოვს. ამ პროცესის ბუნებრივი გაგრძელება შესაბამისი სავარჯიშოთა სისტემის განხილვაა.

კითხვებზე პასუხების გაცემის სისტემა არ უნდა იყოს ერთფეროვანი — მხოლოდ წარმატებული მოსწავლეებთან მიმართებით არ უნდა შემოიფარგლოთ; მოსწავლის რაიმე მოსაზრებას მყისვე ნუ უპასუხებთ. სწორ პასუხსაც კი მაშინვე ნუ დაეთანხმებით ხოლმე — გააკეთეთ პაუზა, იქნებ გარკვეული ეჭვიც კი გამოთქვათ მისი მოსაზრების სისწორის მიმართ. ამით მიაღწევთ იმას, რომ ბავშვები დაუბრუნდებიან დასმული კითხვის ანალიზს და მალე ჭეშმარიტი დასკვნა — სწორი პასუხი კლასის დომინანტურ მოსაზრებად გადაიქცევა. კლასი, ერთობლივი ძალისხმევით, „გაიძულებთ" დაეთანხმოთ მის პოზიციას. ეს ახარებს, ამხნევებს და აერთიანებს ახალგაზრდებს. ეს მათი ერთობლივი აზრის გამარჯვებაა. თქვენს მიზანსაც ხომ ეს წარმოადგენს — მოსწავლე ჩამოაყალიბოთ შემოქმედ, ცოდნით აღჭურვილ, ინიციატივიან, ხალისიან ახალგაზრდად. მათემატიკა მძლავრი ემოციური მუხტის მატარებელია და მისი ამოქმედება თქვენი ძალისხმევით მიიღწევა".

ყურადღებით უნდა მოვისმინოთ ყველა პასუხი, უხეში შეცდომის შემთხვევაშიც კი დაუშვებელია მკაცრი უარყოფითი შეფასებების გამოთქმა.

ყურადღება მიაქციეთ, რომ ტერმინები, ცნებები და მოვლენები სწორად იყოს განმარტებული.

გაკვეთილების დაგეგმვასა და წარმართვაში ხელს შეგიწყობთ სანიმუშო გაკვეთილების სცენარები.

ახალი მასალის განმტკიცების პროცესი შეიძლება ე. წ. „ტესტური“ ამოცანების „ამოხსნით“ დავიწყოთ, მათი შესრულება სწორი პასუხის შერჩევით უნდა შემოიფარგლოს — ზოგჯერ შეიძლება კომენტარების გაკეთებაც გახდეს საჭირო. ყოველ პარაგრაფში მოცემული მასალა, როგორც წესი, 2 გაკვეთილზეა გათვალისწინებული; მეორე გაკვეთილზე ცოდნის განმტკიცებაზე ზრუნვით შემოვიფარგლებით.

სწავლების ერთ-ერთი საინტერესო და მნიშვნელოვანი ფორმა ჯგუფური მუშაობაა. ეს მუშაობა შეიძლება გაკვეთილის პროცესის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილი იყოს — დაუკავშირდეს ახალი მასალის გააზრებას, პრაქტიკული საქმიანობის (ექსპერიმენტის) ან შემაჯამებელი დასკვნების გამოტანას, ან, შესაძლებელია, მას მთელი გაკვეთილიც დავუთმოთ. მის წარმართვაში მოსწავლის სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი ამოცანების სისტემა დაგეხმარებათ (მაგალითად, ამოცანები ჯგუფური მუშაობისთვის). ამ შემთხვევაში ჯგუფურ მუშაობას შეიძლება შეჯიბრის სახეც კი მივცეთ.

ორგანიზაციულად ჯგუფური მუშაობის ეს ვარიანტი — პაექრობა — ჯგუფური მუშაობა შეიძლება ასე მოვაწყოთ:

წინასწარ ვაცხადებთ ჩატარების დღეს; მოსწავლეებს ვავალებთ სამუშაო რვეულის ორმაგი ფურცელი იქონიონ. პაექრობა მოსწავლეთაგან კაპიტნებისა და მათი თანაშემწეების დასახელებით იწყება. ოპტიმალურია 4-5 მოსწავლისგან შემდგარი ჯგუფები — გუნდები. გუნდების დაკომპლექტება შეიძლება კაპიტნებსაც მიანდოთ. მთავარია, „არჩევნებმა“ დიდი დრო არ წაგართვათ.

მას შემდეგ, რაც გუნდები დაკომპლექტდება, წინასწარ გამრავლებული ამოცანები დაურიგეთ გუნდებს (ან დაფაზე ამოწერეთ პირობები). ამ შემთხვევაში ყველა გუნდს ერთნაირი დავალება მიეცემა.

გაკვეთილის დასრულებამდე 10-12 წუთით ადრე კაპიტნებს ევალებათ წარმოადგინონ მათი გუნდების შედეგები — მათი ამოცანების ამოხსნები. ჩაიბარეთ ეს ამოხსნები წინასწარი კომენტარების გარეშე და საუკეთესო ამოხსნების ავტორები რიგრიგობით მიიპატიჟეთ დაფასთან ნაშრომთა მოკლე პრეზენტაციისთვის. ცხადია, კრიტიკა და პოლემიკა, თუ ამის საფუძველი არსებობს, უნდა იყოს უშეღავათო, მაგრამ კორექტული. ამ ბჭობაში თქვენც მოგიწევთ ხანდახან ჩაბმა; ზოგჯერ მედიატორის როლის შესრულებაც. ეს პროცედურა აღნიშნულ დროზე მეტს არ მოითხოვს, რადგან ამოცანები ყველას კარგად აქვს გააზრებული და მხოლოდ საკვანძო პუნქტებია ხაზგასასმელი.

ამ განსჯის დასრულებისთანავე უნდა აღდგეს მერხების თავდაპირველი განლაგება, შემდეგ აცხადებთ გუნდების მიერ მოპოვებულ ქულებს (თითოეული ამოცანა შეიძლება 2-ქულიანი სკალით შეფასდეს) და დაკავებულ ადგილებს ამ პაექრობაში. შეიძლება დაამატოთ დამატებითი ქულები პრეზენტაციის შესაფასებლად.

ჯგუფური მუშაობისთვის ამოცანები შეიძლება შეირჩეს სახელმძღვანელოში შესაბამისი ნიშნაკით გამოყოფილი ადგილიდან. თუმცა, წინასწარ ყველა ამოცანა რომ არ იყოს „გაშიფრული“, იქნებ მათი პირობები ოდნავ შეცვალოთ, ან, ზოგიერთი ამოცანა პარაგრაფის დამატებითი სავარჯიშოების კრებულიდან აირჩიოთ.

მოსწავლის სახელმძღვანელოში შემოთავაზებული ჯგუფური მუშაობის ზოგიერთი პროექტი რაიმე ერთი ახალი თემის შესაბამისი სტრუქტურირებული კითხვებისგან შედგენილი ამოცანაა — ყოველი კითხვა წინას უკავშირდება — კითხვებზე პასუხების სისტემა რაიმე ერთი ახალი თემის შესაბამისი პრობლემის დასმას და ამოხსნას გულისხმობს. ამ შემთხვევაში პასუხების სისტემა, რომელიც მოსწავლეთა ჯგუფის ერთობლივი ძალისხმევის

შედეგია, მათი კოლექტიური შემოქმედებითი ნაშრომია და მისი შეფასება პრეზენტაციისას განხორციელდება.

ზოგჯერ ჯგუფებს სხვადასხვა სახის დავალებები შეიძლება მივცეთ — განსხვავებული ექსპერიმენტის ჩატარება (მაგალითად, გეომეტრიული ობიექტის თვისებების დასადგენად ან დასაბუთების გზით გეომეტრიული ფაქტის განხილვა-დასაბუთება, შედეგის წარმოდგენა. ამ შემთხვევაში მოსწავლეები მსჯელობენ წარმოდგენილი ვარაუდების კორექტულობაზე და ადარებენ მათ. ასეთი ტიპის ჯგუფური მუშაობები, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, გაკვეთილის ფრაგმენტი შეიძლება იყოს და ხშირად უნდა გამოვიყენოთ.

თეორიული მასალის გადმოცემის ჩვენეული მეთოდიკა საშუალებას გაძლევთ აირჩიოთ, ყველაზე უფრო მოსახერხებელი ფორმა შინაარსისა და მიზნების რუკაში მითითებული მოთხოვნების შესასრულებლად.

ამრიგად, გაკვეთილის დაგეგმვა შესაძლებელია შემდეგი სქემით მიმდინარეობდეს.

- სასწავლო მიზნები — გაკვეთილის იდეური შინაარსი; ის, რასაც უნდა მიაღწიოთ, რა ცოდნა და უნარ-ჩვევები უნდა შეიძინონ მოსწავლეებმა ამ გაკვეთილზე;
- შეფასება — რა კრიტერიუმებით შევაფასებთ დაგეგმილის შესრულების ხარისხს და რა შემთხვევაში ვიტყვით, რომ გაკვეთილმა წარმატებულად ჩაიარა;
- მიღწევის საშუალებები — რა მეთოდებით, მოსწავლეთა რა ორგანიზებითა და რა დამატებითი რესურსების საშუალებით აპირებთ დასახული ამოცანების გადაჭრას; სასურველია წინასწარ გათვალოთ დროის სავარაუდო ხარჯი; აუცილებლად წინასწარ განსაზღვრეთ საშინაო დავალების ხასიათი და მოცულობა.

შეფასების ზოგადი პრინციპები

სასკოლო შეფასების ახალი სისტემა, რომელიც ეროვნული სასწავლო გეგმით არის განსაზღვრული, ითვალისწინებს შემდეგ აუცილებელ მიდგომებს: აკადემიური მოსწრების შეფასება უნდა იყოს ხშირი და მრავალმხრივი. უნდა შეფასდეს არა მარტო ინფორმაციის ფლობა, არამედ შეძენილი უნარ-ჩვევები. არ არის საკმარისი მოსწავლე მხოლოდ საკონტროლო წერების საფუძველზე შეფასდეს. მასწავლებელი უნდა აფასებდეს პრეზენტაციების, მოსწავლისავე თვითშეფასების, ჯგუფური მუშაობის, თუ სხვა ტიპის აქტივობების მიხედვით. მასწავლებელმა შეფასებისას უნდა გაითვალისწინოს საგანმანათლებლო პროცესში მოსწავლის ჩართულობის ხარისხი (სახლში მიცემული დავალების შესრულების ხარისხი, გაკვეთილზე აქტიურობა, შემოქმედებითობა და სხვა), ამასთანავე, მიზანშეწონილია მოსწავლესაც გავაცნოთ წინასწარ შეფასების კრიტერიუმები. ამ კრიტერიუმების შედგენაში შეიძლება მოსწავლეთა ჩართვაც.

საკონტროლო წერების შეფასების სქემებს ამ წიგნში გაეცნობით. დაუშვებელია მოსწავლეთა ქცევის გათვალისწინება აკადემიური მოსწრების შეფასებისას — გაკვეთილზე არასათანადოდ მოქცევა, როგორც წესი, თავისთავად აისახება აკადემიურ მოსწრებაზე.

მოსწავლის ნიშანი უნდა გამომდინარეობდეს მის მიერ საგნის შესწავლის სხვადასხვა კომპონენტისგან — საკონტროლო წერის შესრულება, გაკვეთილზე მსჯელობა, ჯგუფური მუშაობა, პრეზენტაცია და სხვა. უნდა გვახსოვდეს, რომ სემესტრის ნიშანი (უმაღლესი ქულაა 10) აუცილებლად სხვადასხვა კომპონენტის შეფასებებისგან უნდა გამომდინარეობდეს.

ახლა გთავაზობთ ეროვნული სასწავლო გეგმით წარმოდგენილ მოთხოვნებს მათემატიკაში მოსწავლის შეფასების შესახებ.

შეფასება მათემატიკაში

შეფასების კომპონენტები მათემატიკაში

1) საშინაო და საკლასო დავალებათა კომპონენტები

შეიძლება შეფასდეს შემდეგი ცოდნა და უნარ-ჩვევები

1. მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება;
2. კავშირებისა და მიმართებების დადგენა;
3. მათემატიკური ობიექტების წარმოდგენა და მათემატიკური ენის ფლობა;
4. მსჯელობა - დასაბუთება;
5. ამოცანის ჩამოყალიბება;
6. მოდელირება;
7. ამოცანის ამოხსნის გზა და მისი რეალიზება;
8. გამოთვლები;
9. დამხმარე ტექნიკური საშუალებებისა და საინფორმაციო ტექნოლოგიების გამოყენება.

სასიცოცხლო უნარ-ჩვევები

1. შემოქმედებითობა;
2. თანამშრომლობა (მეწყვილესთან, ჯგუფის წევრებთან);
3. სტრატეგიების გააზრებულად გამოყენება სასწავლო საქმიანობის ხელშეწყობის მიზნით;
4. სასწავლო აქტივობებში მონაწილეობის ხარისხი.

უნარ-ჩვევები ფასდება შემდეგი კრიტერიუმებით:

1. მოსწავლე აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გააზრებს და გამიჯნავს ამოცანის მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს. ახდენს მონაცემების (მათ შორის პრობლემის გადასაჭრელად საჭირო მონაცემების) ორგანიზებას და მათ წარმოდგენას;
2. გადმოცემისას სწორად და ეფექტიანად იყენებს მათემატიკურ ტერმინებსა და აღნიშვნებს. ადეკვატურად ირჩევს სიმკაცრის დონეს და როდესაც საჭიროა, დასაბუთებისას იყენებს მკაცრ მათემატიკურ მსჯელობას (მათ შორის ინდუქციურ და დედუქციურ მსჯელობას);
3. პოულობს, არჩევს და იყენებს გზებსა და მეთოდებს (მათ შორის ტექნოლოგიებს) ფიგურების და ობიექტების ზომების, აგრეთვე მათ შორის მანძილების, მასის, ტემპერატურის და დროის გასაზომად. არჩევს და მოიპოვებს პროცესის ან რეალური ვითარების მოდელირებისათვის საჭირო მონაცემებს;
4. ახდენს მოცემული მოდელის ელემენტების ინტერპრეტირებას იმ რეალობის კონტექსტში, რომელსაც მოდელი აღწერს და პირიქით – რეალური ვითარების დაკვირვების შედეგად მიღებული მონაცემების ინტერპრეტირებას შესაბამისი მოდელის ენაზე. განსაზღვრავს მოდელის ვარგისიანობას და აფასებს მისი გამოყენების საზღვრებს;
5. კომპლექსურ (რთულ) პრობლემას ყოფს საფეხურებად, მარტივ ამოცანებად და ჭრის ეტაპობრივად (ამოხსნა),
6.
7. მათ შორის სტანდარტული მიდგომებისა და პროცედურების გამოყენებით;
8. ამოცანების ამოხსნისას, იყენებს მათემატიკურ ობიექტებს, პროცესებს და მათ თვისებებს;
9. ირჩევს ეფექტიან სტრატეგიას და მოკლედ აღწერს პრობლემის გადაჭრის საფეხურებს. მიჰყვება არჩეულ სტრატეგიას. აანალიზებს არჩეულ სტრატეგიას და ასაბუთებს არჩეული სტრატეგიის ეფექტიანობას, მიმოიხილავს შესაძლო ალტერნატიულ სტრატეგიებს და

მსჯელობს მათ უპირატესობებსა და ნაკლზე;

10. ირჩევს გამოთვლების ადეკვატურ / ოპტიმალურ ხერხს და ახდენს მის რეალიზებას;
11. ამყარებს კავშირებს (მაგალითად, სხვა მათემატიკურ სტრუქტურებთან, ობიექტებთან ან სხვა დისციპლინებთან) და იყენებს ამ კავშირებს როგორც პრობლემის გადაჭრისას, ასევე მიღებული შედეგების გაანალიზებისას;
12. ახდენს მიღებული შედეგების განზოგადებას, ამყარებს კავშირებს (მაგალითად სხვა მათემატიკურ სტრუქტურებთან, ობიექტებთან ან სხვა დისციპლინებთან) და იყენებს ამ კავშირებს როგორც პრობლემის გადაჭრისას, ასევე მიღებული შედეგების გაანალიზებისას;
13. ირჩევს დასაბუთების ხერხს (მაგალითად: საწინააღმდეგოს დაშვების გამოყენება დამტკიცებისას, ევრისტული მეთოდის გამოყენება დასაბუთებისას);
14. ინფორმაციის გადაცემისას წარმოაჩენს საკითხის არსს (მაგალითად, მათემატიკური ობიექტის არსებით თვისებებს);
15. კორექტულია მასწავლებელთან და მეგობრებთან მიმართებაში. იგებს და აანალიზებს სხვის ნააზრევს;
16. თანამშრომლობს თანაკლასელებთან ჯგუფური სამუშაოების შესრულებისას;
17. აუდიტორიისა და საპრეზენტაციო მასალის მიხედვით ირჩევს პრეზენტაციის ფორმას და დამხმარე საშუალებებს (მათ შორის საინფორმაციო ტექნოლოგიებს). ეფექტიანად იყენებს პრეზენტაციისათვის განკუთვნილ დროს;
18. ახდენს პრობლემის ფორმულირებას აუდიტორიისათვის გასაგები ფორმით. ასაბუთებს პრობლემის აქტუალურობას და მნიშვნელობას (იგულისხმება პრობლემის პრაქტიკული ან/ და წმინდა მეცნიერული აქტუალურობა);
19. სადემონსტრაციოდ იყენებს მაგალითებს, როგორც რეალური ვითარებიდან ასევე მათემატიკიდან;
20. კეთილსინდისიერად ასრულებს დავალებებს (ვადებისა და რაოდენობის თვალსაზრისით).

2) შემაჯამებელი დავალებების კომპონენტი

შემაჯამებელი დავალების კომპონენტი უკავშირდება სწავლა-სწავლების შედეგს. ამ კომპონენტში უნდა შეფასდეს ერთი სასწავლო მონაკვეთის (თემა, თავი, პარაგრაფი, საკითხი) შესწავლა-დამუშავების შედეგად მიღწეული შედეგები. კონკრეტული სასწავლო ერთეულის დასრულებისას მოსწავლემ უნდა შეძლოს მათემატიკის საგნობრივი პროგრამით განსაზღვრული ცოდნისა და უნარების წარმოჩენა. შესაბამისად, შემაჯამებელი დავალებები უნდა აფასებდეს მათემატიკის საგნობრივი პროგრამით განსაზღვრულ შედეგებს.

შემაჯამებელ დავალებათა ტიპები:

სტანდარტის მოთხოვნათა დასაფარად, რეკომენდებულია შემაჯამებელ დავალებათა მრავალფეროვანი ფორმების გამოყენება. მათემატიკის შემაჯამებელ დავალებათა ტიპები შეიძლება იყოს:

1. ტექსტურ ამოცანასთან დაკავშირებული ღია ან დახურული (რამდენიმე შესაძლო პასუხს შორის სწორი პასუხის შერჩევა, შესაბამისობის დამყარება, სწორი თანმიმდევრობით დალაგება) ტიპის დავალება;
2. ტექსტის წაკითხვა და მონაცემთა ანალიზით (გამოთვლების ან ლოგიკური მსჯელობის საფუძველზე) მიღებული დასკვნის გადმოცემა და დასაბუთება (მათ შორის ისეთი ტექსტის, რომელიც შეიცავს დიაგრამებს და ცხრილებს);
3. განტოლების ამოხსნა, ასოითი გამოსახულების გამარტივება, რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის გამოთვლა;
4. გეომეტრიული ამოცანა, რომელშიც მოსწავლეს მოეთხოვება ფიგურის თვისებების დადგენა,

ზომების განსაზღვრა, ფიგურის აგება;

5. ამოცანა, რომელშიც წინასწარ განსაზღვრული მონაცემების საფუძველზე მოსწავლეს მოეთხოვება მოცემული ფაქტის დასაბუთება ან უარყოფა (მაგალითად, თეორემის დამტკიცება).

მოთხოვნები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს შემაჯამებელი დავალებები:

- დავალების თითოეულ ტიპს უნდა ახლდეს თავისი შეფასების ზოგადი რუბრიკა;
- ზოგადი რუბრიკა უნდა დაზუსტდეს კონკრეტული დავალების პირობისა და განვლილი მასალის გათვალისწინებით;
- 10 ქულა უნდა გადანაწილდეს რუბრიკაში შემავალ კრიტერიუმებზე;
- მითითებული უნდა იყოს სტანდარტის ის შედეგები, რომელთა შეფასებასაც ემსახურება შემაჯამებელი დავალება.

ზოგადი რუბრიკის ნიმუში:

შეფასების ზოგადი რუბრიკა ტექსტური ამოცანისათვის (წერითი დავალება)

- ამოცანის მონაცემების ორგანიზება;
- ადეკვატური აღნიშვნების შემოტანა;
- ამოხსნის გზის მოძებნა;
- ამოხსნის გზის რეალიზება და პასუხის მიღება.

კონკრეტული რუბრიკის ნიმუში

ტექსტური ამოცანა, რომლის ამოხსნა მოითხოვს განტოლების შედგენას და ამოხსნას

საფეხურები	ქულა
ამოცანის მონაცემების ორგანიზება	
ამოხსნისათვის საჭირო მონაცემების ამოკრეფა ამოცანის ტექსტიდან	0 - 1
მონაცემების ორგანიზება და ისეთი ხერხით ჩაწერა, რომელიც აადვილებს ამოხსნის გზის მოძებნას	0 - 1
ადეკვატური აღნიშვნების შემოტანა	
საძიებელი სიდიდეების გამოყოფა	0 - 1
საძიებელი სიდიდეებისათვის ასოითი აღნიშვნების შემოღება	0 - 1
მათემატიკური ობიექტებისა და პროცედურებისათვის სწორი აღნიშვნების გამოყენება (მაგალითად: ფუნქციის, ალგებრული მოქმედების)	0 - 1
ამოხსნის გზის მოძებნა	
განტოლების შედგენის წინმსწრები მსჯელობა	0 - 1
განტოლების შედგენა	0 – 1
ამოხსნის გზის რეალიზება და პასუხის მიღება	
განტოლების ამოხსნის ხერხის მოძებნა	0 - 1
განტოლების ამოხსნა და პასუხის მიღება	0 – 1 - 2

სანიმუშო გაკვეთილები

გაკვეთილი 1

აქტივობა: რიცხვების შესახებ დებულებების დასაბუთებისას საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენება (თავი I, §1, ნაწილი 2)

რეზიუმე: მოსწავლეები იყენებენ მსჯელობა-დასაბუთების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ხერხს — საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხს სხვადასხვა ირაციონალურობის დასასაბუთებლად

აქტივობის მიზანი

• საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხის გამოყენების უნარ-ჩვევევბის დაუფლება და გაღრმავება

• ირაციონალურ და რაციონალურ რიცხვებს შორის განსხვავების გააზრება — მათი ჩაწერის ხერხებს შორის განსხვავების მინიშნების უნარი (რაციონალური რიცხვის ორი მთელის შეფარდების სახით წარმოდგენის შესაძლებლობა; უსასრულო ათწილადის სახით წარმოდგენები, პოზიციურ სისტემაში ჩაწერებს შორის განსხვავება).

აუცილებელი წინა ცოდნა

• რაციონალური რიცხვის ჩაწერა $\frac{m}{n}$ სახით (m — მთელია, n ნატურალური).

• რაციონალური რიცხვის ჩაწერა სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით.

მივმართავთ კლასს და ვცდილობთ მათთან ერთად გავიხსენოთ საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით დასაბუთების მეთოდის შინაარსი; — ვთქვათ, დასასაბუთებელი გვაქვს რაიმე დებულება. რით ვიწყებთ ამ დებულების დასაბუთებას? ვუშვებთ, რომ მოცემული დებულება მცდარია, მაშასადამე, მისი საწინააღმდეგო დებულებაა ჭეშმარიტი.

— ასეთი დაშვების შემდეგ მსჯელობით, რა დებულების მიღებაა შესაძლებელი (პირობის ან რაიმე ჭეშმარიტი დებულების მცდარობის).

— ამის შემდეგ რა დასკვნას ვაკეთებთ?

— გაიხსენეთ X კლასის სახელმძღვანელოს მიხედვით საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხის გამოყენების მაგალითები (სასამართლოს პრაქტიკიდან, ფიზიკიდან).

თითოეულ კითხვაზე პასუხს მოსწავლეებისგან ვიღებთ. სწორ პასუხსაც კი ერთობლივად ვაანალიზებთ. თითოეული მოსწავლისგან ველით მისი საკუთარი პოზიციის საჯარო გაცხადებას ან სათანადო კომენტარებს.

ამის შემდეგ მეცადინეობა შეიძლება მცირერიცხოვან ჯგუფებში გაგრძელდეს. შევთავაზოთ ჯგუფებს შესაბამისად $\sqrt{3}$-ის, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$-ის, $0{,}1234...$ (ნულის შემდეგ ამოწერილია ყველა ნატურალური რიცხვი მიმდევრობით), $0{,}171771777....$) პირველი ერთიანის შემდეგ ერთი შვიდიანი, მეორე ერთიანის შემდეგ ორი შვიდიანი და ა. შ.)

• რაციონალურობის დასაბუთება საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხის გამოყენებით.

ჯგუფები წარმოადგენენ შედეგებს — ნამუშევრების პრეზენტაცია ხდება. შეეცადეთ ყურადღება მიაქციოთ დასაბუთების ყველა დეტალს (მაგალითად, $\sqrt{3}$-ის ირაციონალურობის დასაბუთებისას შეიძლება მოითხოვოს საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის ორჯერ გამოყენება, ან წინასწარ იმის ჩვენება, რომ, როცა ნატურალური რიცხვის კვადრატი სამზე იყოფა, მაშინ აუცილებლად ეს რიცხვიც იყოფა სამზე). მოსწავლეები ადარებენ დასა-

ბუთების საკუთარ გზებს; მსჯელობენ არგუმენტების დამაჯერებლობაზე. ირაციონალური რიცხვების წარმოდგენის საშუალებებზე, რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების ჩანაწერებს შორის განსხვავების შესახებ.

აქტივობის გაფართოება-გაღრმავება

აქტივობის გაფართოება-გაღრმავების მიზნით შეიძლება განიხილოთ 29 ამოცანაში ჩამოყალიბებული სამი დებულება — იგი მოიცავს სამივე შემთხვევას — თუ სამკუთხედში ერთ-ერთი კუთხე მართია, მაშინ მოპირდაპირე გვერდის კვადრატი ტოლია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის, თუ ერთ-ერთი კუთხე ბლაგვია, მაშინ მისი მოპირდაპირე გვერდის კვადრატი მეტია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე, თუ ერთ-ერთი კუთხე მახვილია, მაშინ მისი მოპირდაპირე გვერდის კვადრატი ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე. აქ ისმის კითხვა — ჭეშმარიტია თუ არა ამ სამი დებულების შებრუნებული (მოპირდაპირე) დებულებები? მოსწავლეებთან ერთად ვცდილობთ განვაზოგადოდთ შემთხვევა და მოვიძიოთ სხვა ანალოგიური შემთხვევები.

აქტივობის განხილვა/შეფასება

ნათელია, რომ მოცემული აქტივობა საშუალებას იძლევა მსჯელობა-დასაბუთების ერთ-ერთი ხერხის განხილვასთან ერთად კარგად გავიაზროთ რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების ჩანაწერებში განსხვავება, საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხის — დასაბუთების ამ არაპირდაპირი ხერხის მნიშვნელობის გაგება.

გაკვეთილი 2

აქტივობა: ვექტორთა შეკრებისა და ვექტორის რიცხვზე გამრავლების მოქმედებათა შესრულება. (თავი III, §3)

რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან ორი ვექტორის ჯამისა და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის ცნებებს, იძენენ ვექტორების შეკრებისა და ვექტორის რიცხვზე გამრავლების მოქმედებათა შესრულების ჩვევებს.

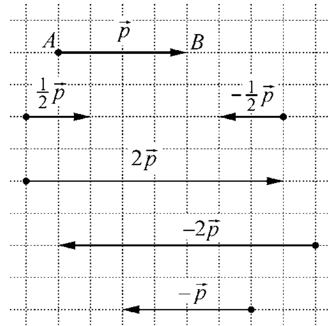
აქტივობის მიზანი:

- ვექტორების შეკრების ორი ხერხის — სამკუთხედისა და პარალელოგრამის წესების გაცნობა და დაუფლება, ამოცანების ამოხსნისას მათი გამოყენების ჩვევების გამომუშავება;
- ვექტორის რიცხვზე გამრავლების წესის შესწავლა და ამოცანების ამოხსნისას ამ წესების გამოყენების უნარ-ჩვევების გამომუშავება;
- კოორდინატებით მოცემულ ვექტორებზე მოქმედებათა შესრულების შედეგის (ვექტორის) კოორდინატებით ჩაწერის წესების ათვისება.

აუცილებელი წინა ცოდნა

- ვექტორის მიმართული მონაკვეთით წარმოდგენა.
- ვექტორის კოორდინატების პოვნა.
- ვექტორების ტოლობის ცნება.
- მოცემული ვექტორის ტოლი ვექტორის რაიმე წერტილიდან გადადება.

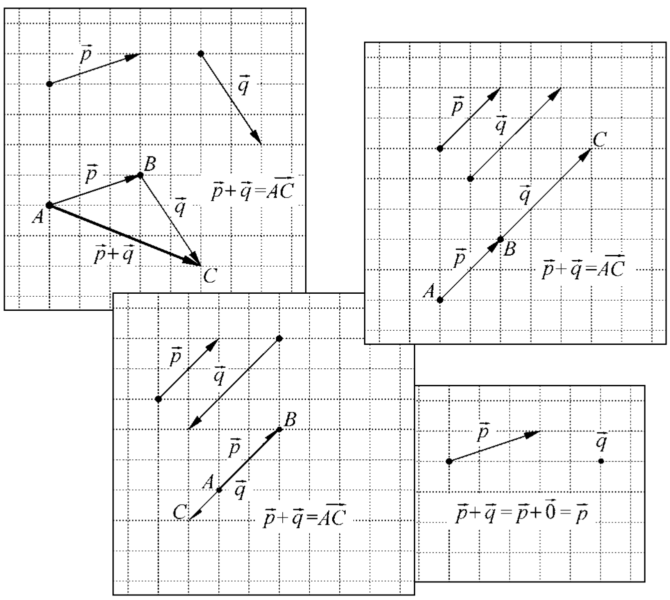
აქტივობის აღწერა



შემოგვაქვს ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის ცნება და ვახდენთ ამ ცნების ილუსტრირებას არანულოვანი ვექტორის სხვადასხვა არანულოვან რიცხვზე გამრავლების განხილვით.

ცალკე განვიხილავთ $\vec{p}=\vec{0}$ და k=0 შემთხვევებს. განსაკუთრებულ ყურადღებას მივაქცევთ შემთხვევას, როცა $\vec{p}\neq\vec{0}$ და $k=-1$, ანუ მოპირდაპირე ვექტორების შემთხვევას — მოსწავლეებს შევთავაზოთ ჩამოაყალიბონ მოპირდაპირე ვექტორების განსაზღვრება გამრავლების გამოყენების გარეშე: ორ ვექტორს ვუწოდოთ მოპირდაპირე ვექტორები, თუ 1) მათი მოდულები ტოლია და 2) საწინააღმდეგოდ არიან მიმართული.

შემოგვაქვს ორი ვექტორის ჯამის ცნება და განვიხილავთ შესაკრებთა სხვადასხვა ურთიერთგანლაგების შემთხვევებს:



გამოვყოფთ ვექტორთა შეკრების სამკუთხედისა და პარალელოგრამის წესებს. აუცილებლად დავსვამთ კითხვას — რა სიტუაციებს დაასახელებთ, როცა ვექტორების შეკრებისას განხილული ორი წესიდან ერთ-ერთს ენიჭება უპირატესობა? (სასურველია განიხილოთ გადაადგილებათა კომპოზიციისა და სხეულის ერთ წერტილზე მოდებულ ძალათა ტოლქმედის მოძებნის შემთხვევები. შეიძლება მივმართოთ მოსწავლეებს სქემატურად გამოსახონ ბაგირის გადაწევაში შეჯიბრებისას წარმოქმნილი ძალები და მათი ტოლქმედი).

საკოორდინატო სიბრტყეზე ილუსტრირების თანხლებით განვიხილავთ ვექტორის რიცხვზე ნამრავლსა და ვექტორთა ჯამს:

1) თუ $\vec{p}=(x;y)$, მაშინ $k\vec{p}=(kx;ky)$;

2) თუ $\vec{p}=(x_1;y_1)$, $\vec{q}\,(x_2;y_2)$, მაშინ
$\vec{p}+\vec{q}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$.

ჩამოვაყალიბებთ ვექტორებზე მოქმედებათა თვისებებს:

1) $\vec{p}+\vec{q}=\vec{q}+\vec{p}$; 5) $k(m\vec{p})=(km)\vec{p}$;

2) $(\vec{p}+\vec{q})+\vec{r}=\vec{p}+(\vec{q}+\vec{r})$; 6) $(k+m)\vec{p}=k\vec{p}+m\vec{p}$;

3) $\overrightarrow{p}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{p}$;   7) $k(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q})=k\overrightarrow{p}+k\overrightarrow{q}$;

4) $\overrightarrow{p}+(-\overrightarrow{p})=\overrightarrow{0}$;   8) $1\cdot\overrightarrow{p}=\overrightarrow{p}$; $0\cdot\overrightarrow{p}=\overrightarrow{0}$.

შესაძლებელია მოსწავლეებთან ერთად — ერთობლივი ძალისხმევით კოორდინატების საშუალებით ამ თვისებების დასაბუთება — ზოგიერთ მოსწავლეს ამის გაკეთება ჩვენი კომენტარების გარეშეც არ გაუძნელდება.

აქტივობის გაფართოება-გაღრმავება.

აქტივობის გაფართოება-გაღრმავების მიზნით კლასში შეიძლება დაისვას საკონტროლო კითხვები:

1. როგორ განვსაზღვრეთ რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლი?
2. როგორ ვკრებთ ვექტრებს სამკუთხედის წესით?
3. როგორ ვკრებთ ვექტორებს პარალელოგრამის წესით?
4. რას უდრის ვექტორების ჯამის კოორდინატები?
5. რას უდრის ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლის კოორდინატები?

ამის შემდეგ, სასურველია, გაირჩეს **12** ამოცანის სახელმძღვანელოში ჩამოყალიბებული ამოხსნა. შეთავაზეთ მოსწავლეებს მოძებნონ ამ ამოცანის ამოხსნის სხვა გზაც.

აქტივობის განხილვა/შეფასება

მოცემული აქტივობა საშუალებას იძლევა მათემატიკური მეთოდები გამოვიყენოთ პრაქტიკული (მაგალითად, ფიზიკური შინაარსის) ამოცანების ამოხსნისას.

გაკვეთილი 3

აქტივობა: სივრცეში წერტილების, წრფეების, სიბრტყეების განლაგება. (თავი IV, §1)

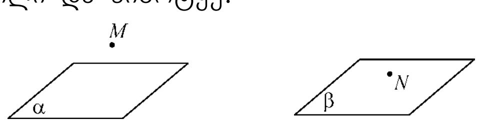
რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან სივრცეში წერტილების, წრფეებისა და სიბრტყეების ურთიერთგანლაგების ყველა შესაძლო შემთხვევას.

აქტივობის მიზანი:

- მოსწავლეთა სივრცული წარმოდგენის განვითარება და სხვადასხვა შემთხვევის შესაბამისი გრაფიკული მოდელების შექმნა;
- წერტილთა, წრფეთა და სიბრტყეთა ურთიერთგანლაგების შემთხვევების კლასიფიცირების უნარის გამომუშავება.

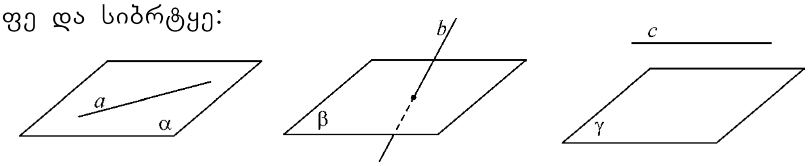
აქტივობის აღწერა**:** მოსწავლეთა უშუალო მონაწილეობით განვიხილავთ სივრცეში წერტილების, წრფეებისა და სიბრტყეების ურთიერთგანლაგების შესაძლო შემთხვევებს.

წერტილი და სიბრტყე:



$M\notin\alpha$ $N\in\beta$

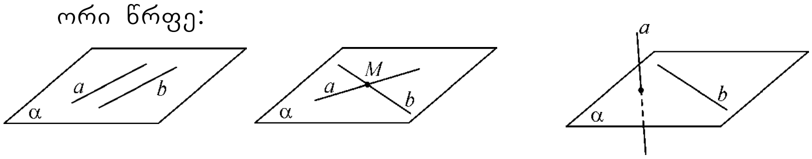
წრფე და სიბრტყე:



$a\subset\alpha$ წრფე და სიბრტყე $c\|\gamma$

იკვეთება

ორი წრფე:



$a \| b$ a და b გადამკვეთი წრფეებია a და b აცდენილი წრფეებია

ორი სიბრტყე:

$\alpha \| \beta$ $\alpha \cap \beta = a$

მნიშვნელოვანია და ხაზგასასმელი, რომ: თუ ორ სიბრტყეს საერთო M წერტილი აქვს, მაშინ მათ აქვს საერთო წრფეც (თანაკვეთის წრფე) — M წერტილზე გამავალი წრფე; ამასთანავე, ამ სიბრტყეთა ყველა საერთო წერტილი თანაკვეთის წრფეს ეკუთვნის. მაშასადამე, თუ $M \in \alpha$, $M \in \beta$, მაშინ არსებობს $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $M \in a$ და, თუ $N \in \alpha$, $N \in \beta$, მაშინ $N \in a$.

კლასის მზაობის შემთხვევაში შეიძლება სამი სიბრტყის ურთიერთგანლაგების სხვადასხვა შემთხვევებიც განვიხილოთ.

აქტივობის გაფართოება გაღრმავება.

აქტივობის გაფართოება-გაღრმავების მიზნით შეიძლება კლასში დაისვას საკონტროლო კითხვები:

1. რა შემთხვევაში ეწოდება ორ წრფეს პარალელური წრფეები?
2. რა შემთხვევაში ეწოდება ორ წრფეს აცდენილი წრფეები?
3. რა შემთხვევაში ეწოდება ორ წრფეს გადამკვეთი წრფეები?
4. რა შემთხვევაში ეწოდება ორ სიბრტყეს პარალელური სიბრტყეები?
5. შეიძლება თუ არა, რომ ორ სიბრტყეს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი ჰქონდეს?
6. შეიძლება თუ არა, რომ წრფესა და სიბრტყეს მხოლოდ ორი საერთო წერტილი ჰქონდეს?
7. რა შემთხვევაში ეწოდება წრფეს სიბრტყის პარალელური?

და შესრულდეს სავარჯიშოები 1-7.

აქტივობის განხილვა-შეფასება

სტერეომეტრიის შესწავლის საწყის ეტაპზე მოცემული აქტივობით მნიშვნელოვანი ამოცანა წყდება — ცოდნისა და უნარების პირველი შედეგების შედარება და სათანადო გრაფიკული წარმოდგენების დემონსტრირება. ეს ყველაფერი მომავალი თეორიული და გამოყენებითი ამოცანების წარმატებული განხილვის საფუძველს ქმნის.

გაკვეთილი 4

აქტივობა: ორწახნაგა კუთხე. ორ სიბრტყეს შორის კუთხე. ორი სიბრტყის მართობულობა. (თავი IV §9)

რეზიუმე: ვაგრძელებთ სიბრტყეთა ურთიერთგანლაგების შემთხვევების შესწავლას. ამჯერად გადამკვეთ სიბრტყეებზე ვამახვილებთ ყურადღებას. განვსაზღვრავთ ორწახნაგა კუთხისა და ორ სიბრტყეს შორის კუთხის ცნებებს. ცალკე გამოვყოფთ ორი სიბრტყის მართობულობის შემთხვევას.

აქტივობის მიზანი:

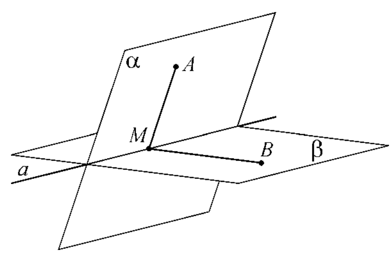
- მოსწავლეთა სივრცული წარმოდგენების შემდგომი განვითარება;
- ორწახნაგა კუთხის ცნების ათვისება;
- სიბრტყეთა შორის კუთხის განსაზღვრების გამოყენების უნარ-ჩვევების განვითარება;
- ამ საკითხთა აქტუალურობის წარმოჩენა;
- ცნებათა განსაზღვრების კვალობაზე მოსწავლეებმა შეძლონ: სათანადო მოდელების მოძიება, შექმნა, გარკვეული ჰიპოთეზების გამოთქმა და მათი ანალიზი.

აუცილებელი წინა ცოდნა:

- სივრცეში წრფეთა და სიბრტყეთა განლაგების შემთხვევების გარჩევა;
- წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ცნებისა და ნიშნის გამოყენების უნარი.

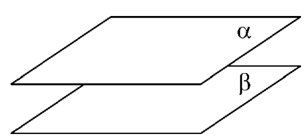
აქტივობის აღწერა:

პარაგრაფს ერთი პრაქტიკული ამოცანის განხილვით ვიწყებთ — როგორ შევამოწმოთ ურთიერთმართობულია თუ არა ოთახის მეზობელი კედლები? შევნიშნოთ, რომ ამ ეტაპზე სიბრტყეთა მართობულობის ცნება ჯერ არ გვაქვს განსაზღვრული და მოსწავლეებთან ერთად გამოვთქვამთ ჰიპოთეზებს, ვაანალიზებთ მათ. მოსწავლეებს ვთავაზობთ დასმული ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთ ხერხს — მისი საფუძვლიანობის საკითხი წარმოადგენს თეორიული მასალის გადმოცემის მოტივაციას.

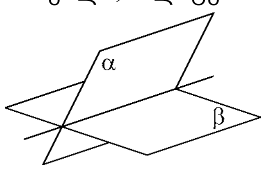


განვსაზღვრეთ გადამკვეთი სიბრტყეებით შექმნილი ორწახნაგა კუთხე და მისი ელემენტები — წიბო და წახნაგები.

ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის განსაზღვრისას მნიშვნელოვანია, რომ ხაზოვანი კუთხის სიდიდე არ არის დამოკიდებული ორწახნაგა კუთხის წიბოზე წერტილის შერჩევაზე.



მოსწავლეებს შევთავაზებთ მათ ხელთ არსებული რესურსებით (წიგნი, რვეული...) წარმოადგინონ ორწახნაგა კუთხის მოდელები „კარგად გააანალიზონ“ შეიძლება თუ არა ორწახნაგა კუთხე იყოს მახვილი, ბლაგვი.



ორ სიბრტყეს შორის კუთხის განსაზღვრისას მნიშვნელოვანია ყველა არსებითი შემთხვევის ცალკე განხილვა:

თუ $\alpha \| \beta$, მაშინ მათ შორის კუთხის სიდიდე 0-ია.

თუ α და β იკვეთება, მაშინ მათ შორის კუთხის ზომაა გადაკვეთისას მიღებული ორწახნაგა კუთხეების ზომებიდან უმცირესი — ცხადია, ეს კუთხე 90^0-ს არ აღემატება.

ცალკე გამოვყოფთ შემთხვევას, როცა სიბრტყეებს შორის კუთხე 90^0-ია — ამ შემთხვევაში სიბრტყეებს მართობულ სიბრტყეებს ვუწოდებთ. განვიხილავთ სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანსაც — თუ ერთ-ერთი სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები მართობული სიბრტყეებია.

აქტივობის გაფართოება-გაღრმავება.

მიღებული ინფორმაციის განმტკიცებისა და სივრცული წარმოდგენების შემდგომი განვითარების მიზნით შესაძლებლად მიგვაჩნია პარაგრაფის თეორიულ ნაწილში მოწოდებული დებულების — ორწახნაგა კუთხის სიდიდე არ არის დამოკიდებული ამ კუთხის წიბოზე წერტილის შერჩევაზე — დამტკიცება.

აუცილებლად მიგვაჩნია ტესტური ტიპის ამოცანების პასუხის შერჩევისას მოსწავლეებს (ამ პარაგრაფში მაინც) მოვთხოვოთ არჩევანის დასაბუთება.

აქტივობის განხილვა/შეფასება.

მოცემული აქტივობა ერთ-ერთი საკვანძო ეტაპია მოსწავლეებში მკაფიო სივრცული წარმოდგენების ჩამოყალიბებისა და ამ საკითხთა ცოდნის შემდგომი გაღრმავების გზაზე. ამ აქტივობას წმინდა თეორიული მნიშვნელობის გარდა უაღრესად აქტუალური გამოყენებითი მხარეც აქვს. ეს ფაქტორი სწავლების ახალი ფორმების ძიებასა და მათ სათანადო, მრავალმხრივ გააზრებას მოითხოვს. მოსწავლეთა მიერ მოძიებული მოდელების მრავალფეროვნება, მათი ინიციატივა, გამოთქმული ჰიპოთეზების ანალიზი საუკეთესო ინდიკატორია სწორად წარმართული პროცესისა.

გაკვეთილი 5

აქტივობა: მარტივი და რთული პროცენტის დარიცხვის წესები. მაჩვენებლიანი ფუნქცია. (თავი V, §1)

რეზიუმე: ვიხილავთ ბანკში ანაბარზე სარგებლის დარიცხვის ორ წესს — მარტივი პროცენტისა და რთული პროცენტის დარიცხვის წესებს. ამ ორი წესის მიხედვით შედგენილი ზოგადი ფორმულების შესწავლა-შედარებით გადავდივართ ახალი ფუნქციის — მაჩვენებლიანი ფუნქციის შესწავლაზე.

აქტივობის მიზანი:

- მოსწავლეთა გარკვევა ბანკში ანაბარზე სარგებლის (დივიდენდის) დარიცხვის ზოგიერთ წესში.
- სარგებლის დარიცხვის სხვადასხვა წესს შორის არჩევანის გაკეთებისას სწორი ანალიზის უნარის გამომუშავება.
- სხვადასხვა ბანკის მიერ შემოთავაზებული წინადადებების შედარებითი ანალიზის უნარ-ჩვევების გამომუშავება.
- კერძო შემთხვევის განზოგადების ჩვევების გამომუშავება — $y=2^x$ ფუნქციის თვისებების შესწავლის საფუძველზე გამოვთქვამთ ვარაუდებს და ვაკეთებთ დასკვნებს $y=a^x$, $a>1$, ფუნქციის თვისებების შესახებ. შემდგომ კი, შედარების მეთოდის გამოყენებით, ვახასიათებთ $y=a^x$, $0<a<1$, ფუნქციასაც.

აუცილებელი წინა ცოდნა:

- რიცხვის პროცენტის გამოთვლა.
- ფუნქციის თვისებების გარჩევა. კერძოდ, მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ფუნქციის ზრდადობა-კლებადობის შემოწმება; საკოორდინატო ღერძებთან გრაფიკის გადაკვეთის წერტილების დადგენა.
- ინდუქციური მსჯელობის ელემენტარული ჩვევები.

აქტივობის აღწერა: სასურველია მასწავლებელმა წინასწარ მოამზადოს სკოლასთან უახლოესი ან რაიმე სხვა ბანკის (ან ბანკების) რამდენიმე სარეკლამო პროსპექტი და სარგებლის დარიცხვის სხვადასხვა წესის აღწერა ამ თვალსაჩინო მასალის დახმარებით აწარმოოს. მნიშვნელოვანია, რომ მოსწავლეებმა იგრძნონ თემის აქტუალურობა. ამ შემთხვევაში მასალის გაცნობა კლასის აქტიური მონაწილეობით გაგრძელდება.

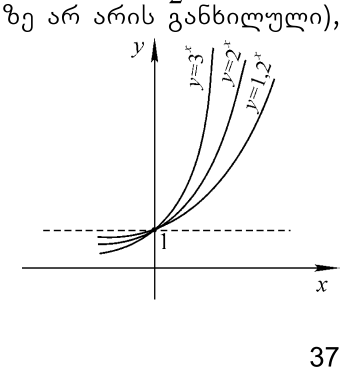
მოსწავლეებს წარვუდგენთ სარგებლის დარიცხვის ორ წესს — მარტივი პროცენტის, ვთქვათ, წლიური 10%-იანი სარგებლის დარიცხვის წესსა და რთული პროცენტის, ვთქვათ, 9%-იანი სარგებლის წესს. მოსწავლეთა უშუალო მონაწილეობით შევავსებთ ცხრილს (ვიყენებთ კალკულატორებს):

ვთქვათ, ბანკში შეტანილია 100 ლარი.

n	***n*** წლის შემდეგ მიღებული სარგებელი (ლარებში)	
	მარტივი პროცენტის დარიცხვის წესის შემთხვევაში	რთული პროცენტის დარიცხვის შემთხვევაში
1	10	9
2	20	18,81
3	30	≈ 29,50
4	40	≈ 41,16

ცხრილის გაანალიზების შემდეგ (მოსწავლეთა ყურადღებას ვამახვილებთ სარგებლის ზრდის განსხვავებულ „სიჩქარეებზე“) განვიხილავთ ზოგად შემთხვევას — დარიცხვას r ნაწილით და ვიშველიებთ სახელმძღვანელოში მოყვანილ ცხრილს (ნაწილი II, გვ. 99). ამ გზით დავასკვნით — მარტივი პროცენტის დარიცხვის შემთხვევაში სარგებელთა მიმდევრობა (წლების მატებისას) ქმნის არითმეტიკულ პროგრესიას, რთული პროცენტის დარიცხვის შემთხვევაში — გეომეტრიულ პროგრესიას. ამ მიმდევრობათა n-ური წევრის ფორმულებია, შესაბამისად, $P_n=P(1+rn)$ და $P_n=P(1+r)^n$.

კვლავ მოვიშველიოთ სახელმძღვანელო და გავარჩიოთ მე-100 გვერდზე მოცემული ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე აგებული $y=1+x$ და $y=2^x$ ფუნქციათა გრაფიკები — ვამახვილებთ მოსწავლეთა ყურადღებას $y=2^x$ ფუნქციის ზრდის მაღალ „სიჩქარეზე“ $y=1+x$ ფუნქციასთან შედარებით. შეთავაზეთ მოსწავლეებს გამოთქვან ვარაუდი $x=\dfrac{1}{2}$ წერტილში ამ ორი ფუნქციის მნიშვნელობათა შესახებ (ეს წერტილი გრაფიკზე არ არის განხილული), შეადარონ ეს მნიშვნელობები; იგივე კითხვის დასმა მიზანშეწონილია $x=0$ შემთხვევაშიც.



ვაზოგადებთ შემჩნეულ თვისებებს და ვიშველიებთ სახელმძღვანელოს 101-ე გვერდზე წარმოდგენილ გრაფიკებს:

დავასკვნით: $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$) ფუნქციას, რომელსაც მაჩვენებლიან ფუნქციას ვუწოდებთ, აქვს შემდეგი თვისებები (დავასახელებთ

მხოლოდ რამოდენიმე თვისებას) — ა) განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლე; ბ) მნიშვნელობათა არეა დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე; გ) ფუნქცია ზრდადია; დ) ფუნქციის გრაფიკი ორდინატთა ღერძს (0; 1) წერტილში კვეთს.

შევთავაზოთ მოსწავლეებს შეადარონ $y=2^x$ და $g=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ფუნქციები. მოსწავლეთა პასუხებში უთუოდ აისახება ამ ფუნქციათა ძირითადი თვისებები. შესაძლებელია, ზოგჯერ ჩვენც ჩავრთოთ შეკითხვები:

— შეადარეთ $y(0)$ და $g(0)$;

— შეადარეთ $y(x)$ და $g(x)$, როცა $x>0$;

— შეადარეთ $y(x)$ და $g(x)$, როცა $x<0$;

— შეადარეთ $y(x)$ და $g(-x)$, არის თუ არა ამ ფუნქციათა გრაფიკები ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიული?

მოსწავლეთა ვარაუდის განხილვისა და შემოწმების დროს სახელმძღვანელოს 102-ე გვერდზე წარმოდგენილი გრაფიკებიც დაიხმარეთ. თუ განვაზოგადებთ ამ შედეგებს, მივიღებთ $y=a^x$, $0<a<1$, ფუნქციის

ა) განსაზღვრის არეა $\mathbf{R}$ სიმრავლე;

ბ) მნიშვნელობათა არეა დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;

გ) ფუნქციის გრაფიკი კვეთს ორდინატთა ღერძს (0; 1) წერტილში.

დ) თუ $x<0$, მაშინ $y>1$; თუ $x>0$, მაშინ $y<1$.

ე) ფუნქცია კლებადია.

აქტივობის გაფართოება-გაღრმავება:

მიღებული ინფორმაციის განმტკიცებისა და გამოყენების ჩვევების გამომუშავების მიზნით სასურველია მოსწავლეები გაეცნონ ს („სხვადასხვა“) ნაწილში მოწოდებულ მასალას, უპასუხონ საკონტროლო კითხვებს და შეასრულონ შეთავაზებული სავარჯიშოები, რომელთა ოდენობა ამჯერად განსაკუთრებით დიდია.

სასურველია მოსწავლეთა ნაწილი მაინც დაკავდეს პარაგრაფის ბოლოს მოცემულ თემაზე პროექტის (რეფერატის) მომზადებით.

აქტივობის განხილვა-შეფასება:

მოცემული აქტივობა ერთ-ერთი საკვანძო ეტაპია მოსწავლეთა მათემატიკური განათლების გზაზე. ამ ფუნქციების შესწავლით მოსწავლეები მნიშვნელოვან გამოცდილებას იძენენ, საზოგადოდ, ფუნქციათა შესწავლა-გამოკვლევის რეალიზებაში. ამ აქტივობას, წმინდა თეორიული მნიშვნელობის გარდა, უაღრესად აქტუალური გამოყენებითი მხარეც აქვს. ეს ფაქტორი განსაკუთრებით მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია.

I თავი.

გამეორება. დასაბუთების ხერხები. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

I თავს X კლასში შესწავლილი საკითხების გამეორებით ვიწყებთ. შემზადების („მოთელვის“) პროცესი თეორიულ-სიმრავლური ცნებების, ტერმინებისა და აღნიშვნების გამეორებასთან ერთად დასაბუთების ხერხების გახსენებასაც გულისხმობს. ეს უკანასკნელი რაციონალური რიცხვების სიმრავლის გაფართოების მომენტებთან არის დაკავშირებული. მასწავლებლებს შევახსენებთ რიცხვის ცნების გაფართოების იმ სქემებს, რომელიც საშუალო სკოლაში ხორციელდება:

არაუარყოფითი მთელი რიცხვები $\rightarrow$ არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვები $\rightarrow$ რაციონალური რიცხვები $\rightarrow$ ნამდვილი რიცხვები. უკანასკნელი გადასვლის თეორიული საფუძვლების გაცნობა მე-10 კლასში დავიწყეთ; თუმცა, XI კლასის შედეგებისა და ინდიკატორების ჩამონათვალში საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხის ერთ-ერთ გამოყენებად $\sqrt{2}$-ის ირაციონალურობის დასაბუთებაა მოყვანილი.

ეს საკითხი პირველ პარაგრაფში დაწვრილებითაა გარჩეული. I თავში დიდი ყურადღება ეთმობა ირაციონალური რიცხვების მაგალითების გარჩევას, ირაციონალური რიცხვების სხვადასხვა წარმოდგენებს — გეომეტრიული, რაციონალური რიცხვების მიმდევრობით.

I თავის მნიშვნელოვანი საკითხი მათემატიკური ინდუქციის მეთოდია. მასწავლებლებს ვურჩევთ გაეცნონ VIII კლასის მასწავლებლის სარეკომენდაციო წიგნს და იქ მითითებულ ლიტერატურას რიცხვის ცნების გაფართოებისა და მათემატიკური ინდუქციის საფუძვლის — ინდუქციის აქსიომის შესახებ. ინდუქციის აქსიომა ასეა ჩამოყალიბებული (IV აქსიომა ნატურალურ რიცხვთა აქსიომური (პეანოს) დაფუძნებისას): **N**-ის (ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის) ყოველი ქვესიმრავლე, რომელშიც შედის 1 და ყოველ x-თან ერთად შედის მისი მომდევნო ნატურალური რიცხვი, **N**-ს ემთხვევა.

ამ აქსიომაზე დაყრდნობით ვასაბუთებთ: თუ $P(n)$, $(n \in N)$ წინადადება ჭეშმარიტია, როცა $a=1$ და იმ დაშვებით, რომ $P(n)$ ჭეშმარიტია $n=k$-სთვის, მიიღება $P(n)$-ის ჭეშმარიტობა $n=k+1$-თვის, მაშინ $P(n)$ ჭეშმარიტია ნებისმიერი n-ისთვის. მართლაც, ვთქვათ, A არის იმ n რიცხვების სიმრავლე, რომლისთვისაც A ჭეშმარიტია. მაშინ $1 \in A$ და ყოველი k-სთვის, რომელიც შედის A-ში, მისი მომდევნოც შედის A-ში. IV აქსიომის თანახმად, $A=N$.

ამ საკითხებთან დაკავშირებით წიგნის ბოლოს მითითებულ წიგნებთან ერთად შეიძლება დაგისახელოთ: *Математика в школе*, 1975, 1; კოლმოგოროვისა და როდოსკის სტატიები ნამდვილი რიცხვების აგებისა და მათემატიკური ინდუქციის განზოგადებების შესახებ); *http.www.math.ru*, *Библиотека „Математическое просвещение“*, *В. М. Тихомиров*, *Дифференциальное исчисление* (*теория и приложения*).

I თავის ერთ-ერთ პარაგრაფს გრაფების გამოყენების მაგალითებს ვუთმობთ. ეროვნული სასწავლო გეგმის მოთხოვნების შესაბამისად, გადმოცემულია გრაფების გამოყენების მაგალითები ვარიანტებისა და გეგმის შედგენისა და ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოხსნისას.

http.www.mccme.ru — ამ მისამართზე შეგიძლიათ კვანტის ბიბლიოთეკას გადახედოთ და იქ მრავალ საინტერესო სტატიას იპოვით, რომლებიც გრაფებსა და მათ გამოყენებებს ეძღვნება. მაგალითად, ბოლტიანსკის ერთი სტატია სხვადასხვა ნომერში მეორდება კიდეც (1981.06; 2005 წ. 01).

საინტერესოა სტატია ლოგიკის ელემენტების შესახებ მათთვის, ვისაც პოლიტიკა აინტერესებს — კვანტი, 1995.03 — *Логика и парламент* — აქ ინდუქციასაც შეხვდებით, საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდსაც და დასაბუთების სხვა მეთოდებსაც. e რიცხვის საინტერესო თვისებების გაეცნობით სტატიებში — კვანტი; 1984.10; 1978,08.

2011-2016 წლების სასწავლო გეგმით შედგენილი ახალი სახელმძღვანელო განსხვავდება XI კლასის წინა სახელმძღვანელოებისგან. ეროვნული სასწავლო გეგმის მოთხოვნებთან მეტი შესაბამისობის მიზნით ვიზრუნეთ იმაზე, რომ წიგნი უფრო მისაწვდომი იყოს მოსწავლეებისთვის. მაგალითად, ამოღებულია მათემატიკური ინდუქციის სხვადასხვა ფორმის გამოყენების ნიმუშები, რიცხვითი მიმდევრობის ზღვართან დაკავშირებული საკითხები, ნეპერის რიცხვი. მათ ნაცვლად I თავში გადმოვიტანეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განხილვა, დავამატეთ უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის ფორმულების გამოყვანა.

I თავის მასალაში შეტანილი ეს ცვლილებები მასწავლებელთა მოსაზრებების გათვალისწინებითაც არის გამოწვეული. შედარებით გავამარტივეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გადმოცემა. არ შეიძლება არ დავეთანხმოთ ამ საკითხში ა. კოლმოგოროვს [21]: „მათემატიკურ დებულებათა ლოგიკური სტრუქტურის გაგების საკითხში ყველაზე მეტ სირთულეს სკოლაში მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენება იწვევს. დებულებათა აზრის გაგება აქ იხლართება სხვადასხვა „თუ“, „მაშინ“ სიტყვების მრავალ გამოყენებაში, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გაგება და გამოყენება განსწავლულობის კარგი კრიტერიუმია“. ამ მეთოდის ილუსტრირება ახალი ეროვნული სასწავლო გეგმის მიხედვით რეკურენტული მიმდევრობის n-ური წევრი ფორმულის გამოყვანას უკავშირდება; ჩვენც ვცდილობთ, ძირითადად, ეს საკითხები განვიხილოთ.

ამავე თავში წარმოდგენილია გეომეტრიული გარდაქმნების თვისებების შემდგომი განხილვა — ამ თემის გაცნობა დაწყებითი და საბაზო საფეხურის კლასებში იწყება. ამჯერად ვაჯამებთ ჩვენს ცოდნას ამ მიმართულებით, აღმოვაჩენთ ახალ თვისებებს, შეძენილ ცოდნას კოორდინატებისა და ვექტორების შესახებ ვუკავშირებთ მასალის გადმოცემის მეთოდიკას, ვემზადებით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განხილვისა და მისი თვისებების შესასწავლად (მაგალითად, მობრუნების გამეორება, თვისებების შესწავლა უკავშირდება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შემოღებას).

1.1 სიმრავლე. რიცხვითი სიმრავლეები

მიზანი. რიცხვითი სიმრავლეებისა და მათ შორის მიმართებების გამეორება და ცოდნის გაღრმავება. რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა წარმოდგენებს შორის განსხვავების გააზრება. საწინააღმდეგოს დაშვებით დებულებათა დამტკიცების გამოყენება.

ამ პარაგრაფში ძირითადი აქცენტი რიცხვით სიმრავლეებზე კეთდება. თუმცა გაკვეთილი შეიძლება დავიწყოთ სიმრავლის, სიმრავლეებზე მოქმედებებისა და მათ შორის მიმართებების განხილვით. განსაკუთრებულ ყურადღებას ვუთმობთ ქვესიმრავლის ცნების გამეორებას და შესაბამისი მიმართების გააზრებას. ამას მოსდევს რიცხვითი სიმრავლეების (N, Z, Q, R) ჩამოთვლა და მათ შორის მიმართებების ჩაწერა. ეს ყველაფერი მოსწავლეების უშუალო მონაწილეობით უნდა კეთდებოდეს. ვაზუსტებთ მოსწავლეთა წარმოდგენებს რაციონალური რიცხვების ჩაწერის ხერხების შესახებ (წილადი, ათწილადი, უსასრულო პერიოდული ათწილადი). შეიძლება მოსწავლეებთან ერთად ვიმსჯელოთ საკითხებზე — რატომ შეიძლება ყოველი რაციონალური რიცხვის ჩაწერა პერიოდული ათწილადით (აქ შედის 0-ის ტოლი პერიოდის მქონე, ანუ სასრულო ათწილადებიც), რასთან არის ეს დაკავშირებული.

საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდსაც მოსწავლეები თვითონ იხსენებენ — დავუშვებთ, რომ დებულება, რომელსაც ვამტკიცებთ, მცდარია. თუ ასეთი დაშვებიდან მსჯელობით მივალთ პირობის, ან რაიმე ჭეშმარიტი ფაქტის უარყოფამდე, მაშინ დავასკვნით, რომ ჩვენი დაშვება მცდარია, ანუ მოცემული დებულება ჭეშმარიტია; ხშირად ამბობენ ხოლმე — საწინააღმდეგოს დაშვებამ აბსურდამდე მიგვიყვანა.

ამის შემდეგ ვუბრუნდებით ირაციონალური რიცხვების განხილვას — ვასაბუთებთ, რომ $\sqrt{2}$ არ არის რაციონალური რიცხვი და წარმოდგენილი უსასრულო ათწილადები არაპერიოდული ათწილადებია — არსებობს (პერიოდული ათწილადების გარდა) არაპერიოდული ათწილადებიც, ამ ათწილადებით ირაციონალური რიცხვები მოიცემა.

აქვე მოსწავლეების მონაწილეობით მტკიცდება ბერნულის უტოლობა.

პარაგრაფის განხილვას შეიძლება 4 გაკვეთილი დავუთმოთ:

I გაკვეთილი — პირველი შეხვედრა საზაფხულო არდადეგების შემდეგ, შეიძლება დავიწყოთ სიმრავლეთა თეორიის რამდენიმე საკითხის განხილვით.

II გაკვეთილი, რიცხვითი სიმრავლეები, მათ შორის მიმართებები.

III გაკვეთილი — საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი.

IV გაკვეთილი — ცოდნის განმტკიცება, ამოცანების ამოხსნა.

პასუხები და მითითებები:

5 (15+21) — ჯამში ორივე ფერის ფანქრების მფლობელები ორჯერ არიან ჩათვლილი, ამიტომ მათი ოდენობაა

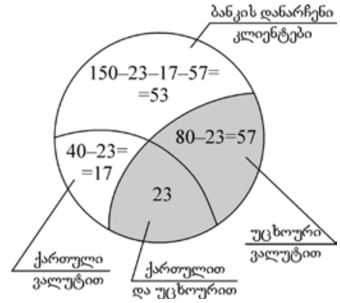
$$15+21-26=10.$$

6 მხოლოდ ორი სუვენირი შეუძენია $21-7=14$ ტურისტს, მხოლოდ სამი, შესაბამისად, $29-14=15$ ტურისტს.

ტურისტთა საერთო ოდენობაა: $7+14+15=36$.

7 სულ მცირე: $(15+17)-28=4$ — ეს ის შემთხვევაა, როცა ჯოგის თითოეული ძროხა ან ჭრელია, ან მეწველი მაინც. განიხილეთ სხვა შემთხვევებიც.

8 ამოცანის მოცემულობა ვენის დიაგრამის საშუალებით გამოვსახოთ.

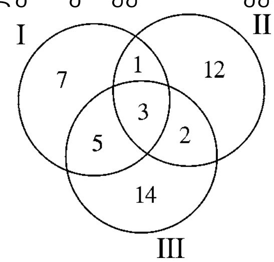


ა) 57;

ბ) 17;

გ) 53.

9 ამოცანის მოცემულობა ვენის დიაგრამით გამოვსახოთ (განხილვას ვიწყებთ სამივე სახეობაში მონაწილეთაგან, შემდეგ ორ-ორ სახეობაში და ბოლოს თითო სახეობაში მონაწილეთა რიცხვს დავადგენთ). მივიღებთ:

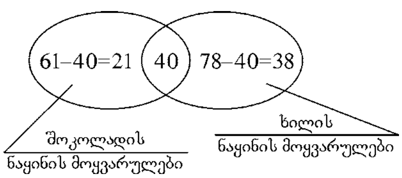


ა) 50–(7+1+12+5+3+2+14)=50-44=6;

ბ) 1; გ) 7.

დ) 14; ე) 37.

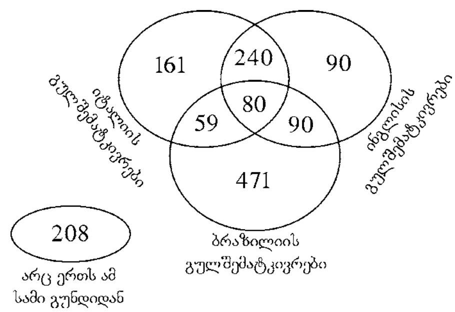
10 ვენის დიაგრამიდან ცხადია, რომ მხოლოდ შოკოლადის ნაყინი 21 თანამშრომელს უყვარს, მხოლოდ ხილის ნაყინი — 38-ს. ნაყინის მოყვარულთა საერთო ოდენობაა:



$$21+40+38=99\neq 100.$$

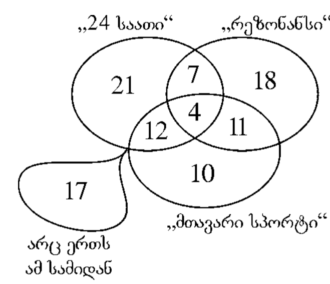
ამრიგად, გამოკითხვის შედეგები სწორად არ არის აღრიცხული.

11 დიაგრამის საშუალებით დავადგენთ:



- 471;
- 1191;
- 208+161+90+471=930;
- 59;
- 161+59+471=852.

12 დიაგრამის სახით გამოვსახოთ ამოცანის პირობა და მივიღებთ:



- 17;
- 18;
- 21+7+18+12+4+11=73;
- 21+7+18=46.

13 ვთქვათ, მოცემულია ორი რაციონალური რიცხვი — a და b, ამასთანავე, $a<b$. რაციონალური რიცხვების ჯამი რაციონალური რიცხვია, ამიტომ $\frac{a+b}{2}$ — რაციონალური რიცხვია. გვექნება:

$$a<\frac{a+b}{2}<b. \qquad a<\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}<\frac{a+b}{2}<\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}<b$$

და ა.შ. მაშასადამე, a-სა და b-ს შორის უამრავი რაციონალური რიცხვია.

14 ასეთი რიცხვია 0,(8).

15 ასეთი რიცხვია 7,63.

16 დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $m^2=5n$ და m არ არის 5-ის ჯერადი. მაშინ $m=5k+r$, სადაც $r=1$, 2, 3 ან 4. გვექნება

$$5n=25k^2+5\cdot 2kr+r^2; \qquad 5(n-5k^2-2kr)=r^2.$$

მაშინ, 5 გამყოფია r^2-ის.

17 დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $\sqrt{5}$ რაციონალური რიცხვია; მაშინ არსებობს უკვეცი $\frac{m}{n}$ წილადი, ისეთი, რომ $5=\frac{m^2}{n^2}$, $m^2=5n^2$.

რადგან m^2 იყოფა 5-ზე, ამიტომ (ამოცანა 16-ის შედეგის თანახმად) m არის 5-ის ჯერადი — $m=5m_1$, $(5m_1)^2=5n^2$,

$$5m_1^{\,2}=n^2.$$

მაშასადამე, n-იც 5-ის ჯერადია — $n=5n_1$. მაშასადამე, $\frac{m}{n}=\frac{5m_1}{5n_1}$ არ ყოფილა უკვეცი წილადი. მივიღეთ წინააღმდეგობა. $\sqrt{5}$ ირაციონალური რიცხვია.

18 დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ რაციონალური რიცხვია; მაშინ $\sqrt{5}-1=2r$, $\sqrt{5}=2r+1$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, რადგან $\sqrt{5}$ არ არის რაციონალური რიცხვი, $2r+1$ კი რაციონალურია. ამრიგად, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ირაციონალური რიცხვია.

19 **მითითება:** გამოიყენეთ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი.

20 ა) $1{,}02<1{,}0234107...<1{,}03$

ჭეშმარიტი უტოლობაა;

ბ) $1{,}0234107...<1{,}03$

ჭეშმარიტი უტოლობაა;

გ) $1{,}0234107...>1{,}0234107$

ჭეშმარიტობისა ან მცდარობის დასადგენად ინფორმაცია საკმარისი არ არის;

დ) $1{,}0234107...<1{,}0235106...$

ჭეშმარიტი უტოლობაა;

ე) $1{,}0234107...+1{,}0235106... \leq 2{,}046922<2{,}048$

ჭეშმარიტი უტოლობაა;

ვ) $1{,}0234107...+1{,}0235106...>2{,}0469>2{,}046$

ამიტომ $x+y<2{,}046$ მცდარი უტოლობაა.

21 ა) $\frac{5}{8}=0{,}625$; ბ) $\frac{1}{3}=0{,}(3)$; გ) $\frac{41}{333}=0{,}(123)$;
დ) $\frac{6}{11}=0{,}(54)$; ე) $\frac{4}{23}=0{,}173913...$

თუ კალკულატორის ეკრანზე მხოლოდ რვა ციფრი გამოისახება, ზოგიერთი რაციონალური რიცხვის პერიოდს ვერ მიუთითებთ, როგორც, მაგალითად, ე) — შემთხვევაში.

22 მოცემულია — $b\in\mathbf{Q}$, $a\in\mathbf{I}$.

ა) ab — შეიძლება იყოს რაციონალური. მაგალითად, თუ $b=0$, მაშინ $0\cdot a=0\in\mathbf{Q}$; თუ $b\neq0$, მაშინ ab ირაციონალურია.

ბ) $\sqrt{a+b}$ — არ შეიძლება იყოს რაციონალური. მართლაც, ვთქვათ,

$\sqrt{a+b}$ — რაციონალურია.

მაშინ $a+b=r^2$ — რაციონალურია,

$a=r^2-b$ — რაციონალურია.

რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

ამრიგად, $\sqrt{a+b}$ ირაციონალურია;

გ) $a+\sqrt{b}$ — შეიძლება იყოს რაციონალური; მაგალითად, თუ $a=1-\sqrt{2}$ და $b=2$, მაშინ

$$a+\sqrt{b}=1-\sqrt{2}+\sqrt{2}=1\in\mathbf{Q};$$

დ) $\sqrt{a}+b$ — არ შეიძლება იყოს რაციონალური; მართლაც, ვთქვათ,

$\sqrt{a}+b=r$, — რაციონალურია,

მაშინ $\sqrt{a}=r-b$

$a=(r-b)^2\in\mathbf{Q}$

ეს კი პირობას ეწინააღმდეგება; მაშასადამე, $\sqrt{a}+b\in\mathbf{I}$.

23 ასეთი რიცხვებია $\sqrt{3}-0{,}003$ და $\sqrt{3}+0{,}003$ — ორივე რიცხვი ირაციონალურია.

24 ა) შეიძლება იყოს რაციონალური; მაგალითად,

$$(3-\sqrt{5})+(\sqrt{5})=3\in\mathbf{Q};$$

ბ) შეიძლება იყოს რაციონალური; მაგალითად,

$$(-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}=-3\in\mathbf{Q};$$

გ) შეიძლება; მაგალითად,

$$\sqrt{(9-\sqrt{2})+(\sqrt{2})}=\sqrt{9}=3\in\mathbf{Q};$$

დ) შეიძლება; მაგალითად,

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}=1\in\mathbf{Q}.$$

25 $-10<\sqrt[4]{2}<10$ $\qquad -\frac{10}{1000}<\frac{\sqrt[4]{2}}{1000}<\frac{10}{1000}$

$-0{,}01<\sqrt[4]{2}\cdot10^{-3}<0{,}01$, ამასთანავე, $(\sqrt[4]{2}\cdot10^{-3})^2=\sqrt{2}\cdot10^{-6}\in\mathbf{I}$.

სხვა რიცხვები შეიძლება ასეც ვიპოვოთ:

$a=(-0{,}01+\sqrt[4]{2}\cdot10^{-3}):2$; $\qquad b=(0{,}01-\sqrt[4]{2}\cdot10^{-3}):2$.

26 $0<\sqrt{2}<10$, $\qquad 0<\sqrt{2}\cdot10^{-4}<10^{-3}$,

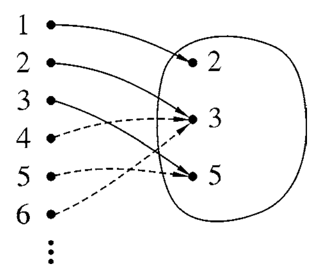
მაშასადამე, $1{,}3+\sqrt{2}\cdot10^{-4}$ განსხვავდება 1,3-ისგან $\sqrt{2}\cdot10^{-4}$-ით, რაც არაუმეტეს 10^{-3}-ია. განვიხილოთ ნებისმიერი $n\in\mathbf{N}$, მაშინ

$$0<\frac{\sqrt{2}\cdot10^{-4}}{n}<\sqrt{2}\cdot10^{-4}<10^{-3},$$

ამიტომ საძიებელ რიცხვად გამოდგება $\left(1{,}3+\frac{\sqrt{2}\cdot10^{-4}}{n}\right)$-იც.

27 დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $M{,}a_1a_2...a_n010110111...$ პერიოდული ათწილადია და მისი პერიოდი k ციფრისგან შედგება. მაშინ პერიოდში ერთი მაინც ნულია. განვიხილოთ ათწილადის ჩაწერისას გამოყენებული კანონზომიერების $(k+1)$-ე ბიჯი — მორიგი ნულის შემდეგ $k+1$ ერთიანი წერია, ანუ $k+1$ „სიგრძის მონაკვეთი“ ნულს არ შეიცავს, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, მოცემული ათწილადი არაპერიოდულია.

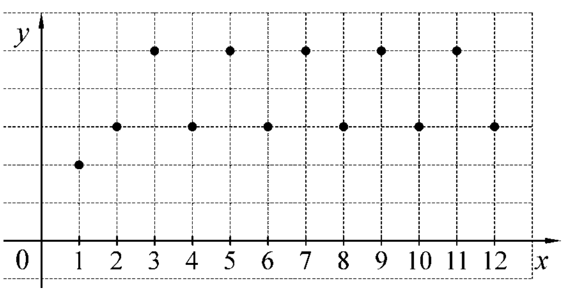
28 ფუნქცია შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:



ან ასე

$$f(n)=\begin{cases}2, & \text{თუ } n=1\\ 3, & \text{თუ } n=2k,\ k\in\mathbf{N}\\ 5, & \text{თუ } n=2k+1,\ k\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

ახლა შეგვიძლია ვუპასუხოთ შეკითხვებს:



- N;
- $\{2;\ 3;\ 5\}$;
- f-ის უდიდესი მნიშვნელობაა 5 და f იღებს მას მაშინ, როცა $n=2k+1,\ k\in\mathbf{N}$.

29 მაგალითად, დავამტკიცოთ ა) დებულების შებრუნებული დებულება: თუ სამკუთხედის რომელიმე კუთხის მოპირდაპირე გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია, მაშინ ეს კუთხე მართია.

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო — ვთქვათ, ეს კუთხე არ არის მართი, მაშინ ის ან მახვილია, ან ბლაგვი. მივიღეთ წინააღმდეგობა, შესაბამისად, ბ) და გ) დებულებებთან.

30 ა) 4; ბ) 10.

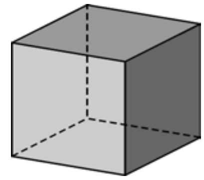
31 მოიძებნება. მართლაც, დავუშვათ, რომ თითოეულ თვეში ამ მოსწავლეთაგან არაუმეტს სამი მოსწავლეა დაბადებული, მაშინ არაუმეტეს $12\cdot3=36$ მოსწავლე უნდა გვყავდეს. კლასში კი 37 მოსწავლეა — დაშვება მცდარია.

32 ა) 37-ზე მეტი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვით;
ბ) 37-ზე ნაკლები ნებისმიერი ნატურალური რიცხვით.

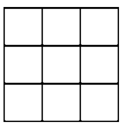
33 ნებისმიერ სამ ნატურალურ რიცხვს შორის ან ორი მაინც კენტია ან ორი მაინც ლუწია. ორი კენტი რიცხვის ჯამიც ლუწია და ორი ლუწი რიცხვის ჯამიც ლუწია.

34 არ შეიძლება — ყოველი წვერო სამ წახნაგს ეკუთვნის, რომელთაც წყვილ-წყვილად საერთო წიბო აქვს და, ამრიგად, მეზობელი წახნაგები არიან. ორი ფერით კი სამი წახნაგის სხვადასხვა ფერად შეღებვა შეუძლებელია.

35 შეიძლება — მოპირდაპირე წახნაგები ერთი ფერით შეიღებოს, მეზობელი — სხვადასხვათი:



36 სურათზე ნაჩვენები მეთოდით მოცემული კვადრატი დავყოთ ერთეულოვანი სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატებად — მიიღება ცხრა კვადრატი. შეუძლებელია ამ ცხრა



კვადრატში ათი წერტილის ისე განაწილება, რომ ერთში მაინც არ მოხვდეს ერთზე მეტი წერტილი. ამრიგად, მოიძებნება კვადრატი, რომელშიც მოცემული წერტილებიდან ორი მაინცაა მოთავსებული.

37 შეიძლება შეირჩეს კვადრატი, რომლის გვერდი 4 სმ-ია და მასში განლაგდეს 17 (ან მეტი) ოდენობის წერტილი.

38* სტუმრებისთვის „გავშალოთ“ 30 კარავი. მათი ნომრები იყოს: 0, 1, 2, ... , 29. ყოველი სტუმარი მოვათავსოთ იმ ნომრიან კარავში, რამდენი ნაცნობიც მას ჰყავს (თუ ნაცნობი არ ჰყავს, ის აღმოჩნდება „0“ კარავში).

საკმარისია ორი შემთხვევის განხილვა:

1) „0“ კარავი ცარიელია. მაშინ 30 სტუმარი განაწილებულია 29 კარავში და ცხადია, ერთ-ერთში აღმოჩნდება 2 სტუმარი მაინც (წინააღმდეგ შემთხვევაში სტუმართა ოდენობა 30-ზე ნაკლები იქნება). რაც ნიშნავს, რომ მათ ერთი და იმავე ოდენობის ნაცნობები ჰყავთ.

2) „0“ კარავი ცარიელი არ არის. მაშინ სტუმრებს შორის ერთ-ერთს მაინც ერთი ნაცნობიც კი არ ჰყოლია. რადგან არც სხვები ცნობენ მას, ცარიელი აღმოჩნდება კარავი ნომრით „29“. ამჯერადაც, დანარჩენი კარვებიდან ერთ-ერთში აღმოჩნდება 2 სტუმარი მაინც.

ამოცანები ჯგუფური მუშაობისთვის

1 გავითვალისწინოთ, რომ $\sqrt{2}=1{,}4142135...$ და $\sqrt{3}=1{,}7320508...$

ცხადია $1{,}5>\sqrt{2}$. ამიტომ, ნებისმიერი n-სთვის,

$1{,}5+10^{-n}>\sqrt{2}$.

$1{,}5+10^{-1}<1{,}7<\sqrt{3}$. მით უმეტეს,

$1{,}5+10^{-n}<\sqrt{3}$, ნებისმიერი n-ისთვის.

ამრიგად, ნებისმიერი n-ისთვის,

$\sqrt{2}<1{,}5+10^{-n}<\sqrt{3}$, ანუ $(1{,}5+10^{-n})\in[\sqrt{2};\sqrt{3}]$.

ცხადია $\sqrt{2}<\sqrt{2}+10^{-n}$, ნებისმიერი n-ისთვის.

$\sqrt{2}+10^{-1}<1{,}7<\sqrt{3}$. მით უმეტეს,

$\sqrt{2}+10^{-n}<\sqrt{3}$. ამრიგად, ნებისმიერი n-სთვის,

$\sqrt{2}<\sqrt{2}+10^{-n}<\sqrt{3}$, ანუ $(\sqrt{2}+10^{-n})\in[\sqrt{2};\sqrt{3}]$.

მაშასადამე, $[\sqrt{2};\sqrt{3}]$ შეიცავს უსასრულოდ ბევრ რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვს.

2 $\sqrt{3}=1{,}7320508...;\quad \sqrt{5}=2{,}2360679\ ...$

წინა ამოცანის ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ $1{,}8+10^{-n}$ და $\sqrt{3}+10^{-n}$ რიცხვები, სადაც $n\in\mathbf{N}$.

3 • ნებისმიერი $[a,b]$ შუალედისთვის r იყოს $\frac{a+b}{2}$.

ვთქვათ k არის რაიმე ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $\frac{1}{10^k}<\frac{b-a}{2}$. მაშინ ყოველი n ნატურალური რიცხვისთვის, თუ $n>k$,

მივიღებთ

$$\frac{1}{10^n}<\frac{b-a}{2}$$

$$r<r+\frac{1}{10^n}<r+\frac{b-a}{2}<b$$

ამრიგად, $[r,\ r+\frac{1}{10^n}]\subset[a,b]$, თუ $n>k$.

- ასეთი $r+\frac{1}{10^n}$ რიცხვები $(n>k)$ უსასრულოდ ბევრია.
- განიხილეთ რიცხვები

$$r_1=M,a_1a_2...a_n\,010110111...$$
$$r_2=M,a_1a_2...a_n\,0010110111...$$
$$\cdots$$
$$r_k=M,a_1a_2...a_n\underbrace{0...0}_{k}10110111\,...$$

როგორც ადრე დავრწმუნდით, ასე მიღებული რიცხვები ირაციონალურია, ამასთანავე, ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვისთვის

$$r<r_k<r+\frac{1}{10^n}.$$

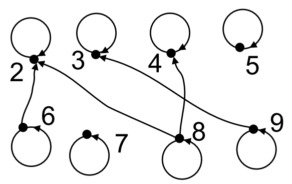
- $r_k\in[r;\ r+\frac{1}{10^n}]\subset[a;b]$.

4 არ არსებობს — ყოველ ორ ნამდვილ რიცხვს შორის უამრავი ნამდვილი რიცხვია.

1.2 გრაფების გამოყენების მაგალითები

მიზანი. გრაფების გამოყენება ვარიანტების დათვლისას, გეგმის შედგენისას, ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოხსნისას.

გრაფის ცნებას მოსწავლეები პირველად X კლასის სახელმძღვანელოში ხვდებიან. სიმრავლეზე ან სიმრავლეებს შორის მიმართებების თვალსაჩინოდ წარმოდგენის ხერხების განხილვისას წარმოდგენილი იყო ფიგურები, რომლებიც წერტილებით და ამ წერტილების შემაერთებელი წირებით იყოს გამოსახული. ამიტომ პარაგრაფში მოცემული მასალის განხილვას ვიწყებთ გრაფის და მასთან დაკავშირებული ცნებების გახსენებით. ჩვენი დახმარებით მოსწავლეები იხსენებენ გრაფის წვეროებისა და წიბოების ცნებებს, ორიენტირებულ გრაფებს, ჯერად წიბოს, მარყუჟის ცნებას, განიხილავენ რაიმე მიმართებას სიმრავლეზე, ან მიმართებებს სიმრავლეებს შორის. მაგალითად, შეიძლება შევთავაზოთ მოსწავლეებს სასრულ სიმრავლეზე (0; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9) მიმართება — სიმრავლის „x ელემენტი იყოფა y ელემენტზე“. ეს მიმართება გრაფით ასე გამოისახება

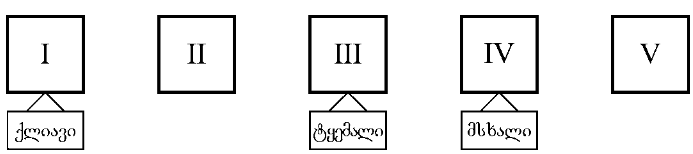


ეს გრაფი შეიცავს მარყუჟებს

მოსწავლეებთან საუბრისას შეიძლება გამოვიყენოთ სახელმძღვანელოს ტექსტის ის ნაწილი, რომელიც გრაფების გამოყენების მაგალითებზე მოგვითხრობს.

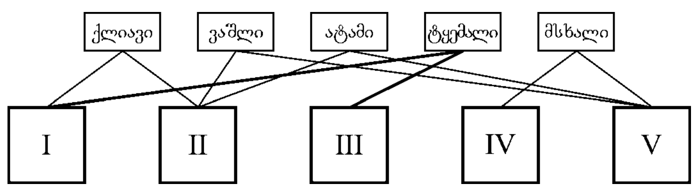
პარაგრაფში წარმოდგენილი მასალა პრაქტიკული მიმართულებისაა — განხილულია გრაფების გამოყენების მაგალითები პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას. გრაფთა თეორიის ელემენტებისა და მეთოდების გამოყენება გვეხმარება სწრაფად ამოვხსნათ პრაქტიკული ამოცანა. მოსწავლეები გრაფის გამოყენების მაგალითებს, ამ თეორიის შესწავლას ეროვნული სასწავლო გეგმის მიხედვით მე-12 კლასში დაუბრუნდებიან.

1



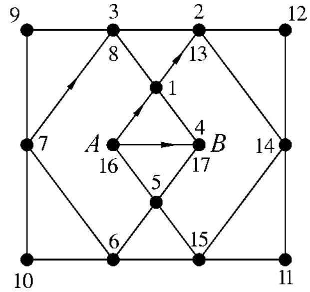
მესამე და მეოთხე ყუთებს წარწერები ცალსახად შეესაბამება. პირველს, რადგან წარწერა „ტყემალი“ უკვე გამოყენებულია, შევუსაბამოთ „ქლიავი“. II და V ყუთებს შეიძლება წარწერები ასე შევუსაბამოთ: „ატამი“, „ვაშლი“ ან პირიქით, „ვაშლი“, „ატამი“.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად შეიძლება გრაფების გამოყენებაც. გამოვსახოთ ამოცანის პირობა გრაფის საშუალებით:



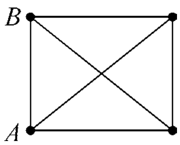
მიღებული გრაფის წიბოებიდან უნდა შევარჩიოთ ხუთი, ისე, რომ მათ საერთო წვერო არ ჰქონდეს.

3 ვთქვათ, გრაფის შემოვლა A წვეროდან დავიწყეთ. სიმარტივისთვის გადავნომროთ გრაფის სხვა წვეროები საძიებელი სვლა-გეზის ერთ-ერთი შესაძლო ვარიანტის შესაბამისად.

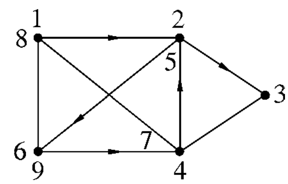


4 ა) არ შეიძლება — თითოეულ წვეროსთან დაკავშირებული წიბოების რიცხვი კენტია. ბ) არ შეიძლება — არსებობს წვერო, რომელსაც მხოლოდ სამი წიბო უკავშირდება. ამ წვეროდან ყოველ „გამოსვლას“ „დაბრუნება“ არ მოსდევს.

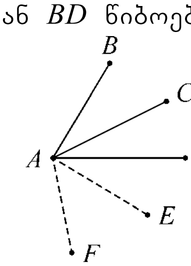
5 ა) არ შეიძლება. მართლაც, თუ ვიგულისხმებთ, რომ შემოვლა შეიძლება და ვთქვათ, A და B არ არის შემოვლის საწყისი და ბოლო წერტილები. მაშინ ამ წერტილებთან დაკავშირებული წიბოების რიცხვი უნდა იყოს ლუწი. ეს კი ეწინააღმდეგება მოცემულობას.



ბ) შეიძლება — ერთ-ერთი ვარიანტი სურათზეა წარმოდგენილი.



6 მითითებების მიხედვით ჯგუფის წევროები წერტილებით გამოვსახოთ — გრაფის წვეროებით. A-დან გამოსული ხუთი წიბოდან 3 მაინც იქნება ერთი და იმავე სახის — ვთქვათ, უწყვეტია. დავუშვათ, ასეთებია AB, AC და AD. თუ BC, CD ან BD წიბოებს შორის რომელიმე არის უწყვეტი, მაშინ ის „შეკრავს“ უწყვეტი წირების „სამკუთხედს“ და დასაბუთება დასრულდება. თუ წიბოების ამ სამეულიდან არც ერთი არ არის უწყვეტი — ყველა წყვეტილია, მაშინ BCD „სამკუთხედი“ აღმოჩნდება წყვეტილი წირებით გამოსახული და მივაგნებთ ერთმანეთისთვის უცნობ სამ პიროვნებას.



7 გამოიყენეთ წინა ამოცანაში აღწერილი მეთოდი, რისთვისაც ქალაქები ექვსკუთხედის წვეროებით გამოსახეთ და მათი შემაერთებელი გზები კი — განსხვავებული ფერის წიბოებით.

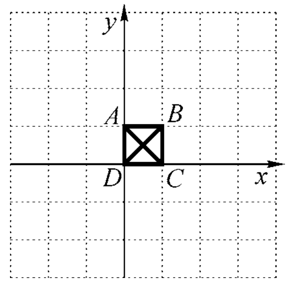
8 მე-6-ეს ანალოგიურია.

9 მე-6-ეს ანალოგიურია.

10 იხილეთ მე-6-ეს ამოხსნა.

11 ვერ შეძლებს, რადგან თითოეული წვერო სამ წიბოს ეკუთვნის და აღწერილი წესით შემოვლისას ასეთი წვეროები შეიძლება იყოს მხოლოდ ორი — საწყისი და ბოლო. კუბს კი რვა წვერო აქვს.

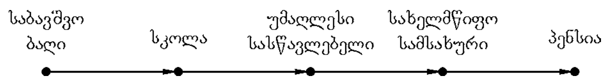
12 ა) I → IV → II → III → V;
ბ) I → II → III → V.



13 საკმარისია ექვსი მონაკვეთის გავლება — AB, BC, CD, AD, AC და BD მონაკვეთებისა. თითოეული მათგანის სიგრძე 1 ან $\sqrt{2}$ ერთეულია, $\sqrt{2}<1{,}5$.

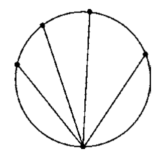
14 თბილისი → მცხეთა → გორი → ხაშური → ზესტაფონი→ → ქუთაისი → აბაშა → სენაკი → ზუგდიდი.

15 $(8;\ 0;\ 0) \to (3;\ 5;\ 0) \to (3;\ 2;\ 3) \to (6;\ 2;\ 0) \to \to (6;\ 0;\ 2) \to (1;\ 5;\ 2) \to (1;\ 4;\ 3) \to (4;\ 4;\ 0)$.

16 

17 $-3 \xrightarrow{\cdot(-2)} 6 \xrightarrow{\cdot(-2)} -12 \xrightarrow{\cdot(-2)} 24 \xrightarrow{\cdot(-2)} -48 \xrightarrow{\cdot(-2)} 96$

18 საკმარისია ოთხი მონაკვეთის გავლება:



1.3 მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი

მიზანი. ინდუქციის მეთოდით დამტკიცების გააზრება; მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენება რეკურენტული მიმდევრობის n-ური წევრის მისაღებად.

ახალი ეროვნული სასწავლო გეგმის მიხედვით რეკურენტული მიმდევრობის n-ური წევრის ფორმულის გამოყენების აღწერის გამოყენებით მოსწავლეები ეცნობიან მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს — დებულების დამტკიცების მეთოდს მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით. ეს პრინციპი ნატურალურ რიცხვთა აქსიომური თეორიის ერთ-ერთი აქსიომის — ინდუქციის აქსიომის შედეგია და ამ მეთოდით ჭეშმარიტი დასკვნა მიიღება.

გაკვეთილს ვიწყებთ მიმდევრობის გახსენებით, მიმდევრობის მოცემის ხერხების ჩამოთვლით. მოსწავლეები იხსენებენ მიმდევრობის რეკურენტული წესით მოცემის მაგალითებს — არითმეტიკულ პროგრესიას, გეომეტრიულ პროგრესიას, ფიბონაჩის მიმდევრობას. მოსწავლეები იხსენებენ იმ შემთხვევებსაც, როცა მიმდევრობა n-ური წევრის ფორმულით მოიცემა. სასურველია შესაბამისი მაგალითების განხილვა — ვთქვათ, მიმდევრობა მოცემულია n-ური წევრის ფორმულით: $a_n=\dfrac{n}{n+1}$, ვიპოვოთ ამ მიმდევრობის პირველი ხუთი წევრი, ვიპოვოთ ამ მიმდევრობის k-ური წევრი, ვიპოვოთ მიმდევრობის $(n+1)$-ე წევრი და ა. შ. ეს სამუშაო მათემატიკური ინდუქციის გამოყენების ათვისებას ემსახურება.

ამის შემდეგ კვლავ ვუბრუნდებით არითმეტიკულ პროგრესიას და ვიხსენებთ, რომ მისი n-ური წევრი მოიცემა ფორმულით:

$$a_n=a_1+d(n-1),\ n\in N. \qquad (1)$$

— მოიცემა თუ არა ამ ფორმულით პირველი წევრი?

— რა ფორმულით მოიცემა მიმდევრობის k-ური წევრი?

— შევამოწმოთ მოიცემა თუ არა იმავე ფორმულით a_{n+1}? გამოვიყენოთ პროგრესიის თვისება $a_{k+1}=a_k+d$.

მოსწავლეები მიიღებენ ფორმულას:

$a_{k+1}=a_1+dk$, რომელიც უმჯობესია ასე ჩავწეროთ

$a_{k+1}=a_1+d(k+1-1)$.

— მაშასადამე, თუ ჭეშმარიტია (1) ფორმულა, როცა $n=k$, ჭეშმარიტია თუ არა იგი, როცა $n=k+1$?

— (1) ფორმულა ხომ სამართლიანია, როცა $n=1$, მაშასადამე იგი ჭეშმარიტი, ყოფილა, როცა $n=2$, $n=3$ და ა. შ.

ასეთ მსჯელობას აკლია მათემატიკური სიზუსტე, მაგრამ ცნობილი პედაგოგი დ. პოია [29], [30] მიიჩნევდა, რომ ამ რთული მეთოდის ახსნისას შეიძლება ამ მსჯელობის გამოყენება. რომ არ დავიკარგოთ „თუ“ და „მაშინ“ სიტყვების კორიანტელში, უმჯობესია დასამტკიცებელი დებულება $A(n)$-ით აღვნიშნოთ ხოლმე და ინდუქციის ფაზები ასე წარმოვადგინოთ:

1) ვაჩვენებთ: $A(1)$ ჭეშმარიტია.

2) ვაჩვენებთ: $A(k)\Rightarrow A(k+1)$ ($A(k)$-ს ჭეშმარიტობიდან გამომდინარეობს $A(k+1)$-ს ჭეშმარიტობა), მაშინ $A(n)$ ჭეშმარიტია ნებისმიერი n-ისთვის.

ამის შემდეგ გადავდივართ ამოცანების ამოხსნაზე, უმჯობესია, კლასში ამოხსნილი ამოცანების მსგავსი ამოცანები მოსწავლეებს საშინაო დავალებად მივცეთ. განსაკუთრებული ყურადღება დავუთმოთ იმ ამოცანების ამოხსნას, რომლებშიც რეკურენტული მიმდევრობის n-ური წევრის ფორმულაა გამოყვანილი.

მაგალითად, კლასში გავარჩიოთ მე-11 ამოცანა, მე-10 — საშინაო დავალება იყოს.

კლასში უნდა ამოიხსნას ფიბონაჩის მიმდევრობის n-ური წევრის ფორმულის მიღების ამოცანაც.

მითითებები

9 დავამტკიცოთ გეომეტრიული პროგრესიის n-ური წევრის ფორმულა.

I. შევამოწმოთ ფორმულის სისწორე $n=1$ შემთხვევაში:

$a_1=a_1\cdot q^{1-1}=a_1\cdot q^0=a_1$

II. დავუშვათ, რომ რაიმე $k\geq 1$ შემთხვევაში $a_k=a_1\cdot q^{k-1}$ ტოლობა ჭეშმარიტია და ვაჩვენოთ მისი ჭეშმარიტობა $k+1$ შემთხვევაშიც; გეომეტრიული პროგრესიის განსაზღვრების თანახმად, $a_{k+1}=a_k\cdot q$; გავითვალისწინოთ დაშვება და გვექნება:

$a_{k+1}=(a_1\cdot q^{k-1})\cdot q=a_1\cdot q^k=a_1\cdot q^{(k+1)-1}$.

მაშასადამე, ფორმულა $a_n=a_1q^{n-1}$ დამტკიცებულია — ის ჭეშმარიტია ნებისმიერი ნატურალური n-სთვის.

10 $a_1=1,\ a_{n+1}=(n+1)a_n,\ n\in N.$

n-ური წევრის ფორმულის შესახებ ვარაუდის გამოთქმა გაგიადვილდებათ, თუ ამოიწერთ მოცემული მიმდევრობის პირველ რამდენიმე წევრს და დააკვირდებით მათ კანონზომიერების აღმოჩენის მიზნით:

$$1,\ 2\cdot1,\ 3\cdot2\cdot1,\ 4\cdot3\cdot2\cdot1,\ \ldots.$$

გამოვთქვათ ვარაუდი — $a_n=n!$.

დავამტკიცოთ ამ ფორმულის ჭეშმარიტობა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით:

I. $a_1=1!=1$

II. ვთქვათ, $a_k=k!$.

განვიხილოთ a_{k+1}. პირობით, $a_{k+1}=(k+1)\cdot a_k$ და, დაშვების გათვალისწინებით,

$$a_{k+1}=(k+1)\cdot k!=(k+1)!$$

მაშასადამე, ვარაუდი სწორია.

11 განვიხილოთ პირველი რამდენიმე წევრი:

$a_1=1$

$a_2=4\cdot1$

$a_3=5\cdot4\cdot1$

$a_4=6\cdot5\cdot4\cdot1$

გამოვთქვათ ვარაუდი: $a_n=\dfrac{(n+2)!}{3\cdot2}$, თუ $n\geq1$.

გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი:

I. $n=1,\ a_1=\dfrac{(1+2)!}{3\cdot2}=\dfrac{1\cdot2\cdot3}{3\cdot2}=1.$

II. დავუშვათ, სწორია, რომ რაიმე $k\geq1$-სთვის $a_k=\dfrac{(k+2)!}{6}$.

განვიხილოთ a_{k+1}. განსაზღვრებით, $a_{k+1}=(k+3)a_k$. დაშვების გათვალისწინებით,

$a_{k+1}=(k+3)\cdot\dfrac{(k+2)!}{6}=\dfrac{(k+3)!}{6}=\dfrac{((k+1)+2)!}{6}.$

ამრიგად, ჩვენი ვარაუდი სწორია.

12 ა) I: $n=1,\ 1=1^2;$

II: ვთქვათ, როცა $n=k$, მაშინ $1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$.

დავუშვათ $n=k+1$, გვექნება

$$1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

ბ) I: $n=1,\ 1=\dfrac{1(1+1)}{2};$

II: ვთქვათ, როცა $n=k$, მაშინ $1+2+3+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

დავუშვათ, $n=k+1$, გვექნება

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

ე) I: $n=1,\ S_1=\dfrac{2a_1+d(1-1)}{2}\cdot1=a_1$ — ჭეშმარიტია;

II: ვთქვათ, როცა $n=k$, მაშინ $S_k=\dfrac{2a_1+d(k-1)}{2}k;$

დავუშვათ, $n=k+1$, გვექნება:

$$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=\frac{2a_1+d(k-1)}{2}k+a_1+kd=\frac{2a_1k+dk^2-dk+2a_1+2kd}{2}=\frac{2a_1(k+1)+d(k^2+k)}{2}=$$

$$=\frac{2a_1+dk}{2}\cdot(k+1)=\frac{2a_1+d((k+1)-1)}{2}\cdot(k+1).$$

ვ) I: $n=1$, $S_1=\frac{b_1\cdot(q-1)}{q-1}=b_1$ — ჭეშმარიტია;

II: ვთქვათ, როცა $n=k$, მაშინ $S_k=\frac{b_1(q^k-1)}{q-1}$;

დავუშვათ, $n=k+1$, გვექნება:

$$S_{k+1}=S_k+b_{k+1}=\frac{b_1(q^k-1)}{q-1}+b_1q^k=\frac{b_1q^k-b_1-b_1q^{k+1}-b_1q^k}{q-1}=\frac{b_1q^{k+1}-b_1}{q-1}=\frac{b_1(q^{k+1}-1)}{q-1}.$$

• იმ შემთხვევაში, როცა $q=1$, გვექნება

$$S_n=\underbrace{b_1+b_1+\ \dots\ +b_1}_{n\text{-ჯერ.}}=nb_1.$$

14 ა) I: $n=1$, $1\cdot2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}$ — ჭეშმარიტია.

II: ვთქვათ, როცა $n=k$, მაშინ

$$1\cdot2+2\cdot3+\dots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3};$$

დავუშვათ, $n=k+1$, გვექნება:

$$1\cdot2+2\cdot3+\dots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

15 ვთქვათ, $n=2$, მაშინ გვექნება $2^2+11\cdot2=26$, 26 კი არ იყოფა 6-ზე.

17 ა) I ფაზა: ვთქვათ, $n=1$, $3^{3\cdot1+2}+2^{4\cdot1+1}=243+32=275=25\cdot11$;

II ფაზა: დავუშვათ, როცა $n=k$, მაშინ $3^{3k+2}+2^{4k+1}=11p$.

ვთქვათ, $n=k+1$, გვექნება

$$3^{3(k+1)+2}+2^{4(k+1)+1}=3^{3k+2+3}+2^{4k+1+4}=27\cdot3^{3k+2}+16\cdot2^{4k+1}=27\cdot3^{3k+2}+16(11p-3^{3k+2})=(27-16)\cdot3^{3k+2}+16\cdot11p=$$

$$=11\cdot(3^{3k+2}+16p).$$

18* ა) ამოვწეროთ ფიბონაჩის მიმდევრობის რამდენიმე წევრი:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

• ფიბონაჩის მიმდევრობა არ არის გეომეტრიული პროგრესია, რადგან, მაგალითად, $\frac{1}{1}\neq\frac{2}{1}$.

• თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi_n=q^{n-1}$, $q\neq0$, მაშინ (2)-დან მივიღებთ

$q^{n+1}=q^{n-1}+q^n$, $\quad q^2=1+q$, $\quad q^2-q-1=0$.

$q_1=\frac{1-\sqrt5}{2}$, $q_2=\frac{1+\sqrt5}{2}$.

• თუ ახლა $\varphi_n=c_1\varphi'_n+c_2\varphi''_n$ და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\varphi'_{n+2}=\varphi'_n+\varphi'_{n+1} \text{ და } \varphi''_{n+2}=\varphi''_n+\varphi''_{n+1},$$

მივიღებთ:

$$\varphi_n+\varphi_{n+1}=c_1\varphi'_n+c_2\varphi''_n+c_1\varphi'_{n+1}+c_2\varphi''_{n+1}=c_1(\varphi'_n+\varphi'_{n+1})+c_2(\varphi''_n+\varphi''_{n+1})=c_1\varphi'_{n+2}+c_2\varphi''_{n+2}=\varphi_{n+2}.$$

ამრიგად, ასეთი φ_n აკმაყოფილებს (2) ტოლობას,

$$\varphi_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

• როცა $n=1$, მივიღებთ $\varphi_1=c_1+c_2$,

როცა $n=2$, მაშინ $\varphi_2=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

(1) ტოლობის მიხედვით

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1 \end{cases}$$

აქედან მივიღებთ $c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $c_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

ამრიგად,

$$\varphi_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \text{ ანუ}$$

$$\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right). \qquad (3)$$

ბ) მარტივად შევამოწმებთ, რომ $\varphi_1=1$, $\varphi_2=1$ ტოლობები ჭეშმარიტია.

ვიგულისხმოთ, რომ (3) ჭეშმარიტია ყოველი $n\leq k$-სთვის, სადაც k ნებისმიერად აღებული ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია და დავამტკიცოთ ფორმულის ჭეშმარიტობა $n=k+1$-თვის —

$$\varphi_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$$

განსაზღვრების თანახმად

$$\varphi_{k+1}=\varphi_{k-1}+\varphi_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$$

ამრიგად, (3) ჭეშმარიტია ნებისმიერი n-ისთვის.

19 ა) I: $n=1$, $3^4-8-9=64$;

II: დავუშვათ, როცა $n=k$, მაშინ $3^{2k+2}-8k-9=64m$, $m\in Z$; ვთქვათ, $n=k+1$, გვექნება

$3^{2k+4}-8(k+1)-9=9\cdot 3^{2k+2}-8k-17=9(64m+8k+9)-8k-17=9\cdot 64m+72k+81-8k-17=9\cdot 64m+64k+64$ — 64-ის ჯერადია.

ბ) I: $n=1$, $7^3+8^3=45\cdot 19$ — იყოფა 19-ზე;

II: დავუშვათ, როცა $n=k$, მაშინ $7^{k+2}+8^{2k+1}=19m$, $m\in Z$;

ვთქვათ, $n=k+1$, გვექნება

$7^{k+3}+8^{2k+3}=7\cdot 7^{k+2}+64\cdot 8^{2k+1}=7\cdot 7^{k+2}+64(19m-7^{k+2})=64\cdot 19m-57\cdot 7^{k+2}=19\cdot(64m-3\cdot 7^{k+2})$ — იყოფა 19-ზე.

გ) I: $n=1$, $7^3+8^3=15\cdot 57$ — იყოფა 19-ზე,

II: დავუშვათ, როცა $n=k$, მაშინ $7^{k+2}+8^{2k+1}=57m$, $m\in Z$;

ვთქვათ, $n=k+1$, გვექნება

$7^{k+3}+8^{2k+3}=7\cdot 7^{k+2}+64\cdot 8^{2k+1}=7\cdot 7^{k+2}+64(57m-7^{k+2})=57\cdot 64m-57\cdot 7^{k+2}$ — იყოფა 57-ზე.

ამოცანები ჯგუფური მუშაობისთვის

• თეორემა 1-ის „დამტკიცებაში“ დაშვებულია შეცდომა — მეორე ფაზაში მოყვანილი მსჯელობა არ არის სწორი $k=1$ შემთხვევისთვის.

• თეორემა 2-ის „დამტკიცებაში“ გამოტოვებულია პირველი ფაზა — შემოწმება საწყისი n-ისთვის.

• თეორემა 3-ის „დამტკიცებაში“ დაშვებულია შეცდომა — მეორე ფაზაში მოყვანილი მსჯელობა არ არის სწორი $k=1$ შემთხვევისთვის.

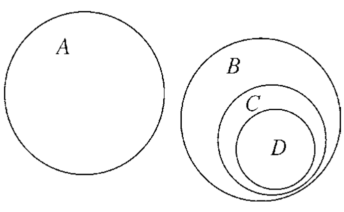
საკონტროლო წერა

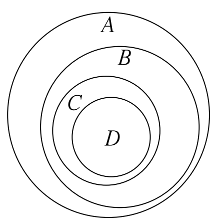
შეარჩიეთ სწორი პასუხი

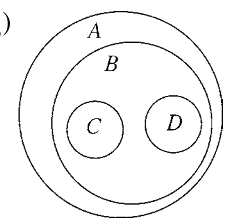
1 თუ $A=\{6k \mid k\in Z\}$, $B=\{15k \mid k\in Z\}$, მაშინ $A\cap B=$

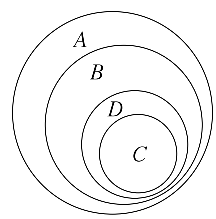
ა) $\{21k \mid k\in Z\}$ ბ) $\{3k \mid k\in Z\}$ გ) $\{9k \mid k\in Z\}$ დ) $\{30k \mid k\in Z\}$

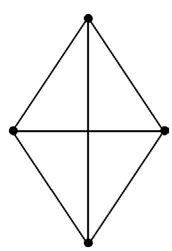
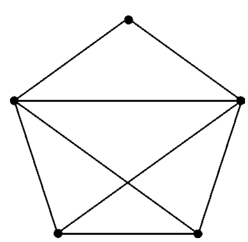
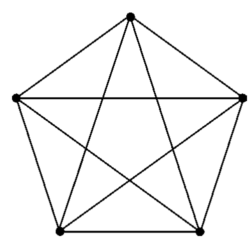
2 ვთქვათ, A არის მრავალკუთხედების სიმრავლე, B — სამკუთხედების სიმრავლე, C — ტოლფერდა სამკუთხედების სიმრავლე, D — ტოლგვერდა სამკუთხედების სიმრავლე. ამ სიმრავლეების წარმოდგენა ვენის დიაგრამით ასე შეიძლება:

ა)


ბ)


გ)


დ)


3 მოცემულია გრაფები: I.

II.

III.


ამ გრაფებიდან რომლისთვისაა შესაძლებელი უწყვეტი შემოვლა ყოველ წიბოზე მხოლოდ ერთხელ გავლით და საწყის წერტილში დაბრუნებით?

ა) I ბ) I და II გ) მხოლოდ II დ) II და III.

4 თუ $a_n=\dfrac{(n-1)^2(n+2)^2}{n^3}$, მაშინ $a_{n+2}=$

ა) $\dfrac{(n+2)^2(n+4)^2}{n^3}$ ბ) $\dfrac{(n+1)^2(n+4)^2}{n^3}$ გ) $\dfrac{(n+1)^2(n+4)^2}{(n+2)^3}$ დ) $\dfrac{(n+1)^2(n+4)^2}{(n+2)^2}$.

5 ვთქვათ, $S_k=4-k+\frac{(k-1)^2}{2}$. მაშინ $S_3-S_2=$

ა) 4,5　　ბ) 3　　გ) 5,5　　დ) 0,5.

6 ნებისმიერი A და B სიმრავლეებისთვის $(B\cap A)\cup B=$

ა) A　　ბ) B　　გ) $A\cup B$　　დ) $A\cap B$.

ამოხსენით ამოცანები

7. დაასაბუთეთ, რომ, თუ m^2 იყოფა 7-ზე, მაშინ m იყოფა 7-ზე (გამოიყენეთ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი).

8 გამოიყენეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი და დაასაბუთეთ, რომ $1^2+2^2+3^2+...+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, $n\in N$.

მითითებები

1	2	3	4	5	6
დ	ბ	დ	გ	დ	ბ

7 დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, m არ იყოფა 7-ზე, მაშინ $m=7n+k$, $k=1, 2, 3, 4, 5$ ან 6. განვიხილოთ m^2:

$$m^2=(7n)^2+2\cdot 7nk+k^2=7(7n^2+2nk)+k^2$$

დაშვების შესაბამისად, $k^2=1, 4, 9, 16, 25$ ან 36. არც ერთი ამ რიცხვთაგანი არ იყოფა 7-ზე. გამოდის, რომ m^2-იც არ იყოფა 7-ზე, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, m იყოფა 7-ზე.

8 I. $n=1$, $1^2+2^2=\frac{(1+1)(1+2)(2+3)}{6}$, 5=5, ჭეშმარიტია,

II. დავუშვათ, რომ, თუ $n=k$, მაშინ

$$1^2+2^2+...+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

განვიხილოთ $n=k+1$. გვექნება

$$1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2+(k+2)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}+(k+2)^2=\frac{(k+2)((k+1)(2k+3)+6(k+2))}{6}=$$

$$=\frac{(k+2)(2k^2+11k+15)}{6}=\frac{(k+2)2(k+3)(k+\frac{5}{2})}{6}=\frac{(k+2)(k+3)(2k+5)}{6}$$ — დებულება დასაბუთებულია.

შეფასების სქემა:

პირველი ექვსი ამოცანიდან თითოეულის სწორი პასუხი შეფასდეს 1 ქულით, მე-7 და მე-8 ამოცანებიდან თითოეული — 2 ქულით. ამასთანავე, შესაძლებელია მე-7 და მე-8 ამოცანებში გამოვიყენოთ ნაწილობრივი შეფასებაც — მაგალითად, მე-8 ამოცანის ამოხსნაში I ფაზა შეფასდეს 0,5 ქულით, II ფაზის პირველი ნაწილი — 0,5 ქულით, II ფაზის მეორე ნაწილი — 1 ქულით.

1.4 უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები

მიზანი. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობების თვისებების გამოყენების უნარ-ჩვევების განვითარება.

გაკვეთილს ვიწყებთ მიმდევრობის მოცემის ხერხების გახსენებით. შევჩერდებით n-ური წევრის ფორმულით მიმდევრობის მოცემის ხერხებზე და წარმოვადგენთ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებს, რომელთა გეომეტრიული წარმოდგენები გვეხმარება ამ მიმდევრობების თვისებების განხილვაში. მონაკვეთის თანამიმდევრული დაყოფის მაგალითის განხილვა გვეხმარება უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის ცნების უკეთ გააზრებაში.

ეს მომავალში მიმდევრობის სხვა თვისებების განხილვისთვის საჭირო პროპედევტიკული მუშაობაა.

სკოლაში სწავლების პრაქტიკულ მნიშვნელობას ემატება უმაღლეს სკოლაში სწავლის გასაგრძელებლად საჭირო შემზადებაც.

თემის შესწავლის შემდეგ მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობების ამოცნობა n-ური წევრების ფორმულების მიხედვით.

მითითებები

8 I ფაზა: $k=1$, გვაქვს $\left(\frac{1}{n}\right)$ მიმდევრობა, რომელიც უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა;

II ფაზა: დავუშვათ, როცა $k=m$, მაშინ $\left(\frac{1}{n^m}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა; ვთქვათ, $k=m+1$, გვექნება $\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$ მიმდევრობა, რომელიც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც $\left(\frac{1}{n}\right)$ და $\left(\frac{1}{n^m}\right)$ მიმდევრობების ნამრავლი. $\left(\frac{1}{n}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა, ამიტომ შემოსაზღვრულია, $\left(\frac{1}{n^m}\right)$ — დაშვებით უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა, ამიტომ, მე-2 თვისებით, $\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$-ც უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

9 • ნებისმიერი ნატურალური n-ისთვის $|\alpha_n|\le|\beta_n|$ და $|\beta_n|\ne0$, ამიტომ $\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right|=\frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|}\le1$ — $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ შემოსაზღვრულია;

• რადგან (β_n) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა, ამიტომ ნებისმიერი ε დადებითისთვის არსებობს β_{n_0} წევრი, რომლის მომდევრო ყველა β_n-სთვის $(n>n_0)$ სრულდება პირობა $|\beta_n|<\varepsilon$, მაშინ ყველა α_n-სთვისაც $(n>n_0)$, ანუ α_{n_0} წევრის მომდევნო ყველა წევრისთვისაც შესრულდება $|\alpha_n|<|\beta_n|<\varepsilon$ — (α_n) მიმდევრობა უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

10* ა) $a_n=\dfrac{2n+5}{3n^2-2}$, $\quad |a_n|=\dfrac{2n+5}{3n^2-2}<\dfrac{1}{100}$,

$200n+500<3n^2-2, \qquad 3n^2-200n-502>0.$

$n_1=\dfrac{100-\sqrt{11506}}{100}<0, \qquad n_2=\dfrac{100+\sqrt{11507}}{100},$

$69<n_2<70,$

ამრიგად, როცა $n<70$, გვაქვს $|a_n|>\dfrac{1}{100}$, ხოლო როცა $n\geq 70$, გვაქვს $|a_n|<\dfrac{1}{100}$. პასუხი: a_{69}.

ბ) $a_n=\dfrac{100}{\sqrt{n+1}}$, $\quad |a_n|=\dfrac{100}{\sqrt{n+1}}<\dfrac{1}{100}$

$\sqrt{n+1}>10^4$

$n+1>10^8$

$n>10^8-1$

ამრიგად, როცა $n\leq 10^8-1$, მაშინ $|a_n|\geq\dfrac{1}{100}$, ხოლო, როცა $n>10^8-1$, მაშინ $|a_n|<\dfrac{1}{100}$. პასუხი: a_{10^8-1}.

11 ა) $\left(\dfrac{6}{n}-\dfrac{4}{3n^2}+\dfrac{7}{8n^3}\right)$ მიმდევრობა ასე წარმოვადგინოთ:

$\left(\dfrac{6}{n}\right)+\left(\dfrac{-4}{3n^2}\right)+\left(\dfrac{7}{8n^3}\right)$ — ამ მიმდევრობებიდან თითოეული უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა და პირველი თვისებით, მათი ჯამიც უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

12 ა) $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$, ანუ $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\left(\dfrac{1}{n}\right)$ — ეს კი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა;

ბ) $\left(\dfrac{a_n}{c_n}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)$ — არ არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა, რადგან თუ $\varepsilon=\dfrac{1}{3}$, მაშინ ნებისმიერი n ნატურალურისთვის $|a_n|>\varepsilon$.

13 არ გამომდინარეობს. განიხილეთ, მაგალითად, შემთხვევა:

$a_n=2+\dfrac{1}{n}, \; b_n=-2+\dfrac{1}{n}.$

14 არ გამომდინარეობს, განიხილეთ, მაგალითად, შემთხვევა:

$a_n=\dfrac{1}{n^3}, \; b_n=n.$

15 ვთქვათ, (a_n) და (b_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობებია. მაშინ $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ და $\left(\dfrac{1}{b_n}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია. ამიტომ $\left(\dfrac{1}{a_nb_n}\right)$ მიმდევრობაც უსასრულოდ მცირეა. მაშინ (a_nb_n) უსასრულოდ დიდია.

16 რადგან (b_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა, ამიტომ $\left(\dfrac{1}{b_n}\right)$ უსასრულოდ მცირეა. პირობის თანახმად, გვაქვს $|a_n|>|b_n|$, ამიტომ $\dfrac{1}{|a_n|}<\dfrac{1}{|b_n|}$ და მე-9 ამოცანის შედეგის თანახმად, $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ უსასრულოდ მცირეა. ამიტომ (a_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა.

18 ა) ცხადია $\sqrt{n^3}>n$, ამიტომ $\frac{1}{\sqrt{n^3}}<\frac{1}{n}$ და, მე-9 თვისების თანახმად, $\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$ უსასრულოდ მცირეა, მაშინ $(\sqrt{n^3})$ უსასრულოდ დიდია.

ბ) განვიხილოთ $\left(\frac{1}{n^3+10n^2}\right)$ მიმდევრობა; ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის $\frac{1}{n^3+10n^2}<\frac{1}{n^3}$; მაგრამ $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა (იხ. ამოცანა 8), ამიტომ ამოცანა 9-ის შედეგის გათვალისწინებით, $\left(\frac{1}{n^3+10n^2}\right)$ მიმდევრობა უსასრულოდ მცირეა, თანაც $\frac{1}{n^3+10n^2}\neq 0$. მაშასადამე, (n^3+10n^2) მიმდევრობა უსასრულოდ დიდია.

გ) გვაქვს $((-1)^n n)$.

განვიხილოთ მიმდევრობა $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ — ის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა და ამ მიმდევრობის არც ერთი წევრი არ არის ნულის ტოლი. მაშასადამე, $((-1)^n n)$ მიმდევრობა უსასრულოდ დიდია.

19 ა) პირველი მართკუთხედის პერიმეტრი აღვნიშნოთ P_1-ით, მაშინ მეორე მართკუთხედისა იქნება $\frac{1}{2}P_1$, მესამისა — $\frac{1}{4}P_1$ და ა.შ. გვექნება $\left(P_1\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ მიმდევრობა, რომელიც არის P_1 რიცხვისა და უსასრულოდ მცირე $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ მიმდევრობის (რადგან $\frac{1}{2^{n-1}}\leq\frac{1}{n}$ და ამოცანა 9-ის შედეგი ვიცით) ნამრავლი, ამიტომ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა;

ბ) $d_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\sqrt{\left(\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)^2+\left(\frac{b_1}{2^{n-1}}\right)^2}=\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}{2^{n-1}}$, ამის გათვალისწინებით (d_n) მიმდევრობა წარმოიდგინება, როგორც მუდმივი $\sqrt{a_1^2+b_1^2}$ და უსასრულოდ მცირე $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ მიმდევრობის ნამრავლი და ამიტომ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

20 შეიძლება არ იყოს. განიხილეთ, მაგალითად, შემთხვევა $a_n=n$, $b_n=-n$.

21* მიმდევრობა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: (a_n), სადაც

$$a_n=2, \text{ თუ } n=2k-1,\ k\in\mathbf{N};$$

$$a_n=4+\frac{n}{2}, \text{ თუ } n=2k,\ k\in\mathbf{N}.$$

ა) (a_n) არ არის შემოსაზღვრული, რადგან ლუწი ნომრის წევრები უსასრულოდ დიდ მიმდევრობას ქმნის ($b_k=a_{2k}$, (b_k) უსასრულოდ დიდია);

ბ) (a_n) უსასრულოდ დიდი არ არის — კენტნომრიანი წევრებისთვის $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ არ არის უსასრულოდ მცირე.

22* განვიხილავთ მიმდევრობას: $\frac{1}{2};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{6};\ \ldots$

ა) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია — მიმდევრობის ნებისმიერი წევრის მოდული ნაკლებია, მაგალითად, ერთზე;

ბ) უსასრულოდ მცირე ეს მიმდევრობა არ არის, თუ $\varepsilon<\frac{1}{2}$, მაშინ კენტნომრიანი ყოველი წევრის მოდული ε-ზე მეტია.

ჯგუფური მუშაობის პროექტი

1 ბერნულის უტოლობის გამოყენებით მიიღებთ:

$$|q^n|=\frac{1}{(1+\alpha)^n}\le\frac{1}{n\alpha}.$$

$\left(\frac{1}{n}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა, ამიტომ მისი $\frac{1}{\alpha}$ რიცხვზე გამრავლებით მიღებული $\left(\frac{1}{n\alpha}\right)$ მიმდევრობა (მესამე თვისებით) უსასრულოდ მცირეა და მე-9 ამოცანის შედეგის თანახმად, (q^n) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

2 • $-0{,}3\le\frac{(-1)^{n-1}4}{n}\le0{,}6;\ -\frac{3}{40}\le\frac{(-1)^{n-1}}{n}\le\frac{3}{20}.$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა — ა) n ლუწია; ბ) n კენტია:

ა) $-\frac{3}{40}\le\frac{-1}{n}<0$

$\frac{3}{40}\ge\frac{1}{n}>0$

$n\ge\frac{40}{3}$

$n=14;\ 16;\ 18;\ \ldots$

ბ) $0<\frac{1}{n}\le\frac{3}{20}$

$n\ge\frac{20}{3}$

$n=7;\ 9;\ 11;\ \ldots$

პასუხი: $\{n|n\in\mathbf{N},\ n\ge7,\ n\ne8,\ 10,\ 12\}$.

1.5 პერიოდული პროცესები და პერიოდული ფუნქციები

მიზანი: ზოგიერთი პერიოდული მოვლენისა და ფუნქციის გაცნობა-გაანალიზება.

პარაგრაფში წარმოდგენილია პერიოდული ფუნქციის ცნება და განხილულია პერიოდული ფუნქციის მაგალითი — $y=\{x\}$ (x რიცხვის წილადი ნაწილი). დაწვრილებით არის აღწერილი პერიოდული ფუნქციის გრაფიკის აგების თავისებურებები.

პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრისას აუცილებელია ხაზგასმა, რომ პერიოდი ნულის ტოლი არ არის; პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრის არე არ არის შემოსაზღვრული არც ზემოდან და არც ქვემოდან.

მითითებები

10 ა) $[0{,}25]=0$; ბ) $[-0{,}31]=-1$; გ) $\left[3\frac{1}{9}\right]=3$; დ) $[5]=5$; ე) $\left[-4\frac{8}{9}\right]=-5$; ვ) $[-7]=-7$; ზ) $[-12{,}4]=-13$.

11 ა) $\{0{,}39\}=0{,}39$; ბ) $\{-0{,}43\}=0{,}57$; გ) $\left\{-4\frac{1}{7}\right\}=\frac{6}{7}$; დ) $\left\{5\frac{4}{9}\right\}=\frac{4}{9}$ ე) $\{7\}=0$; ვ) $\{1{,}41\}=0{,}41$; ზ) $\{-2{,}97\}=0{,}03$.

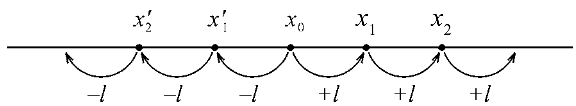
12 მაგალითად, $\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$.

13 ვთქვათ, მოიძებნა ისეთი $n_0\in\mathbf{Z}$ რიცხვი, რომ

$$(x_0+n_0l)\in D(f).$$

მაშინ, პერიოდული ფუნქციის თვისებების თანახმად, $(x_0+n_0l)-n_0l$, ანუ $x_0\in D(f)$ — ეს ეწინააღმდეგება პირობას. ამრიგად, დაშვება მცდარია და ყოველი n მთელი რიცხვისთვის გვაქვს $x_0+nl\notin D(f)$.

14 ა) $D(f)$ შეიცავს ერთ წერტილს მაინც. ვთქვათ, $x_0\in D(f)$; მაშინ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის $x_n=x_0+nl\in D(f)$ და $x_n'=x_0-nl\in D(f)$, სადაც l არის f ფუნქციის პერიოდი.



ბ) ყოველი $x_0\in D(f)$ რიცხვისთვის ზემოთ აღწერილი წესით განსაზღვრული მიმდევრობებისთვის გვაქვს

$f(x_0)=f(x_n)=f(x_n')$ — ნებისმიერი $n\in\mathbf{N}$-სთვის.

გ) განვიხილოთ $g=\left(x\pm\frac{l}{a}\right)=f\left(a\left(x\pm\frac{l}{a}\right)\right)=f(ax\pm l)=f(ax)=g(x)$.

დ) რადგან l_1 პერიოდია, ამიტომ პერიოდი იქნება kl_1-იც (ნებისმიერი მთელი k--სთვის).

ამრიგად, $f(x+kl_1+nl_2)=f(x+nl_2)+kl_1)=f(x+nl_2)$.

ანალოგიურად, f-ის პერიოდი იქნება nl_2-იც, ამიტომ

$$f(x+nl_2)=f(x).$$

15 ვაჩვენოთ, რომ $f(x)=kx+b$ ფუნქცია პერიოდულია მხოლოდ მაშინ, როცა $k=0$. მართლაც, ვთქვათ, f-ის პერიოდია l, მაშინ $f(x+l)=f(x)$. ამასთანავე,

$$f(x+l)=k(x+l)+b=kx+b+kl=f(x)+kl.$$

ამრიგად, $kl=0$. $l\neq0$, ამიტომ $k=0$.

$y=ax^2+bx+c$, $a\neq0$ კვადრატული ფუნქციაა. თუ ვიგულისხმებთ, რომ არსებობს ისეთი l რიცხვი ($l\neq0$), რომლისთვისაც ნებისმიერი x-თვის $y(x)=y(x+l)$, მივიღებთ $ax^2+bx+c=a(x+l)^2+b(x+l)+c$, $2axl+l^2+bl=0$, $2ax+l+b=0$. აღმოჩნდა, რომ l-ის მნიშვნელობა დამოკიდებულია x-ზე. ამრიგად, კვადრატული ფუნქცია არ არის პერიოდული.

არც $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq0$) ფუნქციაა პერიოდული.

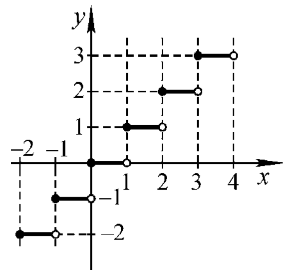
16 • პერიოდული f ფუნქცია არ შეიძლება იყოს კლებადი ან ზრდადი, რადგან, თუ $x_0\in D(f)$ და l არის f-ის პერიოდი, მაშინ $x_0-l<x_0<x_0+l$ და

$$f(x_0-l)=f(x_0)=f(x_0+l).$$

• პერიოდულ ფუნქციას ან არა აქვს ნული, ან ნულების უსასრულო ოდენობა აქვს (იხ. მე-14 ამოცანა). თუ x_0 რაიმე ნულია, მაშინ ნული იქნება x_0+nl, $n\in\mathbf{Z}$ რიცხვებიც.

17 • $f(t)=x_t$ ფუნქცია პერიოდულია, რადგან ნებისმიერი t რიცხვისთვის $f(t\pm2\pi)=f(t)$;
• $g(t)=y_t$ ფუნქციაც პერიოდულია, $g(t\pm2\pi)=g(t)$.

18 $y=[x]$



• $D(y)=\mathbf{R}$, $E(y)=\mathbf{Z}$;
• თუ $x_1<x_2$, მაშინ $y(x_1)\le y(x_2)$ — ფუნქცია არაკლებადია.
• ფუნქცია არ არის პერიოდული.
• $[n,\ n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$ სახის ყოველ შუალედში ფუნქცია მუდმივია — მისი მნიშვნელობაა n.

19 ა) $\{x+\frac{1}{3}\}=\frac{1}{2}$,

$x+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+m,\ m\in\mathbf{Z}$,

$x=\frac{1}{6}+m,\ m\in\mathbf{Z}$.

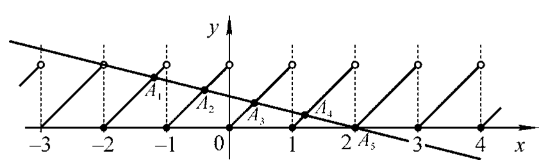
გ) $\{2x+\frac{2}{5}\}=\frac{1}{3}$,

$2x+\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+m,\ m\in\mathbf{Z}$,

$2x=\frac{-1}{15}+m,\ m\in\mathbf{Z}$,

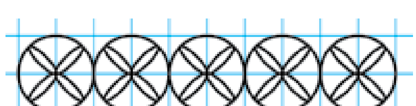
$x=-\frac{1}{30}+\frac{m}{2},\ m\in\mathbf{Z}$.

20* ავაგოთ $y=2\{x\}$ და $y=1-\frac{x}{2}$ ფუნქციათა გრაფიკები და ვიპოვოთ გადაკვეთის წერტილების ოდენობა — გრაფიკებს აქვს გადაკვეთის ხუთი წერტილი.

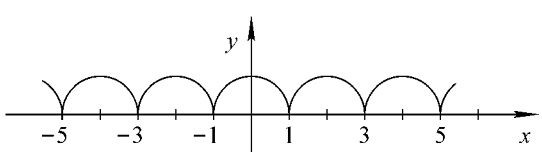


21 სავარაუდოა, რომ პერიოდებია:
ა) 6; ბ) 1,5; გ) 8.

22



23



24 მე-14 ამოცანის ერთ-ერთი შედეგის გათვალისწინებით, ფუნქციის პერიოდია, აგრეთვე, $(2\cdot 8+(-3)\cdot 5)$-იც, ანუ 1-იც.

25 არის — $36+(-1)\cdot 24=12$.

1.6 ვაგრძელებთ გეომეტრიული გარდაქმნების თვისებების შესწავლას

მიზანი. ამ პარაგრაფის მიზანია შევაჯამოთ და გავიღრმავოთ ჩვენი ცოდნა გეომეტრიული გარდაქმნების თვისებების შესახებ.

პარაგრაფში წარმოდგენილია სიბრტყეზე გადაადგილების ყველა კერძო შემთხვევა — ცენტრული და ღერძული სიმეტრიები, პარალელური გადატანა, მობრუნება და მსგავსების გარდაქმნა (კერძოდ, ჰომოთეტია).

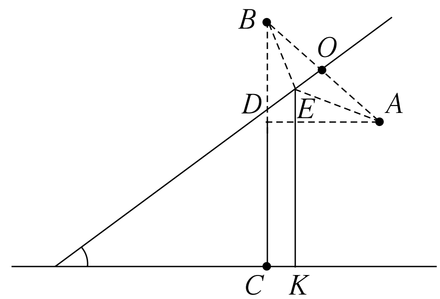
1) ღერძული და ცენტრული სიმეტრიების შესახებ

პარაგრაფის პირველი ნაწილის განხილვას უნდა უსწრებდეს ყველა გეომეტრიული გარდაქმნის გახსენება და მათი კლასიფიკაცია.

პირველ გაკვეთილზე მოსწავლეებთან ერთად ვიხსენებთ სიბრტყის თავის თავზე რა ასახვაა გადაადგილება, გადაადგილების რა მაგალითებს ვიცნობთ?

ვიწყებთ ღერძული და ცენტრული სიმეტრიების თვისებების აღწერით, ამ გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტული სიდიდეების, უძრავი წერტილების, უძრავი ფიგურების დასახელებით.

სახელმძღვანელოში საკითხის განხილვა პრობლემის გადაჭრაზე ორიენტირებული სწავლების მეთოდის გამოყენებას გულისხმობს.



განიხილება პრაქტიკული ამოცანა, რომლის მათემატიკური მოდელის აგების მივყავართ წრფის მიმართ სიმეტრიის თვისებების განხილვამდე; ოპტიმალური მარშრუტის შერჩევაში გვეხმარება ღერძული სიმეტრიის განხილვა, რაც აიოლებს პრობლემის გადაწყვეტას — AEK ტეხილის სიგრძე სიმეტრიის თვისების გამო BEK ტეხილის სიგრძის ტოლია — BEK-ზე მცირე კი B-დან b წრფემდე მანძილია. ასე მივაგენით იმ D წერტილს, რომლის გავლით უმოკლესი გზის გავლა გვიწევს.

ამის შემდეგ გადავდივართ ღერძული სიმეტრიის თვისებების განხილვაზე, მათგან მნიშვნელოვანია ის, რომ ღერძული სიმეტრიისას ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება, ღერძული სიმეტრია გადაადგილებაა, ღერძული სიმეტრიისას იცვლება ფიგურის ორიენტაცია.

სასურველია განვიხილოთ OX და OY ღერძების მიმართ სიმეტრიები და კოორდინატებით წარმოდგენის ფორმულები.

მოსწავლეები იხსენებენ ღერძული სიმეტრიის სხვა თვისებებსაც — სიმეტრიის ღერძი ღერძული სიმეტრიის უძრავი ფიგურაა. ამ ღერძის ყოველი წერტილი უძრავი წერტილია. ღერძული სიმეტრიისას ღერძის მართობული ყოველი წრფე თავის თავზე აისახება.

მეორე გაკვეთილს ცენტრული სიმეტრიის განხილვას ვუთმობთ. ამ შემთხვევაშიც საინტერესოა უძრავი წერტილების რაოდენობის დაზუსტება, უძრავი ფიგურის დასახელება.

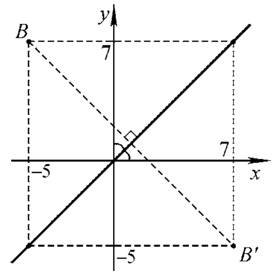
აქვე სასურველია ფიგურათა სიმეტრიულობასა და სიმეტრიის ღერძების ოდენობათა მიხედვით ფიგურების კლასიფიკაცია (მაგალითად სამკუთხედების).

მითითებები

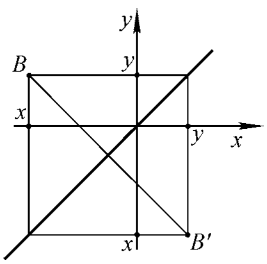
8 ა) წრფეს აქვს სიმეტრიის უამრავი ღერძი — a წრფის ყოველ წერტილზე a-ს მართობულად გავლებული წრფე და თვით a წრფე a წრფის სიმეტრიის ღერძებია.

ბ) მონაკვეთს სიმეტრიის ორი ღერძი აქვს — შუამართობი და თვით მონაკვეთზე გამავალი წრფე.

9 AB და BC გვერდების წაშლის შემდეგ დაგვრჩება AC მონაკვეთი — l წრფე ამ მონაკვეთის შუამართობია, მაშასადამე, სიმეტრიის ღერძიც. მხოლოდ AC მონაკვეთის წაშლის შემდეგ დარჩენილი ტეხილის სიმეტრიის ღერძი კვლავ l წრფეა.



10 B' წერტილის კოორდინატებია $(7;-5)$.



11 თუ $x \neq y$, მაშინ B და B' იმ კვადრატის ერთ-ერთ დიაგონალზე მდებარე წვეროებია, რომლის მეორე დიაგონალზე გადის $y=x$ წრფე. ამრიგად, B' წერტილია $(y;x)$. თუ $x=y$, მაშინ B და B'ერთი და იგივე წერტილია და შეიძლება კვლავ დავწეროთ: $y'=x$.

12 აბსცისათა ღერძის მიმართ სიმეტრიულია: $(x_0;\ y_0)$ და $(x_0;\ -y_0)$ სახის წერტილთა წყვილები და საკუთარი თავის სიმეტრიული. $(x,\ 0)$ სახის წერტილები. საძიებელ წყვილებს ქმნიან: $(5;\ 1)$ და $(5;\ -1)$, $(3;\ -2)$ და $(3;\ 2)$, $(1;\ -5)$ და $(1;\ 5)$;

საძიებელი წერტილებია: $(0;\ 0)$, $(7;\ 0)$ და $(4;\ 0)$.

ბ) ვირჩევთ $(x_0;\ y_0)$ და $(-x_0;\ y_0)$ სახის წერტილების წყვილებს და $(0;\ y)$ სახის წერტილებს. ასეთია მხოლოდ $(-3;\ 2)$, $(3;\ 2)$ წყვილი და $(0;\ 0)$, $(0;\ 7)$, $(0;\ 4)$ წერტილები.

გ) ვირჩევთ $(x_0;\ y_0)$ და $(-x_0;\ -y_0)$ სახის წერტილთა წყვილებს — ასეთია $(-3;\ 2)$ და $(3;\ -2)$. წერტილთა წყვილი, ვირჩევთ აგრეთვე $(0;\ 0)$ წერტილს.

დ) ვირჩევთ $(x_0;\ y_0)$ და $(y_0;\ x_0)$ სახის წერტილთა წყვილებს — ასეთია $(5;1)$ და $(1;5)$, $(7;0)$ და $(0;7)$, $(3;-2)$ და $(-2;3)$, $(4;0)$ და $(0;4)$; გარდა ამისა, ვირჩევთ $(0;0)$ წერტილსაც.

15 ა) Ox ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიის შესაბამისი ფორმულებია:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x' \\ y=-y', \end{cases}$$

ამიტომ გვექნება —

$$-y'=2x'+3, \text{ ანუ } y'=-2x'-3.$$

ამრიგად, საძიებელი წრფის განტოლებაა: $y=-2x-3$.

ბ) Oy ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიის შესაბამისი ფორმულებია:

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y, \end{cases}$$

ამიტომ გვექნება — $y'=-2x'+3$.

ამრიგად, საძიებელი წრფის განტოლებაა: $y=-2x+3$.

გ) აღნიშნული სიმეტრიის შესაბამისი ფორმულებია

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x, \end{cases}$$

ამიტომ გვექნება $x'=2y'+3$.

ამრიგად, საძიებელი წრფის განტოლებაა $y=\dfrac{x-3}{2}$.

დ) კოორდინატთა სათავის მიმართ (ცენტრული) სიმეტრიის შესაბამისი ფორმულებია:

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y, \end{cases}$$

ამიტომ გვექნება $-y=-2x+3$. ამრიგად, საძიებელი წრფის განტოლებაა $y=2x-3$.

16 $y=2x+b$ წრფის სიმეტრიული Oy ღერძის მიმართ არის $y=-2x+b$ წრფე და, მოცემულობის თანახმად, ის $y=kx-7$ წრფეა. ამიტომ $k=-2$, $b=-7$.

17 ა) $y=|x|$; $y(x)=y(-x)$, ამიტომ ამ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ;

ბ) $y=x$ არ არის, რადგან $y(-x)=-y(x)$;

გ) $y=x^2$ — არის, $y(-x)=y(x)$,

დ) $y=x^2+1$ — არის, $y(-x)=(-x)^2+1=y(x)$;

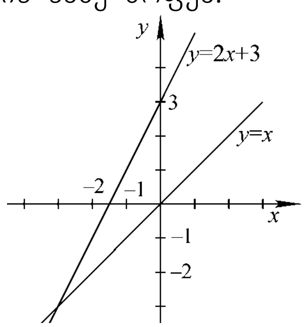
ე) $y=(x-1)^2$ — არ არის, $y(-x)=(-x-1)^2\neq y(x)$;

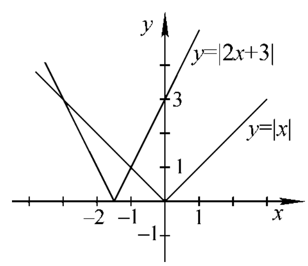
ვ) $y=x^2+2$ — არის;

ზ) $y=x^2+x$ — არ არის, $y(-x)=(-x)^2+(-x)\neq y(x)$;

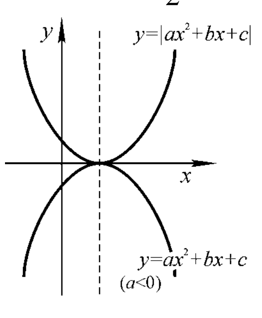
თ) $y=|x-2|$ — არ არის, $y(-x)=|-x-2|\neq y(x)$.

18 $y=x$ და $y=2x+3$ ფუნქციების გრაფიკებიდან, შესაბამისად, $y=|x|$ და $y=|2x+3|$ ფუნქციების გრაფიკებს ღერძული სიმეტრიით ვერ მივიღებთ, რადგან ღერძული სიმეტრიისას წრფის სახე წრფეა.





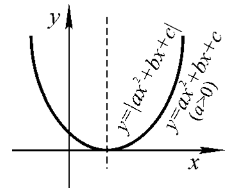
თუმცა $y=x$ წრფისა და y ღერძის მიმართ $y=x$-ის სიმეტრიული წრფის სხივებით აიგება $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკი. ანალოგიურად, $y=2x+3$ წრფე და მისი სიმეტრიული წრფე $x=-\dfrac{3}{2}$ წრფის მიმართ თავისი სხივებით ქმნიან $y=|2x+3|$ ფუნქციის გრაფიკს.

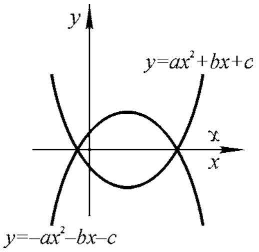


ღერძული სიმეტრიით ვერც $y=ax^2+bc+c$ $(a\neq0,\ D>0)$ ფუნქციის გრაფიკი აისახება $y=|ax^2+bx+c|$ ფუნქციის გრაფიკზე. იმ შემთხვევაში, როცა $D\leq0$, გვაქვს

ღერძული სიმეტრია Ox ღერძის მიმართ

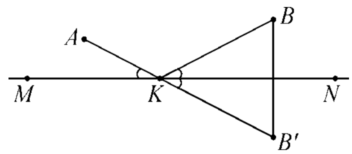
ან ღერძული სიმეტრია $x=x_0$ ($x_0=-\dfrac{b}{a}$) წრფის მიმართ.





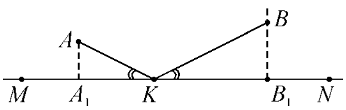
$y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$, $D>0$) პარაბოლის გრაფიკისა და მისი სიმეტრიული (x ღერძის მიმართ) $y=-ax^2-bx-c$ პარაბოლის ნაწილებით შეიძლება მივიღოთ $y=|ax^2+bx+c|$ პარაბოლის გრაფიკი.

19 სინათლის არეკვლის თვისების მიხედვით — $\angle AKM=\angle BKN$. ვიპოვოთ K წერტილი.



ავაგოთ B-ს სიმეტრიული წერტილი MN წრფის მიმართ. ვთქვათ ეს წერტილია B', გავავლოთ AB' წრფე. ამ წრფისა და MN წრფის გადაკვეთის წერტილია საძიებელი K წერტილი. მართლაც, $\angle AKM=\angle NKB'$ (ვერტიკალური კუთხეებია), $\angle NKB'=\angle BKN$ (BKB_1 და B_1KB' სამკუთხედების ტოლობის თანახმად). ამრიგად, $\angle AKM=\angle BKN$.

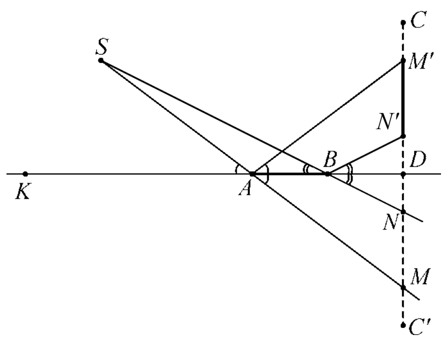
K წერტილი შეიძლება ასეც დავახასიათოთ:



$\angle AKA_1=\angle BKB_1$ თვისების გათვალისწინებით, გვაქვს $\Delta AA_1K\sim\Delta BB_1K$.

ამიტომ $\dfrac{AA_1}{BB_1}=\dfrac{A_1K}{B_1K}$ — K წერტილი ყოფს A_1B_1 მონაკვეთს A და B წერტილების MN წრფიდან დაშორებათა პროპორციულად.

20 ნახაზზე აგება შეიძლება ასე შევასრულოთ:

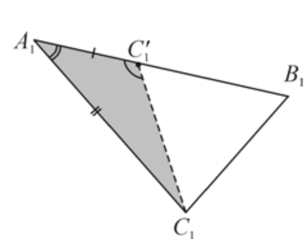


ავაგოთ CD მონაკვეთის $C'D$ სიმეტრიული მონაკვეთი AB წრფის მიმართ, გავავლოთ SA და SB სხივები. ვთქვათ, SA სხივი კვეთს $C'D$ მონაკვეთს M წერტილში, SB სხივი კი — N წერტილში; M' და N', შესაბამისად, M და N წერტილების სიმეტრიული წერტილებია AB წრფის მიმართ. ამასთანავე, $\angle SAK=\angle MAD$, $\angle SBK=\angle NBD$ (ვერტიკალური კუთხეებია) და $\angle MAD=\angle M'AD$, $\angle NBD=\angle N'BD$. ამრიგად, გუბეში აირეკლება მილის $M'N'$ ნაწილი.

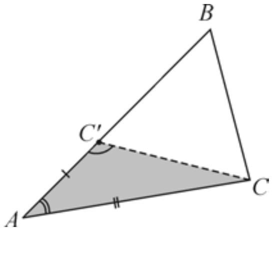
პრაქტიკულად, რეალურ გარემოში, ანალოგიურ შემთხვევაში A წერტილთან ავაგებთ $\angle SAK$-ს ტოლ $\angle DAM'$-ს. ხოლო B წერტილთან $\angle SBK$-ს ტოლ $\angle BDN'$-ს. მიღებული $M'N'$ მონაკვეთი — საძიებელი ნაწილია CD მილისა.

21 განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) $AB-BC>0$; ბ) $AB-BC<0$;

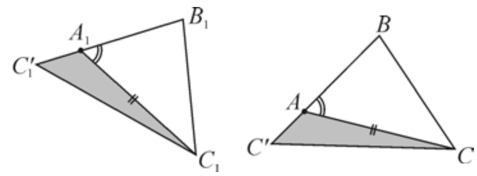


ა) AB მონაკვეთზე B წვეროს მხრიდან გადავდოთ BC-ს ტოლი BC' მონაკვეთი; ანალოგიურად, A_1B_1-ზე (B_1-ის მხრიდან) — B_1C_1-ის ტოლი B_1C_1' მონაკვეთი. მაშინ $AC'=A_1C_1'$ და, სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნით, $\Delta AC'C=\Delta A_1C_1'C_1$. შედეგად, ტოლფერდა $C'BC$ და $C_1'B_1C_1$ სამკუთხედებისთვის გვაქვს — მათი ფუძეები ტოლია, $C'C=C_1'C_1$ და



$\angle BC'C=\angle B_1C_1'C_1$ (ტოლი კუთხეების მოსაზღვრე კუთხეები). ამიტომ $\Delta C'BC=\Delta C_1'B_1C_1$ და, კერძოდ, $BC'=B_1C_1'$. ამრიგად, $AB=A_1B_1$ და, სამკუთხედების ტოლობის II ნიშნით, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

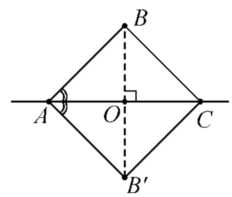
ბ) ამ შემთხვევის თავისებურება სურათზე გამოვსახეთ; მსჯელობა ა) შემთხვევის ანალოგიურად ჩაატარეთ.

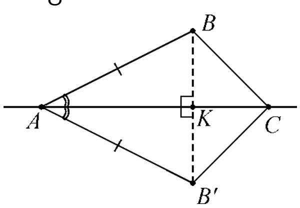


თუ $AB-BC=0$, მაშინ განსახილველი სამკუთხედები ტოლფერდაა და, სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნით,

$$\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1.$$

22 თუ $AB-BC=0$, მაშინ ABC და $AB'C$ სამკუთხედები ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედებია — B და B' წერტილები AC მონაკვეთის შუამართობზეა და $BO=B'O$ — B და B' სიმეტრიულებია AC წრფის მიმართ.





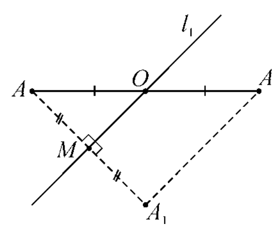
ვთქვათ, $AB\neq BC$. მაშინ, წინა ამოცანის შედეგის გათვალისწინებით, $\Delta ABC=\Delta AB'C$; კერძოდ, $AB=AB'$.

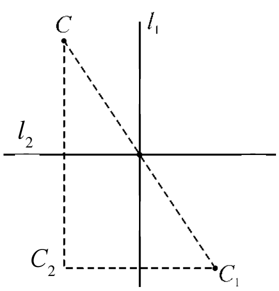
$\Delta B'AB$ ტოლფერდაა. AC მის ბისექტრისაზე გადის, ამიტომ AC გაივლის მედიანაზეც და სიმაღლეზეც. ამრიგად $BB'\perp AC$ და $BK=KB'$ (K არის AC-სა და BB'-ის გადაკვეთის წერტილი). ამრიგად, B და B'სიმეტრიულებია AC წრფის მიმართ.

23* ა) l_1 წრფე გადის A_1AA' სამკუთხედის შუახაზზე. ამიტომ, $l_1 \| AA'$.

ამრიგად, A_1A' წრფის მართობული l_2 წრფე l_1 წრფის მართობულიც იქნება;

$\angle AMO=\angle AA_1A'=90^0$; l_2 წრფე A_1A' მონაკვეთის შუამართობია, ამიტომ $l_2 \| AA_1$ და l_2 წრფე AA' მონაკვეთს შუა წერტილში კვეთს — $O\in l_2$.





24 სიმეტრიის ცენტრზე ორი მართობული წრფე (ვთქვათ, l_1 და l_2) გავავტაროთ და განვიხილოთ შესაბამისი ღერძული სიმეტრიების კომპოზიცია. სურათზე განლაგების კერძო შემთხვევებია ასახული:

$C(x;\ y)\ \to\ C_2(x;\ -y)$;

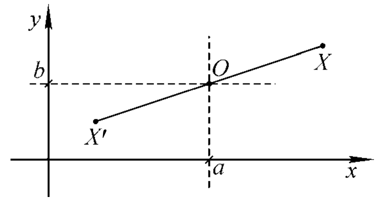
$C_2(x;\ -y)\ \to\ C_1(-x;\ -y)$;

25 ა) არსებობს — სიმეტრიის ცენტრზე გამავალი ყოველი წრფე;
ბ) არ არსებობს. გ) არსებობს — სიმეტრიის ცენტრი.

26 ა) ცენტრული სიმეტრიის განსაზღვრების თანახმად, $|OX'|=|OX|$ და OX' და OX სხივები დამატებითი სხივებია; ეს კი ნიშნავს, რომ

$$\overrightarrow{OX}=-\overrightarrow{OX'} \qquad (1);$$

ბ) ვთქვათ, $X=(x;y)$, $X'(x';y')$; მაშინ $\overrightarrow{OX}=(x-a;y-b)$, $\overrightarrow{OX'}=(x'-a;\ y'-b)$, შესაბამისად, (1) განტოლება ასეც ჩაიწერება:



$$x-a=-(x'-a) \qquad y-b=-(y'-b)$$

ანუ $$x'=2a-x \qquad y'=2b-y.$$

2) პარალელური გადატანა

პარალელური გადატანის წარმოდგენა ვექტორული ტოლობით:

$$\overrightarrow{XX'}=\vec{p} \qquad (1)$$

აადვილებს პარალელური გადატანის თვისებების დასაბუთებას და კოორდინატების გამოყენებას.

აქ X' არის $T_{\vec{p}}$ პარალელური გადატანისას X წერტილის სახე, ანუ $\vec{p}$ ვექტორით პარალელური გადატანისას X წერტილი აისახება იმ X' წერტილში, რომლისთვისაც გვაქვს (1) ტოლობა.

ეს ტოლობა კი ასე ჩაიწერება:

$$x'-x=a \qquad x'=x+a$$
$$y'-y=b \qquad y'=y+b$$

სადაც $X=(x;\,y)$, $X'=(x';\,y')$, $\vec{p}=(a;\,b)$.

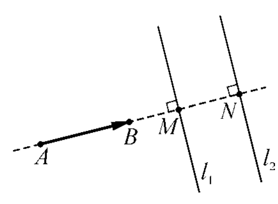
ამ ტოლობებისა და ვექტორებზე მოქმედებების გახსენებით ადვილად მტკიცდება პარალელური გადატანის ბევრი თვისება.

ყველა თვისების დასაბუთება მოსწავლეების აქტიური მონაწილეობით მიმდინარეობს.

ზოგიერთმა მასწავლებელმა შეიძლება არჩიოს იმ პრობლემის გადაჭრის გზების ძიებით დაიწყოს, რომელიც „ს" (სხვადასხვა)-ით არის წარმოდგენილი და პარალელური გადატანის გამოყენებით ამოიხსნება.

მითითებები

7 • შეიძლება შეირჩეს რაიმე l_1 და l_2 წრფეები ისე, რომ $l_1 \perp AB$, $l_2 \perp AB$ და $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (M და N, შესაბამისად, l_1 და l_2 წრფეთა AB წრფესთან ან AB-ს პარალელურ რაიმე წრფესთან გადაკვეთის წერტილებია); მაშინ $S_{l_2}\circ S_{l_1}=T_{\overrightarrow{AB}}$. ცხადია, აღნიშნული თვისებების მქონე l_1 და l_2 წრფეთა წყვილი უამრავია.

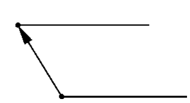


• სიმეტრიის l_1 და l_2 ღერძებს შორის მანძილია

$$|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}a.$$

8
$$AB=A_1B_1, \qquad AC=A_1C_1, \qquad BC=B_1C_1,$$
$$\angle A=\angle A_1, \qquad \angle B=\angle B_1, \qquad \angle C=\angle C_1.$$

9 ა) თუ ეს მონაკვეთები ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფე-ებზეა და მათი სიგრძეები ტოლია;



ბ) შეიძლება. გადატანა სურათზეა წარმოდგენილი:

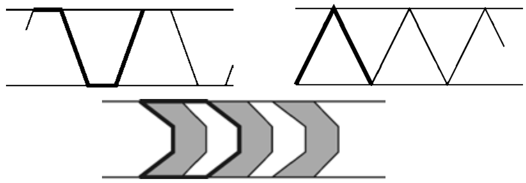
გ) შეიძლება. თუ M წერტილი ერთ-ერთ წრფეს ეკუთვნის, N კი — მეორეს, მაშინ $\overrightarrow{MN}$ ვექტორით პარალელური გადატანისას პირველი წრფე აისახება მეორეზე;

დ) არ შეიძლება — პარალელური გადატანით წრფე აისახება თავის თავზე ან პარალელურ წრფეზე;

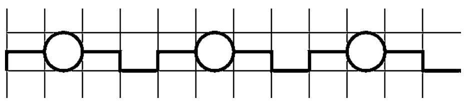
ე) თუ ამ კუთხეთა გვერდები წყვილ-წყვილად თანამიმართული სხივებია;

ვ) თუ ამ წრეწირთა რადიუსები ტოლია.

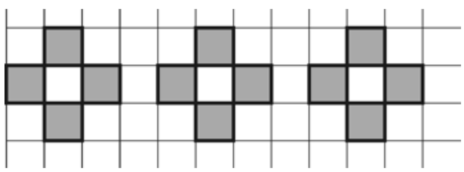
10



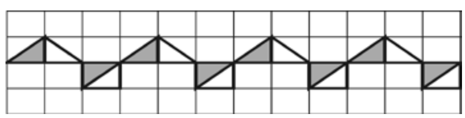
11 ა)



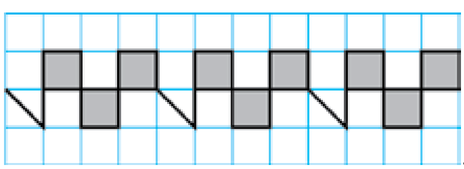
ბ)



გ)



დ)



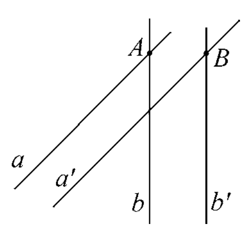
.

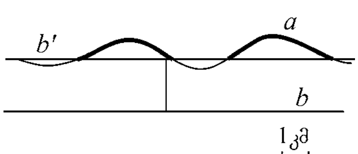
12 • B_2B_3, B_3B_4, D_1D_2, D_2D_3, C_1C_2, C_3C_4.

• B_1B_2 მონაკვეთი $\overrightarrow{B_1C_1}$-ით ორი პარალელური გადატანის კომპოზიციით აისახება D_1D_2 მონაკვეთზე.

• არსებობს, ესაა $\overrightarrow{B_1A_1}$-ით პარალელური გადატანა.

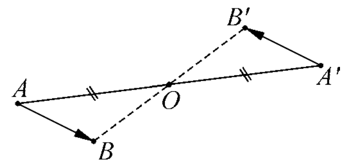
13 საძიებელი პარალელური გადატანა $\overrightarrow{AB}$-ვექტორით განისაზღვრება, შესაბამისად, A წერტილი B წერტილზე აისახება.





14 გადავიტანოთ b წრფე ჩრდილოეთით ორი ერთეულით, მივიღებთ b' წრფეს. საძიებელი ნაკვთია a წირის ის ნაწილი, რომელიც b' წრფით

შემოსაზღვრული „ჩრდილო“ ნახევარსიბრტყეში აღმოჩნდება.



16 ვთქვათ, $f(A)=A'$ და O წერტილი AA' მონაკვეთის შუა წერტილია. განვიხილოთ რაიმე B და $f(B)=B'$ წერტილები. ამოცანის პირობით,

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A'B'}.$$

დავასაბუთოთ, რომ $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OB'}$.

გვაქვს

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA'}+(-\overrightarrow{A'B'})=-(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'})=-\overrightarrow{OB'}.$$

ამრიგად, f არის O ცენტრის მიმართ სიმეტრიაა.

17 • მოცემული ცენტრული სიმეტრიისას

$$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OA'} \text{ და } \overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OB'}.$$

გვაქვს: $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{AB}$;

• ვთქვათ, $Z_0(A)=A'$, $Z_{0_1}(A')=A''$, და $Z_0(B)=B'$, $Z_{0_1}(B')=B''$, მაშინ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{A''B''}$. და, ამიტომ, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A''B''}$. — ამრიგად, $(Z_{0_1}{\circ}Z_0)(A)=A''$, $(Z_{0_1}{\circ}Z_0)(B)=B''$ და $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A''B''}$; $Z_{0_1}{\circ}Z_0$ პარალელური გადატანაა;

• წინა ორი შედეგის გათვალისწინებით, თუ

$$A\xrightarrow{Z_{0_1}}A_1\xrightarrow{Z_{0_2}}A_2\xrightarrow{Z_{0_3}}A_3$$

$$B\xrightarrow{Z_{0_1}}B_1\xrightarrow{Z_{0_2}}B_2\xrightarrow{Z_{0_3}}B_3$$

მაშინ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A_3B_3}$ და, მე-16 ამოცანის დასკვნის თანახმად, მივიღებთ — $Z_{0_3}{\circ}Z_{0_2}{\circ}Z_{0_1}$ცენტრული სიმეტრიაა.

18 ა) $\overrightarrow{OM}(3;\ -4)$ ვექტორით განსაზღვრული პარალელური გადატანა კოორდინატებით ასე გამოისახება

$$x'=x+3$$
$$y'=y-4.$$

ამიტომ $y=2x-1{,}5$ წრფის სახისთვის გვექნება

$y'+4=2(x'-3)-1{,}5$, ანუ $y'=2x'-11{,}5$;

პასუხი: $y=2x-11{,}5$.

ბ) $y=x^2$ პარაბოლის ანასახისთვის გვექნება

$$y'-1=(x'+3)^2,$$

ანუ $y'=(x')^2+6x'+10$;

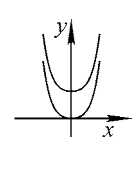
პასუხი: $y=x^2+6x+10$.

გ) $y=x^2-2x-3$ განტოლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით $y=(x-1)^2-4$, ანუ $y+4=(x-1)^2$. ამრიგად, საძიებელი პარალელური გადატანა კოორდინატებით ასე ჩაიწერება:

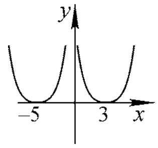
$$y=y'+4$$
$$x=x'-1,$$

ანუ

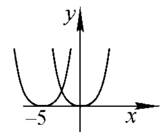
$$x'=x+1$$
$$y'=y-4.$$



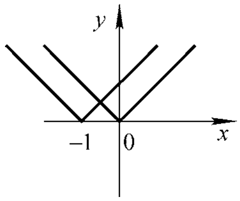
დ) $y=x^2+1$-ის გრაფიკი მიიღება $y=x^2$-ის გრაფიკისგან OY ღერძის გასწვრივ ერთი ერთეულით პარალელური გადატანით;



$y=(x-3)^2$-ის გრაფიკი მიიღება $y=(x+5)^2$-ის გრაფიკისგან OX ღერძის გასწვრივ 8 ერთეულით პარალელური გადატანით;



$y=x^2$-ის გრაფიკი მიიღება $y=(x+5)^2$-ის გრაფიკისგან OX ღერძის გასწვრივ 5 ერთეულით პარალელური გადატანით.



$y=|x|$-ის გრაფიკი მიიღება $y=|x+1|$-ის გრაფიკისგან OX ღერძის გასწვრივ ერთი ერთეულით პარალელური გადატანით.

ამოცანები ჯგუფური მუშაობისთვის

ა) **I ხერხი:** პარალელური გადატანით წრფე ან თავის თავზე აისახება ან პარალელურ წრფეზე. ამიტომ საძიებელი წრფის განტოლება $y=2x+b$ სახისაა.

$y=2x+5$ წრფის ერთ-ერთი წერტილია $M(0;\ 5)$; ამ წერტილის სახე $\vec{a}(3;1)$ პარალელური გადატანისას იქნება $M'(3;\ 6)$. ამრიგად,

$$6=2\cdot3+b,\ \ b=0.$$

საძიებელი წრფის განტოლებაა $y=2x$.

(3; 6) წერტილზე $y=2x+5$ წრფის პარალელური ერთადერთი წრფე გაივლება — $y=2x$.

II ხერხი: გამოვიყენოთ პარალელური გადატანის კოორდინატებით გამოსახვა:

$$x'=x+3$$
$$y'=y+1.$$

მაშინ $y=2x+5$ წრფის სახის განტოლებაა

$y'-1=2(x'-3)+5$, ანუ $y'=2x'$.

პასუხი: $y=2x$.

3) მობრუნება

მობრუნების განხილვისას მიმდინარეობს კუთხის ცნების „განზოგადებაც", ე. წ. მობრუნების კუთხის შემოღებაც, რიცხვებსა და კუთხეებს შორის შესაბამისობის დამყარება, რომელიც კუთხის რადიანული ზომის შემოღებით მიმდინარეობს.

მნიშვნელოვანია მობრუნების შედარება პარალელურ გადატანასთან ერთ-ერთი თვისების გამოყოფით — მობრუნებისას ფიგურის ორიენტაცია არ იცვლება.

მასწავლებელმა უნდა გაითვალისწინოს, რომ მობრუნების პროცესი კი არ არის აქ მთავარი, არამედ ის, თუ რომელი წერტილი რომელ წერტილში აისახება, რომ მობრუნებები R_0^{α} და $R_0^{\alpha+2\pi k}$ ნებისმიერი α რიცხვისა და k მთელი რიცხვისთვის ერთი და იგივე მობრუნებებია და შეიძლება დავწეროთ

$$R_0^{\alpha}=R_0^{\alpha+2\pi k}$$

მობრუნება ინარჩუნებს ორიენტაციას, ინარჩუნებს წერტილებს შორის მანძილს.

• თუ $\alpha+\beta=2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$, მაშინ $R_0^{\alpha}\circ R_0^{\beta}$. კომპოზიცია იგივური ასახვაა.

• O წერტილის გარშემო ნებისმიერი მობრუნების მიმართ O არის ერთადერთი ინვარიანტული წერტილი.

• მოცემული მონაკვეთი აისახება თავის თავზე ამ მონაკვეთის შუა წერტილის გარშემო $180^0 n$ ($n \in \mathbf{Z}$) სახის ნებისმიერი კუთხით მობრუნებისას.

• თუ წრფეებს შორის კუთხე მახვილია, მაშინ მათი წყვილი თავის თავზე აისახება გადაკვეთის წერტილის გარშემო $180^0 n$ ($n \in \mathbf{Z}$) სახის კუთხით მობრუნებისას; თუ წრფეთა შორის კუთხე მართია, მაშინ — გადაკვეთის წერტილის გარშემო $90^0 n$ ($n \in \mathbf{Z}$) სახის კუთხით მობრუნებისას.

კლასში შესაძლებელია ამოიხსნას ამოცანები: 1-6, 11, 13;

სასურველია დამოუკიდებლად შესრულდეს სავარჯიშოები: 7-10, 12.

მითითებები

11 ა) კოორდინატთა O სათავის გარშემო $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნება კოორდინატებით ასე წარმოიდგინება:

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= x. \end{aligned} \qquad (*)$$

პირობით, $A=(2;\ 3)$, $B(-3;\ 2)$ და (*) ტოლობები შესრულებულია — B მიიღება A-ს O წერტილის გარშემო $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნებით.

ბ) გავითვალისწინოთ, რომ $R_0^{\frac{\pi}{2}} \circ R_0^{-\frac{\pi}{2}} = R_0^0$ — $R_0^{-\frac{\pi}{2}}$ არის $R_0^{\frac{\pi}{2}}$-ის შექცეული ასახვა; ანუ: თუ $R_0^{-\frac{\pi}{2}}(x;\ y)=(x';\ y')$, მაშინ $R_0^{\frac{\pi}{2}}(x'; y')=(x, y)$. ამრიგად,

$$\begin{aligned} x &= -y' \\ y &= x' \end{aligned}$$

და ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned} \qquad (**)$$

გ) გამოვიყენოთ (*) ფორმულები — საძიებელი წყვილებია: $(-1;\ 7)$ და $(7;\ 1)$; $(-3;\ 1)$ და $(1;\ 3)$.

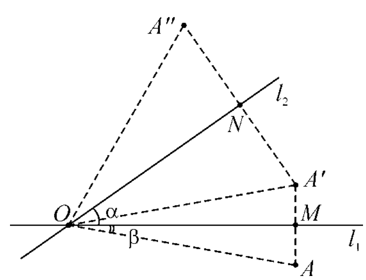
დ) გამოვიყენოთ (**) ფორმულები — საძიებელი წყვილებია: $(-1;\ 0)$ და $(0;\ -1)$; $(1;\ -3)$ და $(3;\ 1)$; $(-3;\ 7)$ და $(-7;\ -3)$.

12 ა) გამოვიყენოთ ამ მობრუნების კოორდინატებით გამოსახვის ფორმულები. მივიღებთ, რომ $y=2x-1$ წრფის სახეა $-x'=2y'-1$ განტოლებით მოცემული წრფე.

პასუხი: $y=\frac{1-x}{2}$.

ბ) ანალოგიურად მივიღებთ $x'=2(-y')-1$ განტოლებას.

პასუხი: $y=-\frac{x+1}{2}$.



13 მოცემულობის თანახმად, l_1 და l_2 წრფეები, შესაბამისად, AA' და $A'A''$ მონაკვეთების შუამართობებია. რადგან $OA=OA'=OA''$, ამიტომ არსებობს მობრუნება O წერტილის გარშემო, რომელიც A წერტილს ასახავს A'' წერტილზე. ვაჩვენოთ, რომ ამ მობრუნების კუთხე არ არის დამოკიდებული A წერტილის არჩევაზე. ვთქვათ, $\angle AOM=\beta$, მაშინ $\angle A'OM=\beta$, $\angle A'ON=\angle A''ON=\alpha-\beta$, ამრიგად,

$$\angle A'OA''=2\beta+2(\alpha-\beta)=2\alpha.$$

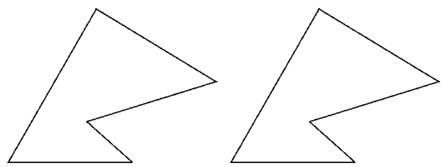
მაშასადამე, საძიებელი მობრუნებაა $R_0^{2\alpha}$.

პროექტი

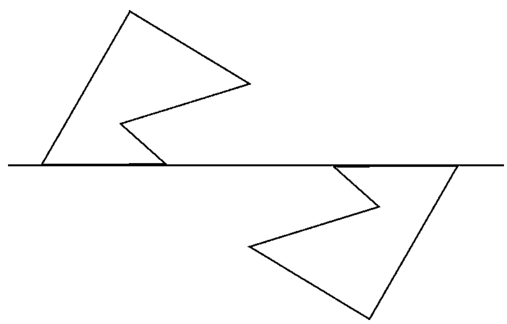
მიზანი: გეომეტრიული გარდაქმნების თვისებების შესახებ ცოდნის განმტკიცება პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის საშუალებით.

ერთი შეხედვით მარტივი ამოცანა სინამდვილეში ძალიან მნიშვნელოვანია თავისი თვალსაჩინოებით. მოსწავლე უფიქრდება გარდაქმნათა თვისებებს და ცდილობს მათი გამოყენებით ამოცანის გადაწყვეტას.

ა) პარალელური გადატანისას ხდება მიმართულების შენარჩუნება — წრფე (და მაშასადამე, მისი ნაწილიც) აისახება მის პარალელურ წრფეზე (ნაწილზე). ამის გათვალისწინებით, ფიგურები ისე უნდა განვალაგოთ, რომ შესაბამისი მონაკვეთები პარალელური იყოს, მაგალითად, ასე

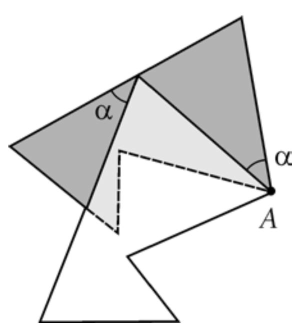


ბ) შეიძლება ცენტრული სიმეტრიის ასეთი თვისება გამოიყენოთ — სიმეტრიის ცენტრზე გამავალი წრფე ამ სიმეტრიით თავის თავზე აისახება, ხოლო ამ წრფით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყეები — ერთმანეთზე. ამ თვისების გამოყენებით, შეიძლება, მაგალითად, ასეთი განლაგება განვიხილოთ:



შევარჩიოთ ნებისმიერი წრფე და მოცემული ფიგურები ამ წრფეზე შესაბამისი მონაკვეთებით „დავსვათ“ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში.

გ) ამ ამოცანის ყველაზე მარტივი გადაწყვეტა ასე შეიძლება: ფიგურები ერთმანეთს შეუთავსეთ და, მაგალითად, ნემსით რაიმე წერტილში დაამაგრეთ მაგიდაზე, შემდეგ ერთ-ერთი ფიგურა მოაბრუნეთ ისე, რომ შესაბამის გვერდებს შორის კუთხე α-ს ტოლი აღმოჩნდეს.



4) მსგავსების გარდაქმნა

პარაგრაფს ვამთავრებთ მსგავსების ასახვის განხილვით. ამ ნაწილის მიზანია იმ გეომეტრიული გადაქმნების თვისებების გამოყენების უნარ-ჩვევების განვითარება, რომლებიც მანძილებს ერთი და იმავე რიცხვჯერ ცვლის.

მსგავსების ასახვის განხილვამდე, სასურველია, შეჯამდეს ის საერთო თვისებები, რაც ახასიათებს ყველა გადაადგილებას.

- ორი გადაადგილების კომპოზიცია გადაადგილებაა.
- გადაადგილების შექცეული ასახვა გადადგილებაა.

მასწავლებლებს შევახსენებთ, რომ გადაადგილებათა კომპოზიციას ასოციაციურობის თვისება აქვს, გადაადგილებათა სიმრავლე ჯგუფს ქმნის.

ამასთანავე, თუ ფიგურა რაიმე გადაადგილებით თავის თავზე აისახება, ასეთ ფიგურას სიმეტრიულს ვუწოდებთ და შესაბამის გადაადგილებებს — ფიგურის სიმეტრიებს, მაგალითად, არსებობს წესიერი n-კუთხედის $2n$ სიმეტრია: n ცალი მობრუნება (მათ შორისაა იგივური ასახვა) და n ცალი ღერძული სიმეტრია; ამ მობრუნებათა კუთხეებია —$0, \frac{2\pi}{n}, 2\cdot\frac{2\pi}{n}, ..., (n-1)\frac{2\pi}{n}$.

ყოველი გადაადგილება მსგავსების გარდაქმნის კერძო სახეა.

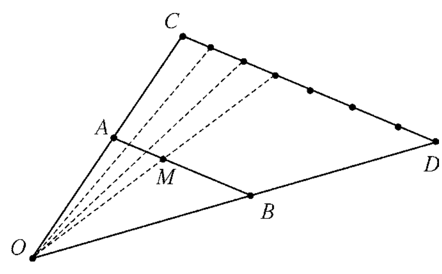
მსგავსების ასახვათა კომპოზიცია მსგავსების ასახვაა.

მსგავსების ასახვის შექცეული ასახვა მსგავსების ასახვაა.

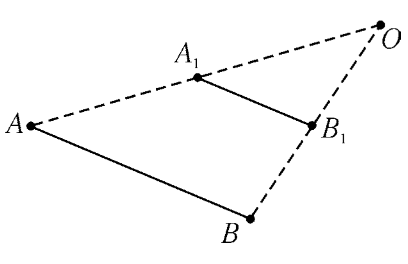
მსგავსების ასახვისას (კერძოდ, გადაადგილებების დროს) ერთი წრფის რაიმე A, B, C წერტილები აისახება A', B', C' წერტილებზე, რომლებიც, აგრეთვე, ერთ წრფეს ეკუთვნის — თუ $AB+BC=AC$, მაშინ $A'B'+B'C'=A'C'$ (რადგან $A'B'=kAB$, $B'C'=kBC$, $A'C'=kAC$), წრფე აისახება წრფეზე, პარალელური წრფეები აისახება პარალელურ წრფეებზე, კუთხე მის ტოლ კუთხეზე აისახება, წრეწირი წრეწირზე აისახება, არ იცვლება მონაკვეთების სიგრძეების შეფარდება.

მითითებები

1 ეს ამოცანა დაეხმარება მოსწავლეებს კიდევ ერთხელ გაიაზრონ ჰომოთეტიისა და მსგავსების გარდაქმნის თვისებები.

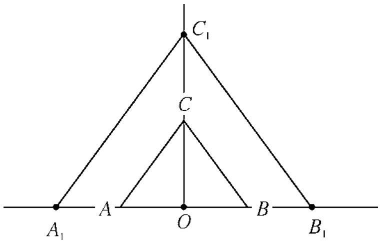


2 ჰომოთეტია ცენტრით O წერტილში (სათანადოდ შერჩეული კოეფიციენტით) AB მონაკვეთს ასახავს CD მონაკვეთზე (ან პირიქით). CD მონაკვეთი დაყოფილია 7 ტოლ ნაწილად. C წერტილიდან მესამე მონაკვეთის ბოლო წერტილის შესაბამისი წერტილი (M) AB მონაკვეთს სასურველი შეფარდებით გაყოფს — $AM:MB=3:4$. ანალოგიურად, შეიძლება D წერტილიდან მესამე მონაკვეთის ბოლო წერტილით მოვახდინოთ AB მონაკვეთის დაყოფა.



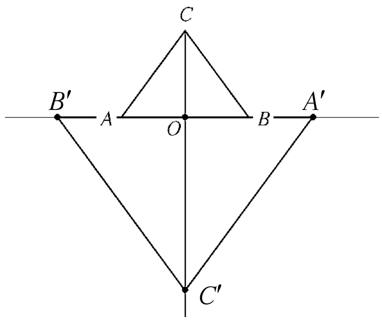
3 ვთქვათ, $AB \| A_1B_1$. გავავლოთ AA_1 და BB_1 წრფეები; ეს წრფეები იკვეთება, რადგან $AA_1 \neq BB_1$ — შეთავაზეთ მოსწავლეებს ამ ფაქტის დამტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით. წრფეთა გადაკვეთის O წერტილი საძიებელი ჰომოთეტიის ცენტრია, კოეფიციენტად კი შეიძლება $\frac{AB}{A_1B_1}$ ან $\frac{A_1B_1}{AB}$ ავირჩიოთ, ანუ $\frac{OA}{OA_1}$ ან $\frac{OA_1}{OA}$.

6 ა)



$$\overrightarrow{OA'}=2\cdot\overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{OB'}=2\cdot\overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{OC'}=2\cdot\overrightarrow{OC},$$

ბ)

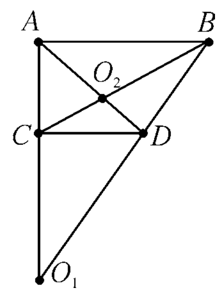


$$\overrightarrow{OA'}=-2\cdot\overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{OB'}=-2\cdot\overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{OC'}=-2\cdot\overrightarrow{OC},$$

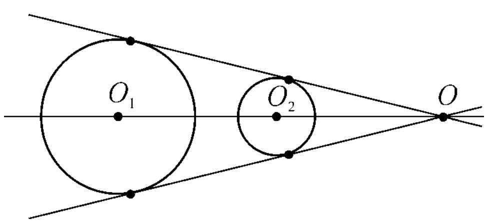
7 მიაჩვიეთ მოსწავლეები გამოთქმული მოსაზრების დასაბუთებას. მაგალითად, თუ რაიმე მოსაზრებას არ ეთანხმებიან, მაშინ მოიყვანონ კონტრმაგალითი; თუ ეთანხმებიან, ახსნან, რის საფუძველზე ფიქრობენ ასე.

8 საყურადღებოა დ) წინადადება.

ამ შემთხვევაში ჰომოთეტიის ცენტრს წარმოადგენს AC და BD წრფეთა გადაკვეთის O_1 წერტილი, ან AD და BC წრფეთა გადაკვეთის O_2 წერტილი. პირველ შემთხვევაში $k=\frac{AB}{CD}$ ან $k=\frac{CD}{AB}$, II შემთხვევაში $k=-\frac{AB}{CD}$ ან $k=-\frac{CD}{AB}$.



9



ჰომოთეტიის ცენტრი საერთო, მაგალითად, გარე მხებების გადაკვეთის წერტილია, კოეფიციენტი — ცენტრებიდან დაშორების შეფარდება ($\frac{O_1O}{O_2O}$, ან $\frac{O_2O}{O_1O}$).

10 ვთქვათ, f გადაადგილებაა. განვიხილოთ $H_0^k \circ f$ კომპოზიცია. განვიხილოთ ნებისმიერი A და B წერტილები. ვთქვათ, $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $H_0^k(A')=A''$, $H_0^k(B')=B''$. მაშასადამე,

$$(H_0^k \circ f)(A)=A'' \text{ და } (H_0^k \circ f)(B)=B''.$$

განვიხილოთ შეფარდება $\frac{A''B''}{AB}$:

$$\frac{A''B''}{AB}=\frac{k\cdot A'B'}{AB}=\frac{k\cdot AB}{AB}=k.$$

ამ ტოლობებში გათვალისწინებულია, რომ გადაადგილება არ ცვლის წერტილებს შორის მანძილს, ხოლო ჰომოთეტია $|k|$-ჯერ ცვლის მანძილს.

მაშასადამე, $H_0^k \circ f$ კომპოზიცია მანძილს k-ჯერ ცვლის ანუ მსგავსების გარდაქმნაა.

მსგავსების გარდაქმნაა აგრეთვე $f \circ H_0^k$ კომპოზიციაც.

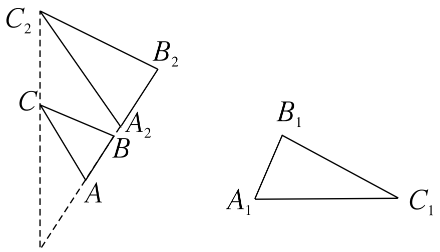
11 უპირველეს ყოვლისა, მოსწავლეებმა კარგად უნდა გაიაზრონ ამოცანის შინაარსი: სამკუთხედების მსგავსების ნიშნების დასამტკიცებლად საჭიროა ამ თეორემათა პირობების შესრულებისას ისეთი მსგავსების გარდაქმნის მითითება, რომელიც ერთ-ერთ სამკუთხედს მეორეზე ასახავს.

სამკუთხედების მსგავსების ნიშანი (მსგავსება გვერდების პროპორციულობით): **თუ ერთი სამკუთხედის გვერდები მეორე სამკუთხედის გვერდების პროპორციულია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების გვერდები პროპორციულია

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}=k. \qquad (1)$$

ახლა მივუთითოთ მსგავსების ასახვა, რომელიც ABC სამკუთხედს ასახავს $A_1B_1C_1$-ში. ჰომოთეტია, რომლის ცენტრი ნებისმიერადაა არჩეული და კოეფიციენტები k-ს ტოლია, ΔABC-ს ასახავს $\Delta A_2B_2C_2$-ში.



მივიღებთ $A_2B_2=kAB;$ $B_2C_2=kBC,$ $A_2C_2=kAC$. (1)-ის თანახმად, $A_1B_1=kAB,$ $B_1C_1=kBC,$ $A_1C_1=kAC$. ამრიგად, $A_1B_1=A_2B_2,$ $B_1C_1=B_2C_2,$ $A_1C_1=A_2C_2$, მაშინ $\Delta A_1B_1C_1=\Delta A_2B_2C_2$ და არსებობს გადაადგილება, რომელიც $\Delta A_2B_2C_2$-ის ასახავს $\Delta A_1B_1C_1$-ში. ამრიგად, დასახელებული ჰომოთეტიითა და გადაადგილებით ΔABC აისახება $\Delta A_1B_1C_1$-ში. როგორც წინა ამოცანაში ვაჩვენეთ ეს კომპოზიცია მსგავსების ასახვაა — $\Delta A_1B_1C_1$ მსგავსია ΔABC-სი.

სამკუთხედების მსგავსების ნიშანი (მსგავსება ორი კუთხის ტოლობით): **თუ ერთ სამკუთხედის ორი კუთხე მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის ტოლია, მაშინ სამკუთხედები მსგავსია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედში $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, მაშინ, ცხადია, $\angle C=\angle C_1$. სინუსების თეორემის თანახმად, ΔABC–ში

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin C}{\sin B}.$$

ანალოგიურად, $A_1B_1C_1$-ში $\frac{A_1B_1}{A_1C_1}=\frac{\sin C_1}{\sin B_1}$. კუთხეთა ტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A_1B_1}{A_1C_1}, \qquad \frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}$$

ანალოგიურად, მივიღებთ, რომ $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}$. ამრიგად, მოცემული სამკუთხედების გვერდები პროპორციულია. მაშინ, წინა თეორემის თანახმად, სამკუთხედები მსგავსია.

სამკუთხედების მსგავსების ნიშანი (ორი პროპორციული გვერდთა და მათ შორის კუთხით): **თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი პროპორციულია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის და ამ გვერდებს შორის კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.**

დამტკიცება: ვთქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებში

$A_1B_1=kAB,$ $B_1C_1=kBC,$ $\angle B_1=\angle B$. მაშინ, კოსინუსების თეორემით,

$A_1C_1^{\,2}=A_1B_1^{\,2}+B_1C_1^{\,2}-2A_1B_1\cdot B_1C_1\cos B_1$; $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$. პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ $A_1C_1^{\,2}=k^2AB^2+k^2BC^2-2k^2ABC\cos B=k^2AC^2$. ამრიგად, $A_1C_1=kAC$ და ყველა გვერდი ამ ორი სამკუთხედისა აღმოჩნდა პროპორციული. ამ შეთხვევაში კი, როგორც ზემოთ დავამტკიცეთ, სამკუთხედები მსგავსია.

საკონტროლო წერა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი:

1 $\left(\frac{1000}{n}\right)$ მიმდევრობა

ა) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა

ბ) არ არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა

გ) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა

დ) n-ის ზოგიერთი მნიშვნელობისთვის არის უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა.

2 $\left(\frac{n^2-16}{9274\cdot n}\right)$ მიმდევრობა

ა) არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა

ბ) არ არის უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა

გ) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა

დ) n-ის ზოგიერთი მნიშვნელობისთვის არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა.

3 თუ (a_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა, (b_n) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა, მაშინ (a_n+b_n)

ა) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა

ბ) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა

გ) არც უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა და არც უსასრულოდ დიდი

დ) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაც არის და უასასრულოდ დიდიც.

4 ვთქვათ, $f(x)=[x]+\{x\}$ (გაიხსენეთ, $[x]$ არის x-ის მთელი ნაწილი, $\{x\}$ — x-ის წილადი ნაწილი). მაშინ f არის

ა) პერიოდული ფუნქცია და მისი პერიოდია ნებისმიერი მთელი რიცხვი

ბ) პერიოდული ფუნქციაა და მისი პერიოდია 1

გ) პერიოდული ფუნქციაა და მისი პერიოდია ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი

დ) არაპერიოდული ფუნქციაა.

5 თუ გეომეტრიულ ფიგურას აქვს სამზე მეტი სიმეტრიის ღერძი, მაშინ ეს ფიგურაა

ა) შეიძლება იყოს სამკუთხედი

ბ) შეიძლება იყოს ტრაპეცია

გ) შეიძლება იყოს ოთხკუთხედი

დ) აუცილებლად ოთხკუთხედია.

6 α^0-იანი კუთხის რადიანული ზომაა

ა) $\pi\ \alpha$ რად. ბ) $\frac{\pi}{\alpha}$ რად გ) $\frac{\pi\alpha}{360}$ რად. დ) $\frac{\pi\alpha}{180}$ რად.

ამოხსენით ამოცანები

7 იპოვეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც მიიღება $y=x^2$ პარაბოლისგან $x'=x+1$, $y'=y-3$ პარალელური გადატანით.

8 საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები: $A(-1;\ 2)$. $B(3;\ 2)$, $C(3;\ -1)$, $D(-1;\ -1)$. ამავე სიბრტყეზე წარმოადგინეთ (გამოსახეთ) ოთხკუთხედი, რომელიც მიიღება $ABCD$ ოთხკუთხედისგან H_0^3 ჰომოთეტიით (O კოორდინატთა სათავეა).

მითითებები

1	2	3	4	5	6
ა	გ	ბ	დ	გ	დ

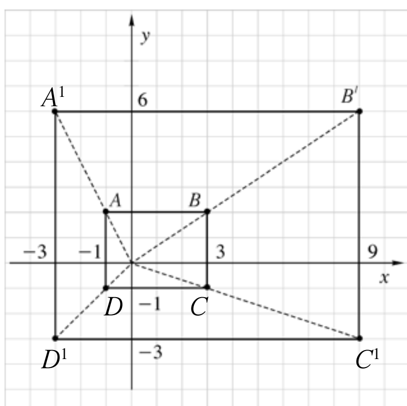
7

$$\begin{array}{l|c|l} x'=x+1 & \Rightarrow & x'=x-1 \\ y'=y-3 & & y'=y+3 \end{array}$$

$y=x^2 \quad \Rightarrow \quad y'+3=(x'-1)^2,\ y'=(x')^2-2(x')-2$

მიღებული პარაბოლის განტოლებაა $y=x^2-2x-2$.

8



შეფასების სქემა

პირველი ექვსი ამოცანიდან თითოეულის სწორი პასუხი შეფასდეს 1 ქულით; მე-7 და მე-8 ამოცანებიდან თითოეულის სრულყოფილი ამოხსნა — 2 ქულით. ამასთანვე, შესაძლებელია ამ ამოცანათა ამოხსნების ნაწილობრივი შეფასებაც. მაგალითად, მე-7 ამოცანაში „ძველი" კოორდინატების „ახლით" გამოსახვაში შეიძლება დაიწეროს 0,5 ქულა; ამ გამოსახულებების საწყის განტოლებაში სწორი ჩასმისთვის — კიდევ 1 ქულა, მე-8 ამოცანაში $ABCD$ ოთხკუთხედის სწორი გამოსახვისას — 0,5 ქულა, A', B', C' და D' წერტილებიდან ერთის ამ ორის სწორი გამოსახვისას — კიდევ 0,5 ქულა; მესამე წერტილისთვის — კიდევ 0,5 ქულა.

1.7. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები
სინუსისა და კოსინუსის პერიოდულობა

მიზანი: ნებისმიერი რიცხვის სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის შემოღება. სინუსისა და კოსინუსის პერიოდულობის განხილვა, უმცირესი დადებითი პერიოდის დასახელება. სამოტივაციო ამოცანის განხილვით ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობის ხაზგასმა.

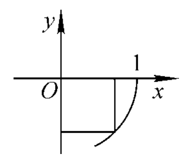
გაკვეთილს ვიწყებთ მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გახსენებით. გადავდივართ სახელმძღვანელოში მოყვანილი პრაქტიკული ამოცანის განხილვაზე, რომელსაც მივყავართ კუთხისა და კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცნებათა განზოგადებამდე.

განვსაზღვრეთ ნებისმიერი რიცხვის სინუსი და კოსინუსი: t რიცხვის სინუსი არის ერთეულოვან წრეწირზე ამ რიცხვის შესაბამისი $P_t(x, y)$ წერტილის ორდინატი, $\sin t=y$; კოსინუსი — P_t-ს აბსცისა, $\cos t=x$; ნებისმიერი t რიცხვისთვის, რომლისთვისაც $\cos t\neq 0$, განვსაზღვრეთ t რიცხვის ტანგენსი — $\operatorname{tg} t=\dfrac{\sin t}{\cos t}$. სინუს და კოსინუს ფუნქციებიდან თითოეულის განსაზღვრის არე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლეა, მნიშვნელობათა სიმრავლე — $[-1;\ 1]$ შუალედი. სინუსი და კოსინუსი პერიოდული ფუნქციებია, თითოეული მათგანის უმცირესი დადებითი პერიოდი არის 2π.

მითითებები

13. P_t წერტილის განსაზღვრებიდან ვღებულობთ: $P_0=(1;\ 0)$, $P_{\frac{\pi}{2}}=(0;\ 1)$, $P_{\pi}=(-1;\ 0)$, $P_{\frac{3\pi}{2}}=(0;\ -1)$.

$P_{\frac{\pi}{4}}$, $P_{\frac{3\pi}{4}}$, $P_{\frac{5\pi}{4}}$ და $P_{\frac{7\pi}{4}}$ წერტილები შესაბამისი მეოთხედების ბისექტრისებს ეკუთვნის, ამიტომ მათი კოორდინატების დადგენა კვადრატის დიაგონალის მიხედვით კვადრატის გვერდის პოვნას უკავშირდება. მაგალითად, $P_{\frac{7\pi}{4}}$-ის კოორდინატებისთვის ვღებულობთ:



$$\begin{cases} x=-y \\ x^2+y^2=1 \\ x>0 \end{cases}$$

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

ამრიგად,

$P_{\frac{\pi}{4}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_{\frac{3\pi}{4}}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $P_{\frac{5\pi}{4}}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $P_{\frac{7\pi}{4}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

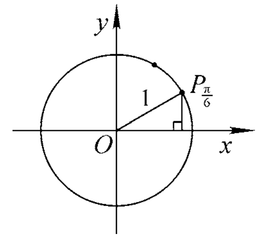
•

α	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	1		-1	0	1		-1	0

- $P_{-\frac{\pi}{4}}=R_0^{-\frac{\pi}{4}}(P_0)=R_0^{-\frac{\pi}{4}+2\pi}=R_0^{\frac{7\pi}{4}}$. მაშასადამე, $P_{-\frac{\pi}{4}}=P_{-\frac{7\pi}{4}}=$ და

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{tg}\frac{7\pi}{4}=-1.$$

14 P_0, $P_{\frac{\pi}{2}}$, P_{π}, $P_{\frac{3\pi}{2}}$ წერტილების კოორდინატები წინა ამოცანაში ვიპოვეთ.



30^0-იანი კუთხის პირდაპირ მდებარე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია, ამიტომ

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

ვიპოვოთ $\cos\frac{\pi}{6}$; გვაქვს:

$$\cos^2\frac{\pi}{6}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

და, რადგან I მეოთხედის წერტილების აბსცისა არაუარყოფითია, ვღებულობთ: $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ამრიგად, $P_{\frac{\pi}{6}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ: $P_{\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$P_{\frac{2\pi}{3}}=\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $P_{\frac{5\pi}{6}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; $P_{\frac{7\pi}{6}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$;

$P_{\frac{4\pi}{3}}=\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $P_{\frac{5\pi}{3}}=\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $P_{\frac{11\pi}{6}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

- შევნიშნოთ, რომ $-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}-2\pi$ და $-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}-2\pi$, ამიტომ

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2},\ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
$$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}.$$

15 ა) $\frac{13\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi$, $\sin\frac{13\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ბ) $-\frac{7\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-4\pi$, $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$.

16 ა) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}+\cos^3\frac{\pi}{3}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^3=1\frac{1}{8}$;

ბ) $\left(\mathrm{tg}30^0+\frac{\mathrm{tg}45^0}{\mathrm{tg}30^0}\right)\cdot\cos30^0=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$;

გ) $\frac{\sin^2 30^0+\cos^4 45^0}{\mathrm{tg}^2 60^0}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{6}$;

დ) $\frac{2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{3\sqrt{6}}{2}=-\sqrt{6}$.

17 ა) $\frac{\pi}{5}$ — I მეოთხედი;

ბ) $\frac{7\pi}{5}$ — III მეოთხედი;

გ) $\frac{5\pi}{4}$ — III მეოთხედი;

დ) $-\frac{11\pi}{9}$ — II მეოთხედი;

ე) -1 — IV, გავითვალისწინეთ, რომ $x\approx3{,}14$ და $-1\in(-\frac{\pi}{2};0)$;

ვ) -2 — III, $(-2\in(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}))$;

ზ) 2 — II, $(2\in(\frac{\pi}{2};\ \pi))$;

თ) 3,5 — III, $(3{,}5\in(\pi;\ \frac{3\pi}{2}))$;

ი) 5,63 — IV, $(5{,}63\in(\frac{5\pi}{2};\ 2\pi))$;

კ) $-2{,}25$ — III, $(-2{,}25\in(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}))$.

18

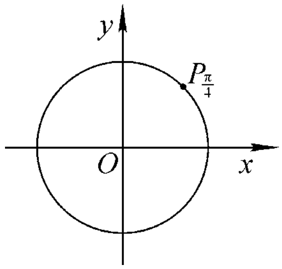
n	-2	-1	0	1	2	10
$\alpha=\frac{\pi}{6}+2\pi n$	$-\frac{23\pi}{6}$	$-\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{25\pi}{6}$	$\frac{121\pi}{6}$
მეოთხედი, რომელსაც α ეკუთვნის	I	I	I	I	I	I

19 ა) $\alpha=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$; ბ) $\alpha=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

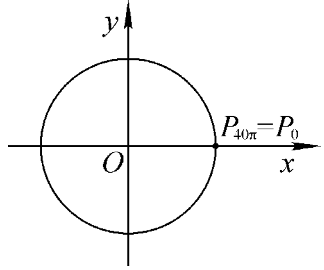
20 80 კმ/სთ$=\frac{80000}{60}$ მ/წთ$=\frac{4000}{3}$ მ/წთ; 75 სმ=0,75 მ;

წრეწირის სიგრძეა: $2\pi R=0{,}75\pi$ (მ);
სრულ ბრუნთა რიცხვია: $\left[\dfrac{40000}{3\cdot 0{,}75\pi}\right]=565$ (ბრუნი).

21 ა) $w=\dfrac{\pi}{4}$ რად.



ბ) $w=\dfrac{2\pi}{3}\cdot 60=40\pi$ რად.



22 ა) $t=\pi+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$;   ბ) $t=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$;

გ) $t=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$;   დ) $t=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$.

23 ა) $4\sin\pi-4\cos\dfrac{3\pi}{2}+3\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{tg}0=0-0+3-0=3$;

ბ) $3\cos^2\dfrac{\pi}{3}+2\sin^2\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}=3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{7}{8}$;

გ) $\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\cos^2\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-1=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}-1=0$;

დ) $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin^2\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{6}-\sin^2\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0$.

25 ა) უდიდესი მნიშვნელობაა 2, უმცირესი — 0;
ბ) უდიდესი — 3; უმცირესი — 1;
გ) უდიდესი — 5, უმცირესი — 1;
დ) უდიდესი — 4, უმცირესი — 0;
ე) უდიდესი — 1, უმცირესი — 0.

26 განსაზღვრების თანახმად: $-1\le\sin t\le 1$, ამასთანავე, $\sin t$ იღებს ნებისმიერ მნიშვნელობას $[-1;\ 1]$ შუალედიდან. ამიტომ
ა) შეუძლებელია, რადგან $\sqrt{2}>1$;

ბ) შესაძლებელია, რადგან $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;\ 1]$;

გ) შეუძლებელია, რადგან $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}>1$;

დ) შესაძლებელია, რადგან $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\in[-1;\ 1]$.

27 ა) $\dfrac{25\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+4\pi$, $\sin\dfrac{25\pi}{6}=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$;

$\cos\dfrac{25\pi}{6}=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

ბ) $-\frac{9\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}-2\pi,$ $\quad\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$

$$\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

გ) $\frac{7\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi,$ $\quad\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\cos\frac{7\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

28 მოსწავლის მსჯელობა ორივე შემთხვევაში მცდარია: რაიმე T რიცხვის პერიოდობა გულისხმობს $f(t+T)=f(t)$ ტოლობის მართებულობას განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი t-სთვის და არა ზოგიერთი t_0-ისთვის.

ა) შემთხვევაში შეამოწმეთ $\sin(t+\frac{2\pi}{3})=\sin t$ ტოლობა, მაგალითად, $t=0$-სთვის;

ბ) შემთხვევაში კი — $\cos(t+\pi)=\cos t$ ტოლობა, კვლავ $t=0$-სთვის, და დარწმუნდებით, რომ არც $\frac{2\pi}{3}$-ია პერიოდი და არც π.

29 შემოვიღოთ აღნიშვნა — $g(t)=kf(t)+b$.

განვიხილოთ $g(t+T)$, სადაც T არის f ფუნქციის პერიოდი t კი ნებისმიერი რიცხვია $f(t)$ ფუნქციის განსაზღვრის არიდან:

$$g(t+T)=kf(t+T)+b=kf(t)+b=g(t);$$

ამრიგად, $kf(t)+b$ ფუნქციაც პერიოდულია და მისი პერიოდი f ფუნქციის პერიოდია.

30 ა) $\sin\frac{9\pi}{4}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$

ბ) $\cos\frac{121\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+30\pi\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$

გ) $\sin\left(-\frac{111\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-28\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$

დ) $\cos\left(-\frac{203\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{3\pi}{4}-50\pi\right)=\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

31 შემოვიღოთ აღნიშვნა $h(x)=f(x)+g(x)$. განვიხილოთ

$$h(x+T)=f(x+T)+g(x+T)=f(x)+g(x)=h(x);$$

ამრიგად, $f(x)+g(x)$ პერიოდული ფუნქციაა და მისი პერიოდია T.

34 გამოვიყენოთ 32-ე ამოცანის შედეგი.

ა) $T=\frac{2\pi}{3};$ ბ) $T=\frac{2\pi}{5};$ გ) $T=10\pi;$

დ) $T=6\pi;$ ე) $T=2\pi;$ ვ) $T=4\pi.$

1.8. ᲕᲐᲒᲠᲫᲔᲚᲔᲑᲗ ᲢᲠᲘᲒᲝᲜᲝᲛᲔᲢᲠᲘᲣᲚᲘ ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲔᲑᲘᲡ ᲗᲕᲘᲡᲔᲑᲔᲑᲘᲡ ᲨᲔᲡᲬᲐᲕᲚᲐᲡ.

1. ტანგენსის პერიოდულობა

მიზანი: ტანგენსის თვისებების შესწავლა. მისი პერიოდულობის დასაბუთება. მოსწავლეთათვის ერთ-ერთი ნიმუშის გაცნობა — თუ როგორ შეიძლება მათთვის ცნობილი მათემატიკური აპარატით ფუნქციათა განხილვა.

ვაგრძელებთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების შესწავლას. ამჯერად ტანგენსს განვიხილავთ — ვიხსენებთ ამ ფუნქციის განსაზღვრებას; ვაგებთ ტანგენ-სების ღერძს და ამ ღერძის წერტილების ტანგენსის მნიშვნელობებს ვუკავშირებთ. ვასკვნით — ტანგენსი პერიოდული ფუნქციაა და მისი უმცირესი დადებითი პერიო-დია π.

2. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა პოვნა, ნულები; ტრი-გონომეტრიული ფუნქციების ნიშნები

მიზანი: ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შესახებ ცოდნის გაღრმავება და კალკუ-ლატორის საშუალებით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა პოვნის ჩვევების ჩამოყალიბება.

გავიხსენეთ ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, შევავსეთ ადრე მიღებული ცხრილი ახალი მონაცემებით; ყურადღება გავამახვილეთ ფუნქციათა ნიშნებზე.

ᲛᲘᲗᲘᲗᲔᲑᲔᲑᲘ

10 პასუხები ცხრილით წარმოვადგინოთ:

α	$\frac{15\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{7}$	$\frac{29\pi}{9}$	6	$\frac{10\pi}{9}$	3
$\sin\alpha$	–	–	–	–	–	+
$\cos\alpha$	+	+	–	+	–	–
$\mathrm{tg}\alpha$	–	–	+	–	+	–

12 რადგან φ მეოთხე მეოთხედს ეკუთვნის, ამიტომ $\sin\varphi<0$, $\cos\varphi>0$.

$\frac{1}{\cos^2\varphi}=1+\mathrm{tg}^2\varphi$, $\frac{1}{\cos^2\varphi}=1+\left(-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{41}{16}$, $\cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{41}}$;

$\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi=1-\frac{16}{41}=\frac{25}{41}$, $\sin\varphi=-\frac{5}{\sqrt{41}}$.

ან ასე: $\sin\varphi=\cos\varphi\cdot\mathrm{tg}\varphi=\frac{4}{\sqrt{41}}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{5}{\sqrt{41}}$.

13 ა) I; ბ) IV; გ) II; დ) IV.

14 $\mathrm{tg}\alpha$ არ არის განსაზღვრული $\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$ წერტილებში. მათგან მხოლოდ $\frac{3\pi}{2}$ ეკუთვნის დასახელებულ შუალედს.

15 ა) $t_1=\dfrac{\pi}{6}$; $t_2=\dfrac{5\pi}{6}$; ბ) $t_1=\dfrac{2\pi}{3}$; $t_2=\dfrac{4\pi}{3}$; გ) $t_1=\dfrac{\pi}{4}$; $t_2=\dfrac{5\pi}{4}$;

დ) $t_1=\dfrac{\pi}{3}$; $t_2=\dfrac{2\pi}{3}$; ე) $t_1=\dfrac{4\pi}{3}$; $t_2=\dfrac{5\pi}{3}$.

16 t ეკუთვნის II მეოთხედს, ამიტომ $\cos t<0$, $\operatorname{tg} t<0$.

$\cos^2 t=1-\sin^2 t=1-\dfrac{16}{25}=\dfrac{9}{25}$, $\cos t=-\dfrac{3}{5}$;

$\operatorname{tg} t=\dfrac{\sin t}{\cos t}=-\dfrac{4}{3}$.

3. ლუწი და კენტი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

მიზანი: ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მაგალითზე ფუნქციათა ლუწობისა და კენტობის, აგრეთვე, მონოტონურობის განხილვა — საწყისი ეტაპის ათვისება ფუნქციათა გამოკვლევის ზოგადი პრინციპების დაუფლების გზაზე.

განვსაზღვრეთ ფუნქციათა მნიშვნელოვანი თვისებები — ლუწობა, კენტობა, მონოტონურობა. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შესწავლის საფუძველზე დავასკვნით: სინუსი კენტია, კოსინუსი — ლუწი, ტანგენსი — კენტი; სინუსი ზრდადია I და IV მეოთხედებში, კლებადი — II და III მეოთხედებში; კოსინუსი ზრდადია III და IV მეოთხედებში, კლებადი — I და II მეოთხედებში; ტანგენსი ზრდადია $(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k)$ სახის ყოველ შუალედში ($k\in\mathbf{Z}$).

მითითებები

12 ა) ლუწია, მართლაც ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty;+\infty)$ და ყოველი x-სთვის განსაზღვრის არედან

$y(-x)=|\sin(-x)|\cdot\cos(-x)=|-\sin x|\cdot\cos x=|\sin x|\cdot\cos x=y(x)$;

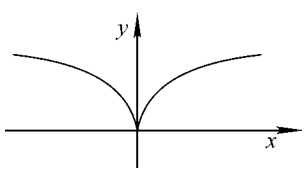
ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ

ბ) კენტია; გ) ლუწია;

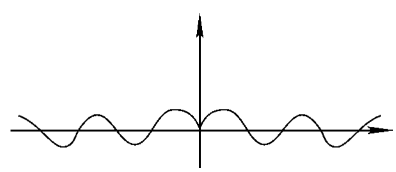
დ) არც ლუწი და არც კენტი;

ე) კენტი; ვ) ლუწი.

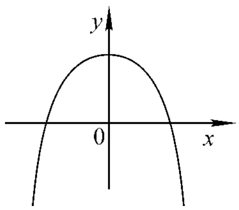
13 ა)



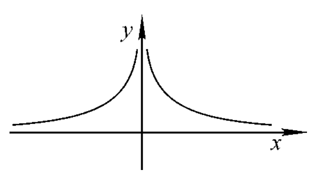
ბ)



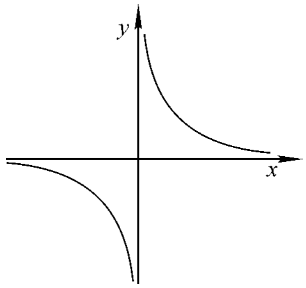
გ)



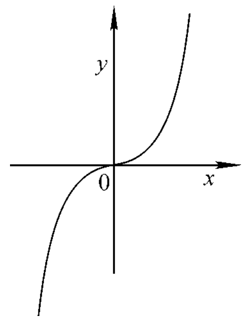
დ)



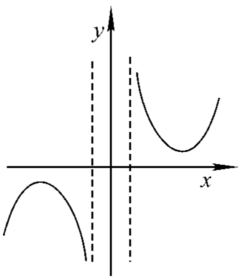
14 ა)



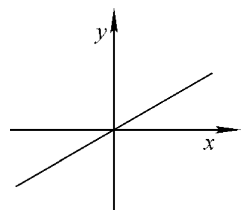
ბ)



გ)



დ)



15 გაითვალისწინეთ, რომ $0^0<1^0<1$რად$<\frac{\pi}{2}$რად; tg პირველ მეოთხედში ზრდადია, ამიტომ

$$tg1-tg1^0>0.$$

16 ა) $\sin 28^0<\sin 36^0$; ბ) $\cos 28^0>\cos 36^0$;

გ) $\sin\frac{4\pi}{5}<\sin\frac{3\pi}{5}$; დ) $\cos\frac{4\pi}{5}<\cos\frac{3\pi}{5}$;

ე) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)<\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$; ვ) $\cos\frac{5\pi}{4}>\cos\frac{6\pi}{5}$.

17 ა) $\mathrm{tg}t_2-\mathrm{tg}t_1>0$; ბ) $\sin t_2-\sin t_1>0$;
გ) $\cos t_2-\cos t_1<0$.

18 ა) $\cos 1<1$ (რადგან $0<1<\frac{\pi}{2}$ და მახვილი კუთხის კოსინუსი ნაკლებია 1-ზე);

ბ) $\mathrm{tg}2<1$ $(\frac{\pi}{2}<2<\pi)$; გ) $\sin 2<1$; დ) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}<\mathrm{tg}0{,}8$.

19 ა) $t_1<t_2$; ბ) $t_1<t_2$; გ) $t_1>t_2$.

20 ა)

$$\left.\begin{array}{l}\sin 780^0=\sin 60^0>0\\ \cos 765^0=\cos 45^0>0\\ \mathrm{tg}398^0=\mathrm{tg}38^0>0\\ \sin 1560^0=\sin 120^0>0\end{array}\right| \quad \sin 780^0\cdot\cos 765^0\cdot\mathrm{tg}398^0\cdot\sin 1560^0>0;$$

ბ)

$$\left.\begin{array}{l}\cos 1020^0=\cos 300^0>0\\ \mathrm{tg}1845^0=\mathrm{tg}45^0>0\\ \mathrm{tg}(-1485^0)=\mathrm{tg}(-45^0)<0\end{array}\right| \quad \cos 1020^0\cdot\mathrm{tg}1845^0\cdot\mathrm{tg}(-1485^0)<0;$$

გ) $\left.\begin{array}{l} tg(-1986^0)=-tg6^0<0 \\ \cos2007^0=\cos207^0<0 \\ \sin(-2006^0)=\sin(-206^0)>0 \end{array}\right| \quad tg(-1986^0)\cdot\cos2007^0\cdot\sin(-2006^0)>0;$

დ) $\sin\frac{135\pi}{3}=0 \quad \Bigg| \quad \sin\frac{135\pi}{3}\cdot\cos\left(-\frac{128\pi}{6}\right)\cdot tg\frac{247\pi}{5}=0.$

4. დაყვანის ფორმულები

მიზანი: დაყვანის ფორმულების გამოყვანა და მათი გამოყენების უნარის გამომუშავება.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განხილვის შედეგად ვეცნობით ე.წ. დაყვანის ფორმულებს და მათი გამოყენების ნიმუშებს.

მითითებები

13 ა) $10tg135^0\cdot\sin225^0\cos315^0=10tg(180^0-45^0)\cdot\sin(180^0+45^0)\cdot\cos(360^0-45^0)=$

$=10(-tg45^0)(-\sin45^0)\cdot\cos45^0=10\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5;$

ბ) $16\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot tg\frac{4\pi}{3}\cdot tg\frac{\pi}{3}=16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=12.$

14 ა) $\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(180^0-\alpha)}+\frac{\cos\alpha}{\sin(90^0+\alpha)}+1=\frac{-\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+1=1;$

ბ) $\frac{tg(270^0-\alpha)\sin130^0\cos320^0\sin270^0tg(180^0-\alpha)}{\cos50^0\sin220^0\cos360^0}=\frac{\frac{1}{tg\alpha}\cos40^0\cos40^0(-1)(-tg\alpha)}{\cos50^0(-\sin40^0)\cdot1}=$

$=-\frac{\sin^250^0}{\cos^250^0}=-tg^250^0.$

15 ა) $\sin\frac{28\pi}{3}=\sin(8\pi+\pi+\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6};$

ბ) $\cos\frac{31\pi}{4}=\cos(6\pi+\pi+\frac{3\pi}{4})=-\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4};$

გ) $tg\left(-\frac{58\pi}{3}\right)=tg(-19\pi-\frac{\pi}{3})=-tg\frac{\pi}{3}=-\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\frac{1}{tg\frac{\pi}{6}};$

დ) $\sin\left(-\frac{29\pi}{6}\right)=\sin(-4\pi-\frac{5\pi}{6})=-\sin\frac{5\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{6}.$

1.9. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკები

მიზანი: ფუნქციათა თვისებების გამოყენებით მათი გრაფიკების აგების ჩვევების გამომუშავება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მაგალითზე.

გავიხსენეთ სინუს, კოსინუს და ტანგენს ფუნქციების თვისებები — განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე, ლუწობა, კენტობა, ზრდადობა, კლებადობა. გრაფიკების აგებისას ასევე გამოვიყენეთ ცენტრული და ღერძული სიმეტრიები, პარალელური გადატანა.

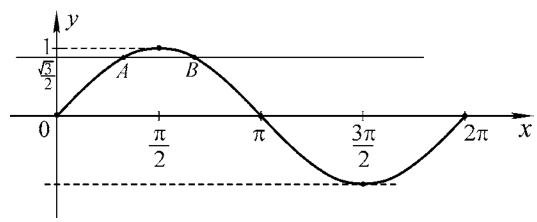
♦ კლასში შესაძლებელია ამოიხსნას ამოცანები: 1-4; 9, 12, 13, 16, 21, 22;

დამოუკიდებლად შესრულდეს ამოცანები შემდეგი სავარჯიშოებიდან: 5-8, 10, 11, 14, 15, 17-20.

პასუხები და მითითებები:

9 OY ღერძიდან $\frac{5\pi}{6}$-ით დაშორებული წერტილების აბსცისებია $\frac{5\pi}{6}$ ან $-\frac{5\pi}{6}$; $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$. ამრიგად, საძიებელი წერტილებია $\left(\frac{5\pi}{6};\ \frac{1}{2}\right)$ და $\left(-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{1}{2}\right)$.

10 A და B წერტილების აბსცისების საპოვნელად უნდა ვიპოვოთ $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ განტოლების ის ფესვები, რომელიც $[0; 2\pi]$ შუალედს ეკუთვნის — $x_1=\frac{\pi}{3}$ და $x_2=\frac{2\pi}{3}$. ამრიგად, $A=\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ და $B=\left(\frac{2\pi}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



11 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x\in[0; 2\pi]$. გვაქვს ორი ფესვი: $x_1=\frac{\pi}{4}$ და $x_2=\frac{3\pi}{4}$.

12 • თუ $\sin x=\frac{1}{2}$, $x\in[0;\ 2\pi]$, მაშინ $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$ — სხვა მნიშვნელობა არ არსებობს. $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$. ამრიგად, სინუსოიდასა და $y=\frac{1}{2}$ წრფის გადაკვეთის წერტილები, როცა $x\in[0; 2\pi]$, არის $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{1}{2}\right)$ და $\left(\frac{5\pi}{6};\ \frac{1}{2}\right)$.

• სინუსის პერიოდულობის გამო, ვღებულობთ: $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ყველა ფესვი მოიცემა ფორმულებით:

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ (n\in\mathbf{Z}).$$

შესაძლებელია ამ ფორმულათა ერთიანი სახით წარმოდგენაც.

13 ვთქვათ, შევადგინეთ ამოცანა. ვიპოვოთ $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ განტოლების: ა) ფესვები $[0, 2\pi]$ შუალედში, ბ) ყველა ფესვი.

- დავრწმუნდეთ, რომ $x=\frac{5\pi}{4}$ და $x=\frac{7\pi}{4}$ მნიშვნელობები $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ განტოლების

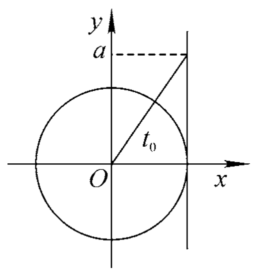
ფესვებია: $\sin\frac{5\pi}{4}=\sin(\pi+\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}= =-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{7\pi}{4}=\sin(\frac{7\pi}{4}-2\pi)=\sin(-\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

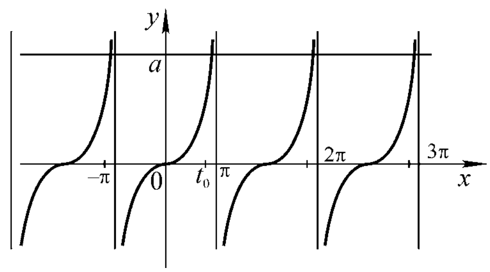
სხვა ფესვი ამ შუალედში არ არსებობს.

- პერიოდულობის გათვალისწინებით, გვექნება
$x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$ და $x=\frac{7\pi}{4}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

14 არ კვეთს, რადგან $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$.
- ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(-\infty;\ +\infty)$.

ეს ნიშნავს, რომ $y=\mathrm{tg}x$ ფუნქციის მნიშვნელობა ნებისმიერი რიცხვის ტოლი შეიძლება გახდეს, მათ შორის a-ს ტოლიც. თვალსაჩინოების მიზნით დავხედოთ სურათებს:





ყოველი $a\in\mathbf{R}$-სთვის მოიძებნება $t_0\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, ისეთი, რომ $\mathrm{tg}t_0=a$.

$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში, ფუნქციის ზრდადობის გამო, ასეთი t_0 წერტილი ერთადერთია. პერიოდულობის გათვალისწინებით $(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k)$, $(k\in\mathbf{Z})$ სახის ყოველ შუალედშიც იარსებებს $t_0+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ სახის რიცხვები:

$$\mathrm{tg}(t_0+\pi k)=a.$$

ამრიგად, ნებისმიერი a ნამდვილი რიცხვისთვის $y=a$ წრფე კვეთს $y=\mathrm{tg}x$ ფუნქციის გრაფიკს (უამრავ წერტილში).

16 • $x_1=-\frac{\pi}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{3}$. სხვა ფესვი $[-\pi;\ \pi]$ შუალედში არ არსებობს.

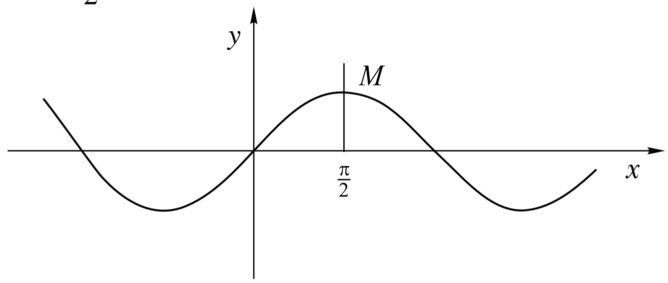
- $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$,

ან, გაერთიანებული სახით, — $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

17 • $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$.

- $(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$ შუალედების სიმრავლე.

18 მაგალითად, შეიძლება ავირჩიოთ $(\frac{\pi}{2};0)$ წერტილზე x ღერძის მართობულად გამავალი წრფე;



- $M(\frac{\pi}{2};\ 1)$;
- $x=\frac{\pi}{2}$.
- $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}$.

19
- $x\in(\frac{3\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4})$;
- $(\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{9\pi}{4}+2\pi k),\ \ k\in\mathbf{Z}$.

20
- $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$;
- $[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k],\ \ k\in\mathbf{Z}$.

21
- $x_1=\frac{\pi}{3}$ და $x_2=\frac{5\pi}{3}$.
- $x\in(\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3})$;
- $(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k),\ \ k\in\mathbf{Z}$.

1.10. ტრიგონომეტრიული განტოლებები

მიზანი. განტოლებათა ამოხსნის გრაფიკული ხერხის გამოყენების უნარის განვითარება. ფუნქციათა გრაფიკებისა და თვისებების გამოყენება განტოლებების ამოხსნისას.

გაკვეთილს ვიწყებთ იმ მასალის გამეორებით, რომლებიც გამოიყენება განტოლებების ამოხსნისას.

ვიწყებთ სინუსის თვისებების გახსენებით, სინუსის გრაფიკის წარმოდგენით;

— რა არის სინუსის უმცირესი დადებითი პერიოდი?

— რომელ შუალედებშია სინუსი ზრდადი ფუნქცია?

— რომელ შუალედებშია სინუსი კლებადი ფუნქცია?

— რა შუალედია სინუსის მნიშვნელობათა სიმრავლე?

— გამოვსახოთ სინუსის გრაფიკი.

— ახლა $sinx=m$ განტოლების ამოხსნა დავუკავშიროთ $y=m$ და $y=sinx$ ფუნქციების გრაფიკებს. როგორ ვიპოვოთ გრაფიკების გამოყენებით განტოლების ფესვები?

— რა შემთხვევაში არ კვეთს $y=m$ წრფე $y=sinx$-ის გრაფიკს? მაშასადამე, რა შემთხვევაში არა აქვს განტოლებას ფესვები?

— რომელ შუალედში კვეთს გრაფიკს $y=m$ წრფე მხოლოდ ერთ წერტილში? მიუთითეთ ეს წერტილი.

ამ კითხვებისა და მათზე პასუხების გამოყენებით ჩატარებულ მსჯელობას მივყავართ *arcsin*-ის შემოღებამდე — *arcsinm* არის რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედს და რომლის სინუსი m-ის ტოლია.

ამის შემდეგ გადავდივართ π სიგრძის მომდევნო შუალედის განხილვაზე — ამ შუალედში სინუსი კლებადია და კვლავ მხოლოდ ერთხელ იღებს m-ის ტოლ მნიშვნელობას. ეს რიცხვი $(\pi-arcsinm)$-ის ტოლია. სასურველია ეს პასუხი დავასაბუთოთ — ვიყენებთ *arcsinm*-ის განსაზღვრებას და დაყვანის ფორმულას. 2π სიგრძის შუალედის ორი ამონახსნის დასახელების შემდეგ აუცილებლად უნდა მივუთითოთ, რომ ეს რიცხვები ტოლია, როცა $m=1$, ან როცა $m=-1$.

პერიოდულობის გათვალისწინებით, მივიღებთ საბოლოო ფორმულებს:

$$x=arcsinm+2\pi k,\ k\in Z$$

$$x=\pi-arcsinm+2\pi k,\ k\in Z.$$

შეიძლება ზოგიერთმა მასწავლებელმა აირჩიოს ყველა ამონახსნის ამ ფორმულებით წარმოდგენა და მათი გამოყენება განტოლებების ამოხსნის დროს. ზოგიერთმა შეიძლება აირჩიოს ამონახსნის ერთი ფორმულით წარმოდგენა:

$$x=(-1)^k\ arcsinm+\pi k,\qquad k\in Z$$

და მისი ასეთი სახით გამოყენება.

ანალოგიურად მიმდინარეობს სასწავლო პროცესი $cosx=m$ და $tgx=m$ განტოლებების განხილვის დროს. სასურველია არკსინუსის, არკკოსინუსისა და არკტანგენსის მნიშვნელობების პოვნის მაგალითების განხილვა. ყურადღება გავამახვილოთ იმაზე, რომ, კოსინუსების შემთხვევაში ვიღებთ $[0;\pi]$ შუალედს, რომელშიც ეს ფუნქცია მონოტონურია (კლებადია), ყოველ მნიშვნელობას ერთხელ იღებს და ამ შუალედში აღებული ამონახსნია, *arccosm,* ანუ $cos(arcosm)=m$, ვაჩვენოთ, რომ $\boldsymbol{arccos(-m)=\pi-arccosm}$.

დაყვანის ფორმულის თანახმად, $cos(\pi-arccosm)=-cos(arccosm)=-m.$

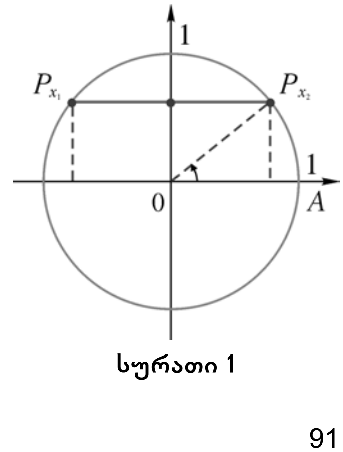
განსაზღვრების თანახმად, $cos(arccos(-m))=-m.$

ამასთანავე, ორივე კუთხე $[0;\ \pi]$ შუალედს ეკუთვნის, ამიტომ ტოლი კუთხეებია. ეს მნიშვნელოვანი ფაქტია, რადგან კოსინუსის ანალოგიით, მოსწავლეები *arccos*-საც თვლიან ლუწ ფუნციად და მიიჩნევენ, რომ $arccos(-m)=arccosm$**.**

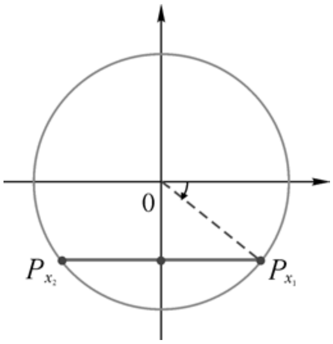
სასურველია $\boldsymbol{arcsin(-m)=-arcsinm}$ და $\boldsymbol{arctg(-m)=-arctgm}$ ფორმულების დასაბუთებაც.

ჯგუფური მუშაობა

ჯგუფური მუშაობის დავალება ეხება ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნას ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით — რიცხვის სინუსი, არის ერთეულოვან წრეწირზე ამ x-ის შესაბამისი P_x წერტილის ორდინატი; თუ $|m|>1$, მაშინ, ცხადია, $sinx=m$ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი, რადგან $|sinx|\leq 1$, $-1\leq sinx\leq 1$. თუ $|m|<1$, მაშინ ერთეულოვან წრეწირზე ორი წერტილის პოვნა შეიძლება, რომელთა სინუსი m-ის ტოლია, არსებობს ორი წერტილი P_{x_1} და P_{x_2}, რომელთა ორდინატები m-ის ტოლია. P_{x_1} წერტილის



სურათი 1



სურათი 2

შესაბამისი რიცხვები შეიძლება ჩავწეროთ $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედიდან აღებული რიცხვის მიხედვით — x_1=*arcsinm*+$2\pi k$, *arcsinm* არის ის ერთადერთი რიცხვი, რომელიც დადებითი *m*-ისთვის მითითებულია სურათი-1-ზე. პირველ შემთხვევაში გვაქვს დადებითი *x* რიცხვი 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, მეორე შემთხვევაში — უარყოფითი *x* რიცხვი — $-\frac{\pi}{2}$-დან 0-მდე.

მოსწავლეები ცალკე განიხილავენ შემთხვევებს: $m=1$, $m=-1$.

ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით შეიძლება *cosx=m* და *tgx=m* განტოლებების ამოხსნების ილუსტრირებაც. ჯგუფური მუშაობის ჩატარების ფორმა სხვადასხვა შეიძლება იყოს. მას შეჯიბრების სახეც შეიძლება მივცეთ. მაგალითად, კლასს ვყოფთ სამ ჯგუფად, ვავალებთ სამი სხვადასხვა განტოლების ამონახსნების ფორმულების გამოყვანას ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით. თითოეული გუნდის კაპიტანს შეიძლება დავავალოთ მოწინააღმდეგე გუნდის იმ წევრის დასახელება, რომელმაც უნდა გააკეთოს ამოხსნის პროცესის პრეზენტაცია. კითხვის დასმაც მოწინააღმდეგე გუნდის კაპიტნის დასახელებული მოსწავლის მიერ მოხდება. მასწავლებელი წერს ქულებს — პრეზენტაციის, კითხვების, მათზე პასუხების მიხედვით. ქულების საერთო რაოდენობის მიხედვით დგინდება გამარჯვებული გუნდი.

პასუხები და მითითებები

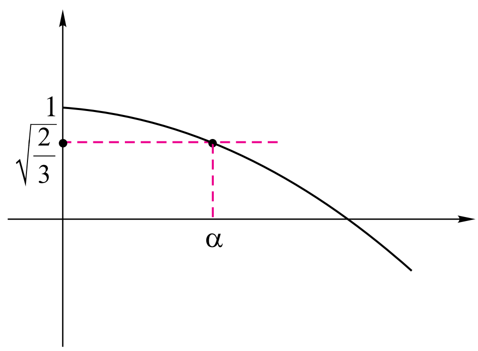
1 — **12** ამოხსნისას მოსწავლეები შეიძლება აქტიურად იყენებდნენ ცხრილებს.

13 ა) *arcsin*π გამოსახულებას აზრი არა აქვს, რადგან ნებისმიერი *x*-სთვის $|sinx|\leq 1$, ხოლო $\pi>1$. მაშასადამე, არ არსებობს ისეთი *x* რიცხვი, რომ $sinx=\pi$.

ანალოგიურად, არა აქვს აზრი ბ), გ), ვ), ზ), თ) შემთხვევებში წარმოდგენილ გამოსახულებებს.

დ) *tg* ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(-\infty;+\infty)$, ამიტომ ნებისმიერი *a* რიცხვისთვის *arctga* გამოსახულებას აზრი აქვს.

ე) $|cosx|\leq 1$, $\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|<1$. მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი α რიცხვი $[0;\ 2\pi)$ შუალედიდან, რომ $cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$.



ი) $\left|\frac{3}{7}\right|<1$, ამიტომ $sinx=\frac{3}{7}$ განტოლებას აქვს ამონახსნი. შესაბამისად, აზრი აქვს $arcsin\frac{3}{7}$ გამოსახულებასაც.

14 ა) $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$;

ბ) $arcsin0+arccos0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$;

გ) $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+arccos\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}$;

დ) $arcsin(-1)+arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$.

15 ა) $cosx=\frac{1}{2}$

$x=\pm arccos\frac{1}{2}+2\pi k=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in Z.$

ბ) $cosx=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\pm arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi k=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, \quad k\in Z.$

დ) $cosx=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in Z.$

16 ა) $2cosx+\sqrt{3}=0, \quad cosx=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in Z.$

ბ) $\sqrt{2}\,cosx-1=0, \quad cosx=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, \quad k\in Z.$

გ) $2cosx+\sqrt{2}=0, \quad cosx=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, \quad k\in Z.$

დ) $2cosx-1=0, \quad cosx=\frac{1}{2}, \quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in Z.$

17 ა) $sinx=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k, \quad k\in Z.$

ბ) $sinx=\frac{1}{2}, \quad x=(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+\pi k, \quad k\in Z.$

22 ა) $cos(\frac{\pi}{6}-2x)=-1$

$\frac{\pi}{6}-2x=\pi+2\pi k, \quad k\in Z$ (ცხადია, არ იქნებოდა შეცდომა $\pm\pi+2\pi k$ გამოსახულების გამოყენებაც, თუმცა ის სიმარტივით ჩამოუვარდება $\pi+2\pi k$-ს).

$-2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \quad x=-\frac{5\pi}{12}-\pi k, \quad k\in Z.$

იქნებ მოსწავლეებს ასეთი გზაც დააინტერესებს. მათ იციან, რომ $cos(-t)=cost$. ამიტომ მოცემულ განტოლებას, ასე წარმოადგენენ

$cos(2x-\frac{\pi}{6})=-1, \quad 2x-\frac{\pi}{6}=\pi+2\pi k, \quad x=\frac{7\pi}{12}+\pi k, \quad k\in Z.$

მოსწავლეებმა უნდა იცოდნენ, რომ ამონახსნთა სიმრავლე ცალსახად არ წარმოიდგინება ხოლმე.

ბ) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$,

$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k,\quad k\in Z,$

$-\frac{x}{4}=-\frac{\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,$

$x=\frac{4\pi}{3}-(-1)^k\frac{4\pi}{3}-4\pi k,\quad k\in Z.$

ან ასე: $2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$, $\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k,$

$x=\frac{4\pi}{3}+(-1)^{k+1}\frac{4\pi}{3}+4\pi k,\quad k\in Z$

23 ა) $2cosx-a^2+1=0$

$cosx=\frac{a^2-1}{2}$, $|cosx|\leq 1$, ამიტომ $\left|\frac{a^2-1}{2}\right|\leq 1$,

$-1\leq\frac{a^2-1}{2}\leq 1$, $-2\leq a^2-1\leq 2$, $-1\leq a^2\leq 3$,

$a\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$,

ბ) $sinx=2a+1$

$-1\leq 2a+1\leq 1$,

$-2\leq 2a\leq 0$, $-1\leq a\leq 0$

$a\in[-1;0]$.

გ) $3tgx=a$, tg ფუნქცია იღებს ნებისმიერ მნიშვნელობას, შესაბამისად, $a\in(-\infty;+\infty)$.

დ) $3sinx=a^2-1$

$sinx=\frac{a^2-1}{3}$, $-1\leq\frac{a^2-1}{3}\leq 1$,

$-3\leq a^2-1\leq 3$, $-2\leq a^2\leq 4$,

$a\in[-2;2]$.

24 $sin(x+\frac{\pi}{6})=-1$, $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

$x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$. თუ $k=0$, მივიღებთ ამონახსნს, რომელიც არ ეკუთვნის $(\pi;\frac{3\pi}{2})$ შუალედს.

თუ $k=1$, $x=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{4\pi}{3}$, $\pi<\frac{4\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}$,

პასუხი: $x=\frac{4\pi}{3}$.

ბ) $sinx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$,

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k$.

თუ $k=1$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}\notin\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$;

თუ $k=2$, $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}\in\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

პასუხი: $x=\frac{5\pi}{3}$

გ) $2sin^2x=1$, $x\in\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

$sinx=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ან $sinx=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედში sin ფუნქცია არადადებითია, ამიტომ ვიკვლევთ მხოლოდ $sinx=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ განტოლებას; მისი ფესვებიდან მხოლოდ $\frac{5\pi}{4}$ ეკუთვნის მოცემულ შუალედს.

პასუხი: $x=\frac{5\pi}{4}$.

დ) $sin^2x-cos^2x=0$, $x\in\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

$sinx-cosx=0$, ან $sinx+cosx=0$. რადგან $cosx\neq0$, ამიტომ მასზე გაყოფით ვღებულობთ: $tgx=1$, ან $tgx=-1$. მხოლოდ პირველ განტოლებას აქვს ფესვი მოცემულ შუალედში: $\frac{\pi}{4}$.

პასუხი: $x=\frac{\pi}{4}$.

25 I. $cos(\frac{\pi}{3}-2x)=\frac{1}{2}$, $cos(2x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$, $2x-\frac{\pi}{3}=\pm arccos\frac{1}{2}+2\pi k$,

$2x=\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

ა) თუ $k=0$, მაშინ ერთ-ერთი ფესვია $x=\frac{\pi}{3}$ — ეს უმცირესი დადებითი ამონახსნია;

ბ) განვიხილოთ $k=-1$ და $k=1$ შემთხვევების შესაბამისი ფესვები: $-\pi$, $-\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$. მათგან მოცემულ შუალედს ეკუთვნის π და $\frac{4\pi}{3}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $k>1$ ან $k<-1$ შემთხვევებში მიღებული ფესვები მოცემულ შუალედს არ ეკუთვნის.

გ) $(-\pi; \frac{\pi}{2})$ შუალედს ეკუთვნის ფესვები: $-\frac{2\pi}{3}$; 0; $\frac{\pi}{3}$.

საკონტროლო წერა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი:

1 $\cos\frac{2\pi}{3}=$

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $-\frac{1}{2}$ გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ დ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 cost=sint ტოლობას ერთეულოვან წრეწირზე შეესაბამება წერტილები:

ა) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ და $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ბ) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ და $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

გ) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ და $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ დ) (0; 1) და (1; 0).

3 $\text{tg}\frac{\pi}{4}=$

ა) -1 ბ) $\sqrt{3}$ გ) 1 დ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4 რომელ მეოთხედს ეკუთვნის α, თუ $sin\alpha=-cos\alpha$?

ა) I ბ) II ან IV გ) III დ) აუცილებლად IV.

5 კენტი ფუნქციის გრაფიკი

ა) სიმერტიულია აბსცისათა ღერძის მიმართ

ბ) სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ

გ) არ არის სიმეტრიული კოორდინატთა სათავის მიმართ

დ) სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

6 ტანგენსის გრაფიკი აბსცისათა ღერძს კვეთს წერტილებში

ა) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ ბ) $x=-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

გ) $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ დ) $x=\pi k,\ k\in Z$.

ამოხსენით ამოცანები:

7 იპოვეთ $32\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}\text{tg}\frac{4\pi}{3}\text{tg}\frac{10\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{2}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

8 ამოხსენით განტოლება $sin^2x-cos^2x=0$ და იპოვეთ მისი ამონახსნი მოთავსებული $[-\pi;\ \pi]$ შუალედში.

მითითებები

1	2	3	4	5	6
ბ	ა	გ	ბ	დ	დ

7 $32\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\text{tg}\frac{4\pi}{3}\cdot\text{tg}\frac{10\pi}{3}\cdot\sin\frac{5\pi}{2}=32\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\text{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\text{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=$

$=32\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot1=8\cdot3=24.$

8 $\sin^2x-\cos^2x=0,$

$(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=0;$

$\sin x=\cos x$, ან $\sin x=-\cos x$;

გავითვალისწინოთ, რომ ეს ტოლობები გამორიცხავს $cosx=0$ შესაძლებლობას და მივიღებთ:

$\text{tg}x=1$, ან $\text{tg}x=-1$;

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k\in Z,$ ან $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k\in Z.$

ამ ფესვებიდან $[-\pi; \pi]$ შუალედს ეკუთვნის: $-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}$ და $\frac{3\pi}{4}$.

შეფასების სქემა:

პირველი ექვსი ამოცანიდან თითოეულის სწორი პასუხი შეფასდეს 1 ქულით; მე-7 და მე-8 ამოცანებიდან თითოეულის სრულყოფილი ამოხსნა — 2 ქულით.

მე-7 ამოცანაში მხოლოდ $\text{tg}\frac{4\pi}{3}$-ის (ან $\text{tg}\frac{10\pi}{3}$-ის) მნიშვნელობის სწორად გამოთვლის დემონსტრირება შეიძლება 0,5 ქულით შეფასდეს. 0,5 ქულით შეიძლება შეფასდეს პირველი ორი ფუნქციის მნიშვნელობის სწორად მითითებაც.