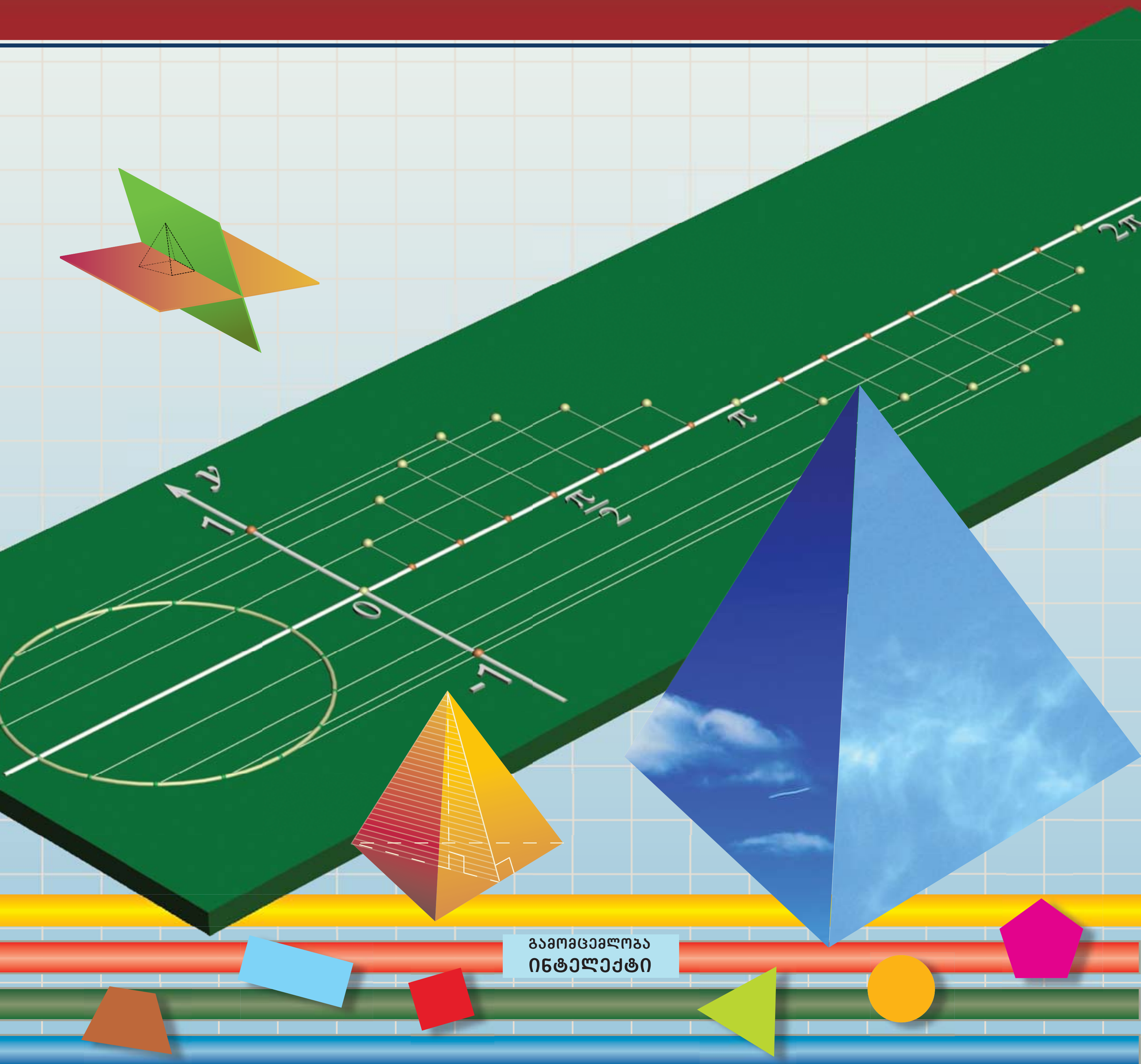
გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე,
ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი

XI

მათემატიკა



გამომცემლობა
ინტელექტი

გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე,
ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი

მათემატიკა

XI კლასის სახელმძღვანელო

რედაქტორი **თეიმურაზ ვეფხვაძე**

გრიფი მიენიჭა 2012 წელს სსიპ განათლების ხარისხის განვითარების
ეროვნული ცენტრის (ბრძანება №375, 18. 05. 2012) მიერ

გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი 2012

გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე,
ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი

მათემატიკა

XI კლასის სახელმძღვანელო

გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი 2012

Guram Gogishvili, Teimuraz Vepkhvadze,
Ia Mebonia, Lamara Kurchishvili

MATHS XI

INTELEKTI Publishers
Tbilisi 2012

ISBN 978–9941–439–54–4 (მათემატიკა XI, I ნაწილი)
ISBN 978–9941–439–56–8 (მათემატიკა XI, საერთო)

გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი, ილია ჭავჭავაძის გამზ. 5. ტელ.: 225 05 22
www.intelekti.ge info@intelekti.ge inteleqti@caucasus.net
INTELEKTI PUBLISHERS
5 Ilia Chavchavadze Ave., Tbilisi, Georgia. Tel.: (995 32) 225 05 22

ჩვენო კეთილო მეგობარო!

მოგესალმებით და გილოცავთ ახალი სასწავლო წლის დადგომას!

იმედია, ჩვენი სახელმძღვანელო კარგ მეგზურობას გაგიწევთ მათემატიკის დიდებულ სამყაროში მოგზაურობისას. შევეცადეთ, პრაქტიკული ამოცანების განხილვით დაგარწმუნოთ მათემატიკის შესწავლის აუცილებლობაში. გახსოვდეთ, აქ მიღებული ცოდნა და მისი გამოყენების უნარი სხვა საგნების უკეთეს ათვისებაშიც დაგეხმარებათ.

თუ პირველი გაცნობისას რომელიმე საკითხი კარგად ვერ გაიაზრეთ, არ დაღონდეთ, გააგრძელეთ მუშაობა — ამავე საკითხს სახელმძღვანელოში კვლავ არაერთხელ შეხვდებით და აუცილებლად დაძლევთ მას.

წარმატებით გევლოთ მათემატიკის შესწავლის გზაზე.

გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე,
ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი

ავტორთა მადლობა

ახალი სახელმძღვანელოების შექმნა და მათი სკოლაში დანერგვა განათლების მიმდინარე რეფორმის მნიშვნელოვანი ნაწილია.

ექსპერტთა, პედაგოგთა და სახელმძღვანელოების ავტორთა ერთობლივი ძალისხმევით შეიქმნა VII-XII კლასების სახელმძღვანელოები, რომლებიც დამკვიდრდა საშუალო სკოლებში. ყოველი ახალი წიგნის წერისას ვითვალისწინებდით მასწავლებელთა მოსაზრებებს. მადლობას მოვახსენებთ მათ ნაყოფიერი თანამშრომლობისთვის.

განსაკუთრებული მადლიერებით გვსურს აღვნიშნოთ ექსპერტთა ღვაწლი: მათ მიერ შედგენილი 2011-2016 წლების ეროვნული სასწავლო გეგმის მიხედვით დაიწერა XI კლასის ახალი სახელმძღვანელო. გავითვალისწინეთ ყველა ცვლილება ეროვნულ სასწავლო გეგმაში, ექსპერტებთან კონსულტაციების დროს გამოთქმული მოსაზრებები და წინა წლებში მიღებული გამოცდილება.

მადლობას მოვახსენებთ ყველას, ვინც თავის არჩევანს ამ წიგნზე შეაჩერებს. ვფიქრობთ ეს სახელმძღვანელო მათ იმედებს აუცილებლად გაამართლებს.

სარჩევი

როგორ ვისარგებლოთ წიგნით

წიგნით სარგებლობა რომ გაგიადვილდეთ, რამდენიმე რჩევას მოგცემთ.

სახელმძღვანელოს თითოეული თავი მასში მოცემული ძირითადი საკითხების ჩამონათვალით იწყება.

თითოეული თავი პარაგრაფებისგან შედგება. პარაგრაფები, როგორც წესი, ორნაწილიანია. პირველი ნაწილი თეორიულ მასალას ეთმობა. მისი გადმოცემა პრაქტიკული მაგალითების განხილვით მიმდინარეობს. ამ ნაწილს შესწავლილი მასალის შეჯამებით ვასრულებთ.

ეს ნიშნაკი მიგვანიშნებს პარაგრაფის მეორე ნაწილის დაწყებას — „სხვადასხვა“. აქ ისტორიული საკითხები და სხვა დამხმარე მასალაა მოცემული.

ეს ნიშნაკი ამოცანების ჩამონათვალს წინ უძღვის.

ზოგიერთი პარაგრაფის თეორიულ ნაწილსა და ამოცანებს მოსდევს სავარჯიშოები, რომლითაც შესწავლილ (მათ შორის — გასულ წლებშიც) საკითხებს გაიმეორებთ. ამ ნაწილის დაწყებას გვაუწყებს ეს საგანგებო ნიშნაკი.

შემოგთავაზებთ ჯგუფური მუშაობის პროექტებს — ეს თანაკლასელებთან ერთობლივად მუშაობის გამოცდილებას შეგმატებთ. აქ შეიძლება დაგჭირდეთ ინფორმაციის დამოუკიდებელი მოძიებაც და მისი დამუშავებაც.

ტექსტის უკეთ გაგების მიზნით საჭიროდ ჩავთვალეთ ზოგიერთი სიტყვის წარმომავლობის, მისი მსგავსი მნიშვნელობებისა ან სინონიმების მითითება. აღნიშნული მითითებები ჩვენს ლექსიკონშია მოცემული. ამ სათაურით გამოყოფილ ჩანაწერებს თქვენ ხშირად შეხვდებით. იგი თქვენს სიტყვათა მარაგსაც გაამდიდრებს და უფრო გასაგებს გახდის წიგნის შინაარსს.

ამ ნიშნაკით დროდადრო შეგახსენებთ, რომ ყველა ამოცანა უნდა გადაიტანოთ რვეულში და შემდეგ შეასრულოთ. წიგნში ჩანაწერები არ უნდა გაკეთდეს!

გაუფრთხილდით წიგნს!

მასში თქვენმა ჩანაწერებმა წიგნი შეიძლება სხვებისთვის გამოუსადეგარი გახადოს!

1 გამეორება. დასაბუთების ხერხები. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

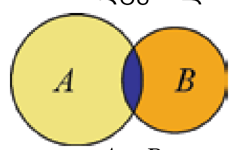
ამ თავში გაიმეორებთ გასულ წლებში შესწავლილ ზოგიერთ საკითხს — დასაბუთების ხერხები, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, გეომეტრიული გარდაქმნები — გაიღრმავებთ ცოდნას მათ შესახებ; გაეცნობით დასაბუთების ახალ ხერხს — მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს.

1.1 სიმრავლე. რიცხვითი სიმრავლეები

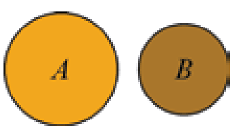
1) სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

სურათზე A და B სიმრავლეები ვენის დიაგრამის გამოყენებითაა წარმოდგენილი. მათი საერთო ნაწილი — ამ **სიმრავლეთა თანაკვეთა** ($A\cap B$ სიმრავლე) გაფერადებულია ლურჯად.

რას ეწოდება ორი სიმრავლის თანაკვეთა?



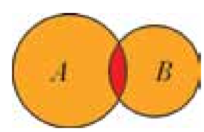
$A\cap B$



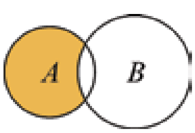
$A\cap B=\varnothing$

ამ სურათზე A და B სიმრავლეებს საერთო ელემენტი არა აქვს — მათი თანაკვეთა **ცარიელი სიმრავლეა;**

ამ სურათზე წითლად გაფერადებულია A და B **სიმრავლეების გაერთიანება** — $A\cup B$. რას ეწოდება ორი სიმრავლის გაერთიანება?



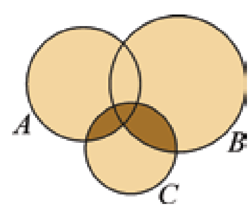
$A\cup B$



$A\setminus B$

აქ A და B **სიმრავლეების სხვაობაა** გაფერადებული. რას ეწოდება A და B სიმრავლეების სხვაობა?

სიმრავლეებზე მოქმედებების ზოგიერთი თვისება წარმოვადგინოთ თვალსაჩინოდ; მაგალითად, $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ სიმრავლურ ტოლობას ვენის დიაგრამა თვალსაჩინოებას მატებს.



კვლავ დავუბრუნდეთ ორი სიმრავლის ტოლობას. ვთქვათ, მოცემულია M და N სიმრავლეები და ვაჩვენეთ: თუ რაიმე $x\in M$, მაშინ $x\in N$ და თუ რაიმე $x\in N$, მაშინ $x\in M$. ამით დასაბუთდება M და N **სიმრავლეთა ტოლობა.** როგორ ჩაწერთ ამ პირობებს ქვესიმრავლის ცნების გამოყენებით?

ამ პარაგრაფში რიცხვით სიმრავლეებს განვიხილავთ, სიმრავლეებს, რომელთა ელემენტები რიცხვებია.

N — **ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;** $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$;

Z — **მთელ რიცხვთა სიმრავლე;** $Z=\{\ldots\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$;

Q — **რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;** ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ $\frac{m}{n}$ სახით, $m\in Z$, $n\in N$. ყოველ რაციონალურ რიცხვს ათწილადის სახითაც ჩავწერდით — სასრული ათწილადის ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით. მაგალითად,

$$\frac{37}{25}=1{,}48; \qquad \frac{21}{125}=0{,}168; \qquad \frac{23}{99}=0{,}(23); \qquad \frac{5}{6}=0{,}8(3).$$

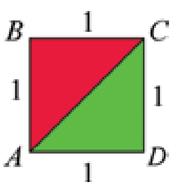
$\frac{1}{6}=0{,}1666\ldots$, ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ

$$0{,}16<\frac{1}{6}<0{,}17; \qquad 0{,}166<\frac{1}{6}<0{,}167; \qquad 0{,}1666<\frac{1}{6}<0{,}1667;$$

$$\underbrace{0{,}1666\ldots6}_{n\text{-ჯერ}} < \frac{1}{6} < \underbrace{0{,}1666\ldots6}_{n\text{-ჯერ}}+\frac{1}{10^{n+1}}, \quad n\in \mathbf{N}.$$

ორმაგი უტოლობების ჩაწერის პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება; 0,0001-მდე სიზუსტით $\frac{1}{6}$-ის მიახლოებით მნიშვნელობებია: 0,1666 — ნაკლებობით, 0,1667 — მეტობით.

რაციონალური რიცხვების ერთ-ერთი გამოყენება გაზომვის პროცესთან არის დაკავშირებული. თუმცა, არსებობს მონაკვეთები, რომელთა სიგრძეები რაციონალური რიცხვებით არ გამოისახება.



მაგალითად, თუ $ABCD$ კვადრატის გვერდი 1 ერთეულია, მაშინ $AC^2=2$; არ არსებობს რაციონალური რიცხვი (ანუ სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადით გამოსახული რიცხვი), რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. AC-ს სიგრძე ირაციონალური რიცხვით — $\sqrt{2}$-ით გამოისახება; ეს რიცხვი, ისევე, როგორც ნებისმიერი **ირაციონალური რიცხვი,** უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით გამოისახება — $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$

რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანება **ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა** — **R** სიმრავლე. ამრიგად, ნამდვილი რიცხვი, რომელიც არ არის რაციონალური რიცხვი, ირაციონალური რიცხვია. გავიხსენოთ მიმართებები **N, Z, Q** და **R** სიმრავლეებს შორის — $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

ირაციონალური რიცხვია, მაგალითად, π რიცხვი, რომელიც რაიმე წრეწირის სიგრძისა და ამ წრეწირის დიამეტრის შეფარდების ტოლია (ყველა წრეწირისთვის ეს შეფარდებები ტოლია); π-ს ასეთი უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი წარმოადგენს: $\pi=3{,}14159\ldots$.

გავეცნოთ უსასრულო არაპერიოდული ათწილადების (ირაციონალური რიცხვების) კიდევ რამდენიმე მაგალითს:

ა) 3,141441444... (პირველი ერთიანის შემდეგ — ერთი ოთხიანი, მეორე ერთიანის შემდეგ — ორი ოთხიანი და ა. შ.);

ბ) 4,12345678910111213... (მძიმის შემდეგი მიმდევრობით ნატურალურ რიცხვებს ვწერთ).

აქ წარმოდგენილ ზოგიერთ დებულებას **საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით** დავამტკიცებთ.

2) საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხი — დებულებათა დასაბუთების ხერხი

ახლა წინა ნაწილში მოცემული ზოგიერთი დებულება დავასაბუთოთ:

1. დავასაბუთოთ, რომ **არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია.**

დავუშვათ საწინააღმდეგო — ვთქვათ, არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია; ეს რაციონალური რიცხვი შეიძლება უკვეცი წილადის სახით წარმოვადგინოთ — $\frac{m}{n}$ და, მაშასადამე,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2, \qquad m^2=2n^2.$$

ამრიგად, m^2 ლუწი რიცხვია, მაშინ m რიცხვიც ლუწია (შეეცადეთ კვლავ საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით დაასაბუთოთ ეს ფაქტი); $m=2m_1$, ანუ

$$4m_1^2=2n^2; \qquad n^2=2m_1^2.$$

მივიღეთ, რომ n^2 ლუწია. მაშინ n ლუწია, $n=2n_1$ და $\frac{m}{n}=\frac{2m_1}{2n_1}$ — მივიღეთ წინააღმდეგობა — $\frac{m}{n}$ არ არის უკვეცი წილადი.

2. დავასაბუთოთ, რომ **0,1234567891011...** (მძიმის შემდეგ მიმდევრობით ნატურალური რიცხვებია ამოწერილი) **არ არის პერიოდული ათწილადი** — უსასრულო არაპერიოდული ათწილადია — ირაციონალური რიცხვია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო — ვთქვათ, მოცემული რიცხვი პერიოდული ათწილადია და პერიოდი k ციფრისგან შედგება. ცხადია, ეს პერიოდი არ შეიძლება მხოლოდ ნულებისგან შედგებოდეს — ეს გამომდინარეობს რიცხვის აგების წესიდან.

მეორე მხრივ, სათანადო ადგილზე უნდა ეწეროს 10^{3k}-ს ათობითი ჩანაწერი — 1-ითა და $3k$ ცალი ნულისგან შემდგარი. ეს ნულები მოიცავს ნებისმიერ k ციფრიან „მონაკვეთს", მათ შორის აღმოჩნდება პერიოდიც. მივიღეთ წინააღმდეგობა — k ციფრიანი პერიოდი არ არსებობს.

შეეცადეთ საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით დაასაბუთოთ ა) და ბ) დებულებები:

ა) თუ შვიდი კურდღელი ექვს გალიაშია განაწილებული, მაშინ ერთ გალიაში მაინც არის ერთ კურდღელზე მეტი;

ბ) თუ 12 გალიაში 25 კურდღელი გავანაწილეთ, მაშინ ერთ გალიაში მაინც არის ორ კურდღელზე მეტი.

შევაჯამოთ: *გავიხსენეთ რიცხვითი სიმრავლეები და მათ შორის მიმართებები, რიცხვთა ჩაწერის ხერხები. გავიხსენეთ დებულებათა დამტკიცების მეთოდი — საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხი და დავასაბუთეთ, რომ რიცხვი, რომლის კვადრატი არის 2, არ არის რაციონალური რიცხვი; მოყვანილია უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის მაგალითები.*

?

1. რა რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანებაა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე?
2. რა სახის ათწილადით შეიძლება გამოისახოს ირაციონალური რიცხვი?
3. რა სახის უსასრულო ათწილადით შეიძლება გამოისახოს რაციონალური რიცხვი?

ს

ძველ ბაბილონში, თითქმის 4000 წლის წინ, საკმაოდ დახელოვნებულნი იყვნენ განტოლებათა ამოხსნაში და ცდილობდნენ განტოლებათა ფესვები, მათ შორის ირაციონალური რიცხვები, რაციონალური რიცხვებით წარმოედგინათ (მიახლოებით). მაგალითად, 2500 წლის წინანდელ თიხის ფირფიტაზე შესრულებული ჩანაწერების თანამედროვე „თარგმანით“ ვიგებთ, რომ $\sqrt{2}$ მოიცემოდა, როგორც $1\frac{5}{12}$. ეს საკმაოდ კარგი მიახლოებაა, რადგან $1\frac{5}{12}\approx 1{,}4167$. არსებობს მოსაზრება, რომ კვადრატული ფესვის გამოთვლისას გამოიყენებოდა ფორმულა

$$\sqrt{a^2+h}\approx a+\frac{h}{2a}.$$

π რიცხვი, მეტწილად, ბიბლიიდან აღებული მიახლოებითი მნიშვნელობით — 3-ით მოიცემოდა, თუმცა ზუსტი გამოთვლებისას $3\frac{1}{8}$ რიცხვით წარმოადგენდნენ, ანუ $\pi\approx 3{,}128$, რაც აგრეთვე კარგ მიახლოებას წარმოადგენს.

ძველ ინდოეთში, ალბათ, ძველი ეგვიპტის გავლენით, გავრცელებული იყო წილადების წარმოდგენა 1-ის ტოლია მრიცხველის მქონე წილადების ჯამის სახით. 2500 წლის წინანდელ ერთ-ერთ ფორმულას დღეს შეიძლება ასეთი სახე მივცეთ:

$$\sqrt{2}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}, \qquad \text{ანუ } \sqrt{2}\approx 1{,}41421576.$$

იმდროინდელია ასეთი ფორმულაც:

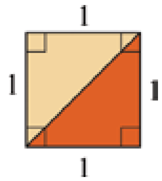
$$\pi\approx 4\cdot\left(1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 29}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right)^2, \text{ ანუ } \pi\approx 3{,}098...$$

* * *

რაციონალური რიცხვების ათობითი პოზიციური ჩანაწერების სისტემა მე-17 საუკუნეში ჰოლანდიელმა ინჟინერმა სიმონ სტევინმა (1548-1620) შემოიღო. მის მიერ იყო შექმნილი ათწილადებზე მოქმედებების ალგორითმებიც.

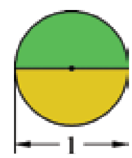
* * *

ირაციონალური რიცხვების მაგალითები

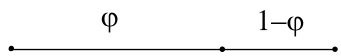


$\sqrt{2}$ — ერთეულის სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატის დიაგონალი.

π — 1-ის ტოლი დიამეტრის მქონე წრეწირის სიგრძე.



$\varphi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ — ოქროს კვეთასთან დაკავშირებული რიცხვი — $(1-\varphi):\varphi=\varphi:1$ განტოლების ფესვი.



ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 ვთქვათ, A არის ყველა მართკუთხედის სიმრავლე, B არის კვადრატების სიმრავლე. მაშინ

1) $A=B$ 2) $B\subset A$ 3) $A\subset B$ 4) $A\cap B=\varnothing$.

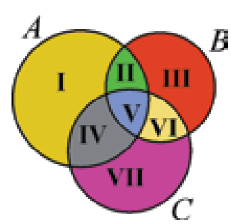
2 ვთქვათ, ავტობუსის მძღოლების სიმრავლეა A; B იყოს იმ ადამიანების სიმრავლე, რომლებსაც მართვის მოწმობა აქვთ. თუ ყველა მძღოლს მართვის მოწმობა აქვს, მაშინ

1) $A=B$ 2) $A\subset B$ 3) $B\subset A$ 4) $A\cap B=\varnothing$.

3 ერთელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა ოდენობაა

1) 1 2) 2 3) 3 4) 0.

4 სურათზე A, B და C სიმრავლეებია გამოსახული. დიაგრამაზე ეს სიმრავლეები ისეა წარმოდგენილი, რომ შვიდი ნაწილი გამოიყოფა. ისინი გადანომრილია. $A\cap C$ სიმრავლე შედგება



1) I და VII ნაწილისგან
2) III და VI ნაწილისგან
3) I და VI ნაწილისგან
4) IV და V ნაწილისგან.

ამოხსენით ამოცანები

5 ცნობილია, რომ 26 პირველკლასელიდან ყოველს აქვს შავი ან წითელი ფანქრებიდან ერთ-ერთი მაინც. ამასთანავე, 15-ს აქვს წითელი ფანქარი, 21-ს — შავი. რამდენ მოსწავლეს აქვს ორივე ფერის ფანქარი?

6 ტურისტთა ჯგუფიდან ყოველმა სამახსოვრო სუვენირი შეიძინა — არც ერთ მათგანს სამზე მეტი არ შეუძენია. ცნობილია, რომ თითო სუვენირი მხოლოდ შვიდმა ტურისტმა შეიძინა, არაუმეტეს ორი სუვენირისა — 21-მა, არანაკლებ ორისა კი —29-მ. რამდენი ტურისტი იყო ამ ჯგუფში და რამდენმა მათგანმა შეიძინა სამი სუვენირი?

7 ჯოგში სულ 28 ძროხაა. მათგან 15 მეწველია, 17 ჭრელი შეფერილობისაა. სულ მცირე რამდენი ჭრელი ძროხაა მეწველი?

8 ერთ-ერთი ბანკის 150 კლიენტიდან 80-ს უცხოური ვალუტით აქვს ანგარიში გახსნილი, 40-ს — ქართული ლარებით, 23-ს — ორივე ვალუტით. გამოიყენეთ ვენის დიაგრამები და უპასუხეთ კითხვებს:

ა) რამდენს აქვს ანგარიში გახსნილი მხოლოდ უცხოური ვალუტით?

ბ) რამდენს აქვს ანგარიში გახსნილი მხოლოდ ლარებით?

გ) რამდენს არა აქვს გახსნილი ანგარიში არც ქართული და არც უცხოური ვალუტით?

9 ქალაქის მოსწავლეთა ჩემპიონატში ცურვის სამ სახეობაში მონაწილეობაზე 50-მა მოსწავლემ გამოთქვა სურვილი. ეს სახეობებია: I — კროლი, II — ბრასი, III — ბატერფლაი. ზოგიერთმა მოსწავლემ მონაწილეობა მიიღო ერთ-ერთ სახეობაში, ზოგიერთმა ორ, ზოგიერთმა კი — სამივე სახეობაში: ცნობილია, რომ

16 მონაწილეობდა I სახეობაში,

18 — II-ში,

24 — III-ში,

4 — I-სა და II-ში,

5 — II-სა და III-ში,

8 — I-სა და III-ში,

3 — სამივეში.

იპოვეთ იმ მოსწავლეთა ოდენობა, რომლებმაც:

ა) არც ერთ სახეობაში არ მიიღეს მონაწილეობა;

ბ) მონაწილეობდნენ I და II სახეობაში, III-ში — არა;

გ) მხოლოდ I სახეობაში მონაწილეობდნენ;

დ) მხოლოდ III სახეობაში მონაწილეობდნენ;

ე) მონაწილეობდნენ ან II, ან III-ში, ანუ ერთ-ერთში მაინც ამ ორი სახეობიდან.

10 ნაყინის მწარმოებელი ფირმის მიერ ჩატარებული გამოკითხვის შედეგები ასე გაფორმდა: 100 გამოკითხულიდან 78-მა აღნიშნა, რომ ხილის ნაყინი უყვარს, 61-მა — შოკოლადის, 40-მა აღნიშნა, რომ ორივე სახის ნაყინი უყვარს — ხილისაც და შოკოლადისაც. აღმოჩნდა აგრეთვე, რომ ყოველ

გამოკითხულს დასახელებული სახის ნაყინებიდან ერთ-ერთი მაინც უყვარს. არის თუ არ გამოკითხვის შედეგები სწორად აღრიცხული? პასუხი დაასაბუთეთ.

11 ფეხბურთში 2006 წლის მსოფლიო ჩემპიონატზე ერთ-ერთი სასწავლებლის სტუდენტების უმეტესობა გულშემატკივრობდა იტალიის, ბრაზილიის ან ინგლისის გუნდებს; ამასთანავე, ზოგიერთი სტუდენტი ერთდროულად ორ გუნდს ქომაგობდა, ზოგიერთი — სამივეს. ცნობილია, რომ 80 სტუდენტი სამივე გუნდს ქომაგობდა, 139 — ბრაზილიასა და იტალიას; 170 — ბრაზილიასა და ინგლისს; 320 — იტალიასა და ინგლისს; 500 — ინგლისს; 540 — იტალიას; 700 — ბრაზილიას; 208 — არც ერთს ამ სამი გუნდიდან.

- რამდენი სტუდენტი ქომაგობდა მხოლოდ ბრაზილიას?
- რამდენი სტუდენტი ქომაგობდა ერთ-ერთ გუნდს მაინც ამ სამიდან?
- რამდენი ქომაგობდა არაუმეტეს ერთ გუნდს ამ სამიდან?
- რამდენი ქომაგობდა ბრაზილიასა და იტალიას, მაგრამ არ ქომაგობდა ინგლისს?
- რამდენი ქომაგობდა ბრაზილიას ან იტალიას, მაგრამ არ ქომაგობდა ინგლისს?

12 ერთ-ერთი ტელეკომპანიის 100 თანამშრომლის გამოკითხვის შედეგად გაირკვა: მათი უმრავლესობა კითხულობს სამ გაზეთს — „24 საათს", „რეზონანსს", „მთავარ სპორტს"; ამასთანავე, ზოგიერთი მათგანი ყოველდღიურად ყიდულობს მხოლოდ ერთს ამ სამი გაზეთიდან, ზოგიერთი — მხოლოდ ორს ამ სამიდან და ზოგიერთი — არც ერთს ამ სამიდან.

100 გამოკითხულიდან 44 ყოველდღიურად ყიდულობს გაზეთ „24 საათს", 40 — „რეზონანსს", 37 — „მთავარ სპორტს"; 16 — „მთავარ სპორტს" და „24 საათს"; 15 — „რეზონანსს" და „მთავარ სპორტს"; 11 — „რეზონანსს" და „24 საათს", 4 — სამივე ამ გაზეთს.

- რამდენი გამოკითხული არ ყიდულობს არც ერთ გაზეთს აღნიშნული სამიდან?
- რამდენი ყიდულობს მხოლოდ „რეზონანსს"?
- რამდენი ყიდულობს „24 საათს" ან „რეზონანსს"?
- რამდენი ყიდულობს „24 საათს" ან „რეზონასს" და არ ყიდულობს „მთავარ სპორტს"?

13 დაასაბუთეთ, რომ ნებისმიერ ორ რაციონალურ რიცხვს შორის უამრავი რაციონალური რიცხვია.

მითითება. განიხილეთ მოცემული ორი რიცხვის საშუალო.

14 იპოვეთ 0,9-ზე ნაკლებ ნამდვილ რიცხვებს შორის უდიდესი ნამდვილი რიცხვი, რომლის ათწილადის სახით ჩაწერისას არ გამოიყენება ციფრი 9.

15 იპოვეთ უმცირესი ნამდვილი რიცხვი, რომელიც მეტია 7,6-ზე და მისი ათწილადის სახით ჩაწერისას არ გამოიყენება ციფრები 0; 1 და 2.

16 დაასაბუთეთ, რომ, თუ m^2 იყოფა 5-ზე, მაშინ m იყოფა 5-ზე.

17 დაასაბუთეთ, რომ $\sqrt{5}$ არ არის რაციონალური რიცხვი.

18 დაასაბუთეთ, რომ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ არ არის რაციონალური რიცხვი.

19 დაასაბუთეთ, რომ არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი არის:
ა) 7; ბ) 8; გ) 15.

20 ვთქვათ: $x=1{,}0234107...$; $y=1{,}0235106...$; $z=1{,}0235106...$, ამასთანავე, x, y და z რაციონალური რიცხვებია. მიუთითეთ ქვემოთ მოცემული ფორმულებიდან რომელია ჭეშმარიტი, რომელია მცდარი, ან რომელი ფორმულის ჭეშმარიტობის ან მცდარობის დასადგენად მოწოდებული ინფორმაცია არ არის საკმარისი.
ა) $1{,}02<x<1{,}03$; ბ) $x<1{,}03$; გ) $x>1{,}0234107$; დ) $x<y$;
ე) $x+y<2{,}048$; ვ) $x+y<2{,}046$; ზ) $x+y>2{,}04692$; თ) $x<z$;
ი) $y=z$; კ) $yz>1{,}04$; ლ) $x=1{,}0234108$; მ) $z=1{,}0234108$.

21 გამოიყენეთ კალკულატორი და ჩაწერეთ სასრული ან პერიოდული ათწილადის სახით რაციონალური რიცხვი:
ა) $\frac{5}{8}$; ბ) $\frac{1}{3}$; გ) $\frac{41}{333}$; დ) $\frac{6}{11}$; ე) $\frac{4}{23}$.
საზოგადოდ, ყოველთვის თუ შეძლებთ მხოლოდ კალკულატორის გამოყენებით პერიოდის მითითებას?

22 მოცემულია გამოსახულებები:
ა) ab; ბ) $\sqrt{a+b}$; გ) $a+\sqrt{b}$; დ) $\sqrt{a}+b$.
რომელი მათგანის მნიშვნელობა შეიძლება იყოს რაციონალური რიცხვი, თუ b — რაციონალურია, a — ირაციონალური? დადებითი პასუხის შემთხვევაში მიუთითეთ ცვლადების რაიმე სათანადო მნიშვნელობები (მაგალითად, თუ $b=2$, $a=-\sqrt{2}$, მაშინ $a+\sqrt{b}$ რაციონალური რიცხვია). უარყოფითი პასუხის შემთხვევაში დასაბუთებისთვის შეეცადეთ გამოიყენოთ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი.

23 მოიყვანეთ ირაციონალური და რაციონალური რიცხვების მაგალითები (თუ არსებობს), რომლებიც $\sqrt{3}$-სგან 0,003-ით განსხვავდება.

24 ვთქვათ, a და b ირაციონალური რიცხვებია. ჩამოთვლილთაგან რომელი რიცხვი შეიძლება იყოს რაციონალური:
ა) $a+b$; ბ) ab; გ) $\sqrt{a+b}$; დ) $\frac{a}{\sqrt{b}}$?

25 მიუთითეთ რაიმე x რიცხვი, რომელიც $[-0,01;\ 0,01]$ შუალედს ეკუთვნის და x^2 ირაციონალურია.

მითითება. მაგალითად, $x=\sqrt[4]{2}\cdot 10^{-3}$. იპოვეთ რამდენიმე სხვა რიცხვიც.

26 მოიყვანეთ მაგალითი ირაციონალური რიცხვისა, რომელიც 1,3-ისგან განსხვავდება არაუმეტეს 10^{-3}-ით.

მითითება. განიხილეთ რიცხვი: $1,3+\sqrt{2}\cdot 10^{-4}$. იპოვეთ რაიმე სხვა რიცხვიც.

27 დაასაბუთეთ, რომ ყოველი ათწილადი $M,a_1\ a_2\ \ldots\ a_n 01011011101111\ \ldots$, სადაც $n\in\mathbb{N}$, M მთელი ნაწილია, $a_1 a_2,\ \ldots,\ a_n$ რაიმე ციფრებია, მათი შემდგომი პირველი ნულის შემდეგ ერთი ერთიანია, მეორე ნულის შემდეგ ორი ერთიანი და ა. შ., უსასრულო არაპერიოდული ათწილადია.

28* ვთქვათ, მოცემულია პერიოდული ათწილადი — 0,2(35). ამ ჩანაწერის ათწილად ნაწილში ციფრები თანამიმდევრულად გადავნომროთ: პირველია 2, მეორე — 3, მესამე — 5, მეოთხე — 3 და ა. შ. ეს წესი განსაზღვრავს ფუნქციას: $n \to f(n)$ — ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შევუსაბამეთ 0,2(35)-ის ათწილად ნაწილში n—ური ციფრით წარმოდგენილი რიცხვი. მაგალითად, $f(3)=5$, $f(4)=3$.

- იპოვეთ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე;
- იპოვეთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე;
- n-ის რა მნიშვნელობებისთვის იღებს $f(n)$ უდიდეს მნიშვნელობას?
- შეეცადეთ აღწეროთ f ფუნქციის გრაფიკი და გამოსახოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე $(n;f(n))$ წერტილები, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ 12$.

29 ვთქვათ, ჭეშმარიტია სამი დებულება:

ა) თუ სამკუთხედში ერთ-ერთი კუთხე მართია, მაშინ ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია;

ბ) თუ სამკუთხედში ერთ-ერთი კუთხე მახვილია, მაშინ ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდის კვადრატი ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე;

გ) თუ სამკუთხედში ერთ-ერთი კუთხე ბლაგვია, მაშინ ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდის კვადრატი მეტია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე.

- ჩამოაყალიბეთ თითოეული მოცემული დებულების შებრუნებული დებულება და მოპირდაპირე დებულება.
- დაასაბუთეთ მიღებული დებულებებიდან თითოეული მხოლოდ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენებით.

30 ყუთში სამი ფერის ფანქრებია: 6 — ლურჯი, 7 — წითელი და 8 — ყვითელი. რა უმცირესი ოდენობის ფანქრები უნდა ამოვიღოთ (ყუთში ჩაუხედავად), რომ მათგან

ა) ორი მაინც იყოს ერთი ფერის;

ბ) ოთხი მაინც იყოს ერთი ფერის?

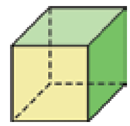
31 კლასში 37 მოსწავლეა. მოიძებნება თუ არა მათ შორის ოთხი მოსწავლე, რომლებიც ერთსა და იმავე თვეშია დაბადებული?

32 შეადგინეთ წინა ამოცანის ანალოგიური ამოცანები და ამოხსენით — მაგალითად, რა რიცხვებით შეიძლება შევცვალოთ 37, რომ

ა) დასკვნა არ შეიცვალოს; ბ) დასკვნა შეიცვალოს.

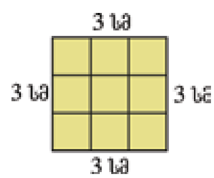
33 დაასაბუთეთ, რომ ნებისმიერ სამ ნატურალურ რიცხვს შორის მოიძებნება ორი რიცხვი, რომელთა ჯამი იყოფა 2-ზე.

34 შეიძლება თუ არა ორი ფერის საღებავით შეიღებოს კუბის წახნაგები ისე, რომ ყოველი ორი მეზობელი წახნაგი (საერთო წიბოს მქონე) სხვადასხვა ფერის საღებავით იყოს შეღებილი?



35 შეიძლება თუ არა, სამი ფერის საღებავით შეიღებოს კუბის წახნაგები ისე, როგორც ეს 34-ე ამოცანაში იყო აღწერილი?

36 კვადრატის გვერდი 3 სმ-ია. ამ კვადრატში ნებისმიერადაა აღებული 10 წერტილი. შეიძლება თუ არა მოიძებნოს 1 სმ გვერდის მქონე კვადრატი, რომელსაც ეკუთვნის ამ წერტილებიდან 2 მაინც?



მითითება. გამოიყენეთ მოცემული სურათი.

37 შეადგინეთ წინა ამოცანის ანალოგიური ამოცანა — შეცვალეთ წერტილების ოდენობა.

38* წვეულებაზე 30 სტუმარია თავმოყრილი. მათ შორის არიან სტუმრები, რომლებიც ერთმანეთს იცნობენ. დაასაბუთეთ, რომ ამ 30 სტუმარს შორის მოიძებნება ორი სტუმარი მაინც, რომლებსაც ამ სტუმართაგან ერთნაირი ოდენობის ნაცნობები ჰყავთ (მივიჩნიოთ, რომ, თუ ერთი სტუმარი იცნობს მეორეს, მაშინ მეორეც იცნობს მას).

მითითება. ყოველი სტუმრის ნაცნობების რიცხვი შეიძლება იყოს 0, 1, 2, 3, ..., ან 29. განიხილეთ ორი შემთხვევა: 1) არსებობს სტუმარი, რომელსაც არ ჰყავს ნაცნობი, 2) არ არსებობს სტუმარი, რომელსაც არ ჰყავს ნაცნობი.

1 განვიხილოთ რიცხვითი შუალედი: $[\sqrt{2};\ \sqrt{3}]$.

- ეკუთვნის თუ არა ამ შუალედს რიცხვები:

$1{,}5+10^{-1}$ და $\sqrt{2}+10^{-1}$; $1{,}5+10^{-2}$ და $\sqrt{2}+10^{-2}$;
$1{,}5+10^{-3}$ და $\sqrt{2}+10^{-3}$;

ნებისმიერი $n\in\mathbf{N}$-სთვის — $1{,}5+10^{-n}$ და $\sqrt{3}+10^{-n}$?

- შეიცავს თუ არა აღნიშნული შუალედი უსასრულოდ ბევრ რაციონალურ და უსასრულოდ ბევრ ირაციონალურ რიცხვს?

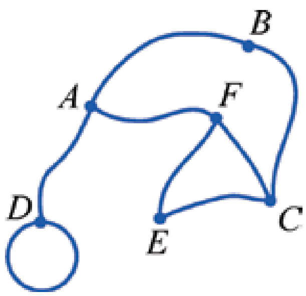
2 განიხილეთ რაიმე სხვა შუალედი, მაგალითად, $[\sqrt{3};\ \sqrt{5}]$ ან $[\sqrt{5};\ \sqrt{7}]$. დაასაბუთეთ, რომ თითოეული მათგანი შეიცავს უსასრულოდ ბევრ რაციონალურ და უსასრულოდ ბევრ ირაციონალურ რიცხვს.

3
- დაასაბუთეთ, რომ ყოველი $[a;\ b]$ შუალედი შეიცავს $[r;\ r+\frac{1}{10^n}]$ სახის შუალედს (n რაიმე ნატურალური რიცხვია), r სასრული ათწილადია.
- დაასაბუთეთ, რომ ყოველი $[a;\ b]$ შუალედი უსასრულოდ ბევრ რაციონალურ რიცხვს შეიცავს.
- ვთქვათ, $r=M{,}a_1a_2\ \dots\ a_n$ სასრული ათწილადია; ააგეთ ირაციონალური რიცხვი, რომელიც მეტია r-ზე და ნაკლებია $r+\frac{1}{10^n}$-ზე (მაგალითად, $M{,}a_1a_2\ \dots\ a_n010110111\dots$).
- დაასაბუთეთ, რომ ნებისმიერი $[a;\ b]$ შუალედი უსასრულოდ ბევრ ირაციონალურ რიცხვს შეიცავს.

4 არსებობს თუ არა მოცემული ნამდვილი რიცხვის „უახლოესი“ ნამდვილი რიცხვი? პასუხი დაასაბუთეთ.

1.2 გრაფების გამოყენების მაგალითები

სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულებების აღწერის და თვალსაჩინო წარმოდგენისას ჩვენ უკვე გვქონდა გრაფის გამოყენების მაგალითები. იგი წარმოვადგინეთ ფიგურით, რომელიც წერტილებითა და ამ წერტილების შემაერთებელი წირებისგან (წიბოებისგან) შედგება (შესაძლებელია შეერთებული იყოს: მოცემულ წერტილთა ყოველი წყვილი, ან მხოლოდ მათი ნაწილი, ან რაიმე წერტილი — თავის თავთან, რაიმე ორი წერტილი (წვერო) შეიძლება რამდენიმე წირითაც იყოს შეერთებული).



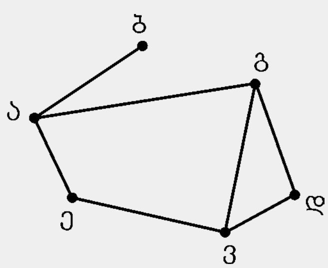
გრაფი შეიძლება იყოს ორიენტირებული, ანუ მის თითოეულ წიბოზე მითითებული იყოს საწყისი და ბოლო წერტილები (წვეროები).

მრავალი ამოცანის ამოხსნისას გრაფები თვალსაჩინოდ წარმოგვიდგენს ამოცანის პირობას. ეს განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია, როცა გრაფს მრავალი წვერო აქვს. ასეთი გრაფების განხილვაზე დაიყვანება მრავალი საყურადღებო პრაქტიკული ამოცანა. მაგალითად, ეკონომიკაში — ტრანსპორ-ტის მოძრაობის ნაკადების ყველაზე ხელსაყრელი ვარიანტების შერჩევისას; ქიმიასა და ბიოლოგიაში — მოლეკულებისა და მათი ბმების შესწავლისას, ელექტროტექნიკაში — სქემების შედგენისას; მშენე-ბლობაში — ძირითად საქმეთა დაგეგმვისა და მათი შესრულების უმოკლესი დროის ძიებისას. ამ ამოცანებს მომავალში განვიხილავთ. ამჯერად დავიწყებთ მარტივი ამოცანის განხილვით. ის საკმაოდ დიდ გამოცდილებას შეგძენთ.

მაგალითი 1

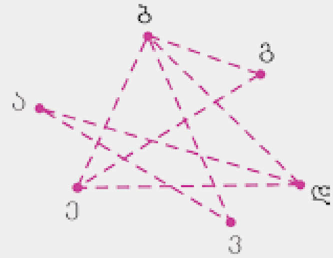
ვთქვათ, კლასის საჭადრაკო ტურნირში ექვსი მოსწავლე მონაწილეობს — ალეკო, ბექა, გიორგი, დიმიტრი, ელენე და ვატო.

მოცემული მომენტისთვის ზოგიერთი შეხვედრა უკვე ჩატარდა: ა — ბ (ალეკომ ითამაშა ბექასთან); ა — გ, ა — ე, ე — ვ, ვ — დ, დ — გ, ვ — გ. მოსწავლეები თითოჯერ უნდა შეხვდნენ ერთმანეთს. რამდენი შეხვე-დრა დარჩა ჩასატარებელი?



ამოცანა გრაფებს დავუკავშიროთ. მოთამაშეები წერტილებით გამოვსახოთ და აღვნიშნოთ მათი სახელების პირველი ასოების მიხედვით. თუ ორმა მოჭადრაკემ ითამაშა ერთმანეთთან, მაშინ შესაბამის წერტილებს წირებით ვაერთებთ (ეს გრაფის წიბოებია). სულ 7 ასეთი წიბო მივიღეთ — 7 შეხვედრის აღმნიშვნელი.

ახლა კი დანარჩენი შეხვედრებიც გამოვსახოთ — გავავლოთ შესაძლო წიბოები — ყოველი ასეთი ორი წერტილი თითო წიბოთი უნდა შეერთდეს — ასე მივიღებთ სათანადო გრაფს, რომელსაც 8 წიბო აქვს. ამრიგად, 8 პარტია დარჩა ჩასატარებელი. სულ შეხვედრათა რიცხვია 7+8=15.

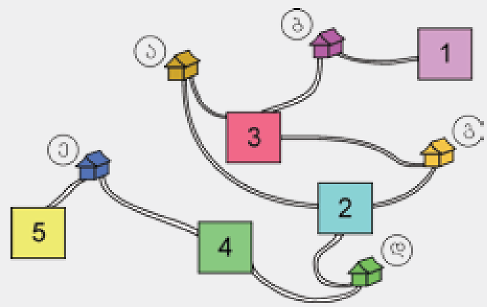


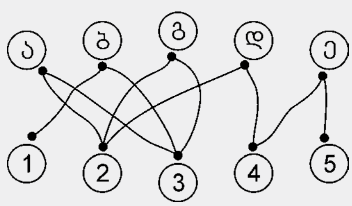
ალსანიშნავია, რომ გრაფის გამოყენებით თვალსაჩინოდ მივუთითეთ ის წყვილებიც, რომელთაც მოუწევთ თამაში.

შეეცადეთ იპოვოთ ეს რიცხვი სხვა გზითაც (მონაწილეთა რიცხვია 6, ყოველი ხვდება დანარჩენ 5-ს, $\frac{6\cdot 5}{2}=15$).

მაგალითი 2

სოფლის ხუთმა მოსახლემ ხეხილის ხუთი ბაღი შეიძინა. მათ გადაწყვიტეს ისე გაინაწილონ ეს ბაღები, რომ ყოველი მოსახლე თავისი სახლიდან თავის ბაღში სხვისი ბაღის გაუვლელად მივიდეს. ბილიკების, ბაღებისა და სახლების განლაგების სქემა სურათზეა წარმოდგენილი.



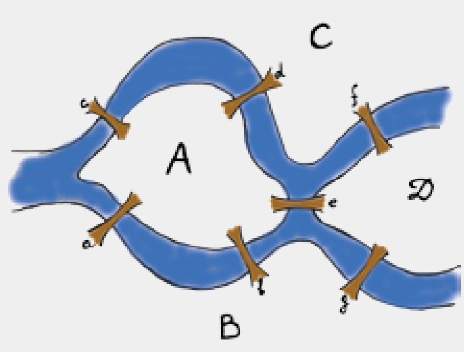


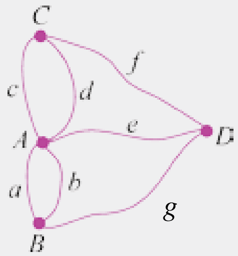
ამ სურათზე კი ამოცანის პირობის შესაბამისი გრაფია გამოსახული. ამ გრაფს აქვს 10 წვერო და 10 წიბო. ამოცანის ამოსახსნელად უნდა შევარჩიოთ 5 ისეთი წიბო, რომლებსაც საერთო წვერო არა აქვს. 5 და 1 წერტილებისთვის ერთადერთი არჩევანი გვაქვს: 1 — ბ, 5 — ე. ახლა უკვე 4-სთვის რჩება ერთადერთი არჩევანი: 4 — დ, შემდეგ კი ან 2 — ა და 3 — გ უნდა ავირჩიოთ, ან 2 — გ და 3 — ა. სხვა ამონახსნი ამოცანას არა აქვს.

ახლა ის ცნობილი ამოცანა განვიხილოთ, რომელმაც დასაბამი მისცა გრაფთა თეორიას.

მაგალითი 3

ქალაქ კენიგსბერგში მდინარე პრეგელზე 7 ხიდი იყო გადებული. ქალაქის სხვადასხვა ნაწილები (სურათზე ისინი A, B, C და D-თია აღნიშნული) ამ ხიდებით უკავშირდებოდა ერთმანეთს. შეიძლება თუ არა შვიდივე ხიდი ისე გავიაროთ, რომ რომელიმე მათგანზე გავლა ხელმეორედ არ დაგვჭირდეს და ერთი რაიმე წერტილიდან ასეთი შემოვლის შემდეგ კვლავ იმავე წერტილში დავბრუნდეთ?



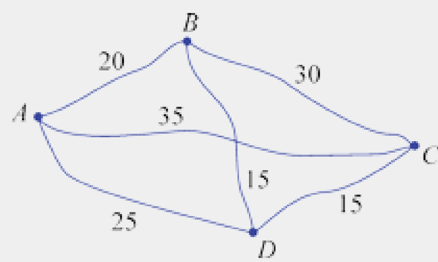


ამოცანის შესაბამისი გრაფი ასე შეიძლება გამოვსახოთ: A, B, C და D გრაფის წვეროებია. ქალაქის ამ ნაწილების შემაერთებელი ხიდები გრაფის წიბოებითაა გამოსახული. „გრაფის ენაზე“ ეს ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება — არსებობს თუ არა მოცემული გრაფის რაიმე წვეროდან ამ გრაფის ისეთი უწყვეტი შემოვლა, რომელიც მის თითოეულ წიბოზე ერთხელ გაივლის? ანუ შეიძლება თუ არა ამ გრაფის დახატვა მისი რაიმე წვეროდან ფანქრის აუღებლად ისე, რომ ყოველ წიბოზე ერთხელ გავიაროთ?

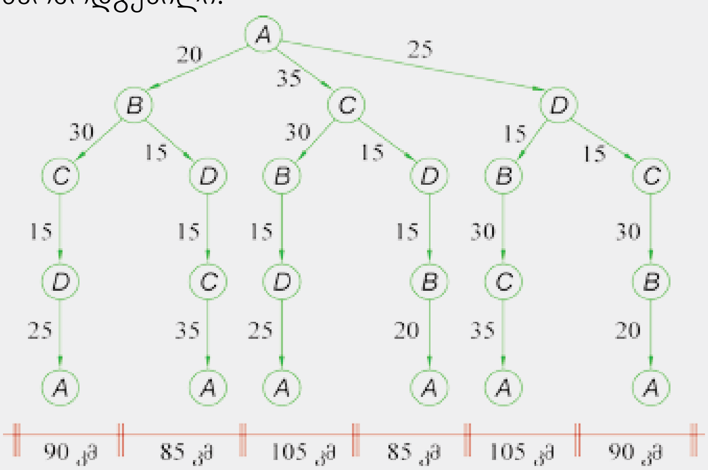
ეს შეუძლებელია — ნებისმიერი წვეროდან მოძრაობის დაწყებისას ყველა სხვა წვერო უნდა გავიაროთ, ამასთანავე, ყოველ წვეროში (ქალაქის ნაწილში) „შემავალ“ წიბოსთან ერთად უნდა არსებობდეს „გამომავალი“ წიბოც. ამრიგად, ყოველ წვეროში „შემავალი“ წიბოების ოდენობა ტოლი უნდა იყოს ამ წვეროდან „გამომავალი“ წიბოების ოდენობის — წიბოების საერთო ოდენობა ლუწი უნდა იყოს. ჩვენი გრაფი ამ პირობას არ აკმაყოფილებს. მაშასადამე, საძიებელი მარშრუტი არ არსებობს.

მაგალითი 4

ტურისტული მარშრუტი A ქალაქიდან იწყება და იმავე ქალაქში უნდა დასრულდეს. გზად ტურისტებმა უნდა მოინახულონ B, C და D ქალაქები. ცნობილია, რომ ყოველი ორი ქალაქი ერთმანეთს უშუალოდ (სხვა ქალაქზე გაუვლელადაც) უკავშირდება ერთადერთი გზით და ამ გზის სიგრძე გრაფზეა მითითებული. შემოვლისას რა მარშრუტი უნდა აირჩიონ ექსკურსანტებმა, რომ გავლილი გზა უმოკლესი აღმოჩნდეს?



განვიხილოთ გრაფი, რომელზეც ყველა შესაძლო მარშრუტი და ამ მარშრუტის სიგრძეა წარმოდგენილი.

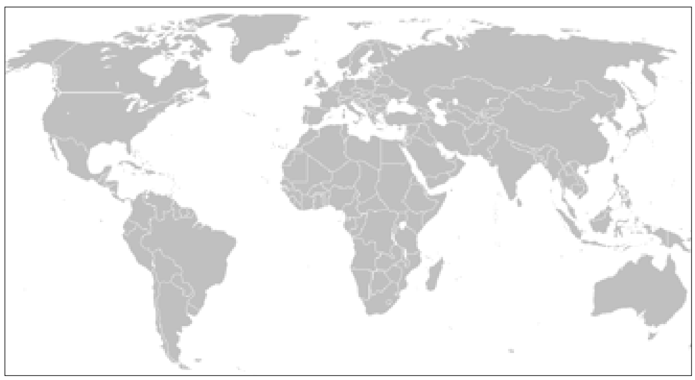


ამრიგად, უმოკლესი მარშრუტებია: $A \to B \to D \to C \to A$ და $A \to C \to D \to B \to A$, ამ გზებით გასავლელია 85 კმ.

შევაჯამოთ: გავიხსენეთ გრაფების შესახებ ზოგიერთი საკითხი და მოვიყვანეთ ამოცანების ამოხსნისას გრაფების გამოყენების მაგალითები.

ს

განვიხილოთ ასეთი „მარტივი“ ამოცანა: შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერი გეოგრაფიული რუკა ოთხი ფერის საღებავით ისე გავაფერადოთ, რომ თითოეული ქვეყანა თითო ფერით იყოს წარმოდგენილი, ხოლო ყოველი ორი მეზობელი ქვეყანა (საერთო საზღვრის მქონე; მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი საზღვრად არ ითვლება) სხვადასხვა ფერით იყოს წარმოდგენილი? შეეცადეთ განიხილოთ რამოდენიმე ნიმუში ამ ამოცანის უკეთ წარმოსადგენად. გამოიყენეთ გრაფებიც.



თავად ამოცანა აღმოჩნდა ურთულესი მათემატიკური ამოცანა. გრაფთა თეორიამ მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა მის ამოხსნაში, საჭირო გახდა მძლავრი კომპიუტერული დახმარებაც.

ა

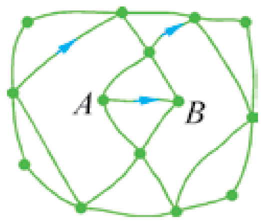
ამოხსენით ამოცანები

1 ხუთ ყუთში აწყვია ატამი, ვაშლი, მსხალი, ქლიავი და ტყემალი. ყუთები გადანომრილია — I, II, III, IV, V; ამასთანავე, I ყუთში არის ქლიავი და ტყემალი; II ყუთში — ატამი, ვაშლი და ქლიავი; III ყუთში — ტყემალი; IV ყუთში — მსხალი; V ყუთში — ვაშლი, ატამი და მსხალი. თითოეულ ყუთზე საჭიროა გავაკეთოთ მხოლოდ ერთი შემდეგი წარწერებიდან: „ატამი“, „ვაშლი“, „მსხალი“, „ქლიავი“ ან „ტყემალი“ ისე, რომ შესაბამის ყუთში აუცილებლად იყოს მითითებული ნაყოფი.

შეადარეთ ამ ამოცანის მიხედვით შედგენილი გრაფი პარაგრაფის თეორიული ნაწილის პირველ მაგალითში შედგენილ გრაფს.

2 შეადგინეთ რაიმე ამოცანა, რომლის ამოსახსნელად გამოიყენებთ იმავე ტიპის გრაფს, რაც იყო წინა ამოცანაში.

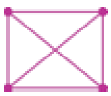
3 სურათზე მოცემულია გრაფი. ზოგიერთ წვეროში ორი წიბო იყრის თავს, ზოგან — სამი.

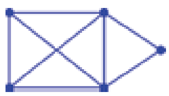


გვსურს შემოვიაროთ ფანქრით ეს გრაფი ისე, რომ თითოეულ წიბოზე მხოლოდ ერთხელ გავიაროთ.

- რამდენი წიბო იყრის თავს A და B წვეროებში?
- ხომ არ აირჩევდით რომელიმე ამ წვეროს შემოვლის დასაწყისად, მეორეს კი — შემოვლის დასასრულად? **პასუხი დაასაბუთეთ.**
- რამდენი წიბო იყრის თავს ყველა სხვა წვეროში?
- რამდენიმე ადგილას მითითებულია შესაძლო შემოვლის მიმართულება. შეეცადეთ გამოიყენეთ ეს მითითებები და ამოხსნათ ამოცანა.

4 შეიძლება თუ არა მოცემული გრაფის უწყვეტი შემოვლა ყოველ წიბოზე მხოლოდ ერთხელ გავლით და საწყის წერტილში დაბრუნებით?

ა) 

ბ) 

5 ამოხსენით 42-ე ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა საწყის წერტილში დაბრუნება არაა აუცილებელი.

6 დაასაბუთეთ, რომ 6-კაციან ჯგუფში ყოველთვის მოიძებნება 3 კაცი, რომელთაგან თითოეული იცნობს დანარჩენს, ან 3 კაცი, რომელთაგან თითოეული არ იცნობს დანარჩენს.

მითითება. გამოსახეთ კაცები რაიმე წერტილებით, მაგალითად, A, B, C, D, E, F. შეაერთეთ ნებისმიერი ორი უწყვეტი წირით (წიბოთი), თუ ისინი იცნობენ ერთმანეთს; ან წყვეტილი წიბოთი, თუ ისინი არ იცნობენ ერთმანეთს.

7 ვთქვათ, 6 ქალაქი ისეა დაკავშირებული ერთმანეთთან სარკინიგზო და საავტომობილო გზებით, რომ თითოეული მათგანიდან ნებისმიერ სხვა ქალაქში შეიძლება ან მხოლოდ მატარებლით ჩასვლა, ან — მხოლოდ ავტობუსით. ყოველთვის შეირჩევა თუ არა ამ ექვსი ქალაქიდან ისეთი სამი ქალაქი, რომელთა შემოვლა შეიძლებოდეს რომელიმე ერთი ტიპის ტრანსპორტით (ან ავტობუსით, ან — მატარებლით)?

8 წვეულებაზე 6-მა მეგობარმა მოიყარა თავი. დაასაბუთეთ, რომ ყოველ მომენტში არსებობს სამი მათგანი, რომლებმაც უკვე ჩამოართვეს ხელი ერთმანეთს, ან ჯერ არ ჩამოურთმევიათ ხელი ერთმანეთისთვის.

9 სიბრტყეზე 6 წერტილია მოცემული. მათგან არცერთი სამეული ერთ წრფეს არ ეკუთვნის. ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთები ორი ფერითაა წარმოდგენილი — წითელი და მწვანე ფერით. არსებობს თუ არა სამკუთხედი, რომლის გვერდები ერთი ფერითაა წარმოდგენილი?

10 წესიერი ექვსკუთხედის ყოველი წვერო შეერთებულია ყოველ სხვა წვეროსთან ორი სხვადასხვა „ფერის“ მონაკვეთით — წითლით ან ცისფრით. დაასაბუთეთ, რომ მოიძებნება სამკუთხედი, რომლის ყველა გვერდი ერთი ფერისაა.

11 ჭიანჭველა კუბის ფორმის ჭურჭელში შეძვრა. შეძლებს თუ არა ჭიანჭველა შემოიაროს კუბის თორმეტივე წვერო ისე, რომ მხოლოდ წიბოების გასწვრივ იმოძრაოს (უწყვეტად) და, ამასთანავე, რაიმე წიბოზე 2-ჯერ არ გაიაროს?

მითითება. შეადარეთ ეს ამოცანა მე-3 ამოცანას და გამოიყენეთ იქ არსებული მითითებები.

12 გადავნომროთ რიცხვითი სიმრავლეები: არაუარყოფითი მთელი რიცხვები — I; მთელი რიცხვები — II; ირაციონალური რიცხვები — III; არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვები — IV; ნამდვილი რიცხვები — V.

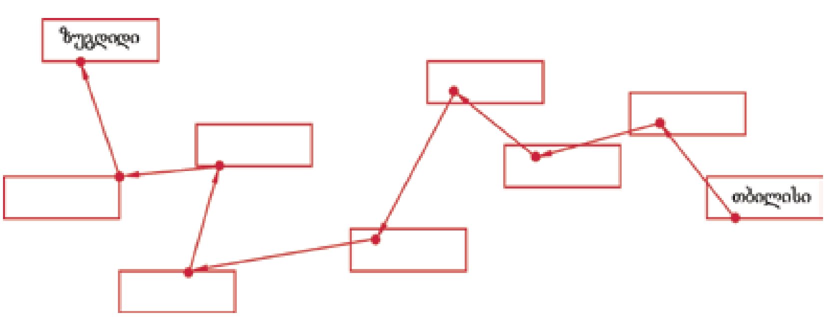
წარმოადგინეთ ორიენტირებული გრაფით სქემა, რომელიც

ა) გვიჩვენებს თქვენ მიერ სასწავლო პროგრამით ამ რიცხვების შესწავლის თანამიმდევრობას;

ბ) გვიჩვენებს X კლასში ამ რიცხვითი სისტემების გამეორების თანამიმდევრობას.

13 მოცემულია ოთხი წერტილი $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 1)$, $C(1;\ 0)$, $D(0;\ 0)$. რა უმცირესი ოდენობის მონაკვეთებით უნდა შევაერთოთ ეს წერტილები, რომ მხოლოდ ამ მონაკვეთების გასწვრივ მოძრაობით ნებისმიერი წერტილიდან ნებისმიერ სხვა წერტილში მოსახვედრად არაუმეტს 1,5 ერთეულის სიგრძის გზის გავლა გვჭირდებოდეს?

14 ვთქვათ, ავტომობილით მიემგზავრებით თბილისიდან ზუგდიდისკენ. შემოთავაზებული ქალაქებიდან შეარჩიეთ შესაფერისები და განალაგეთ ისინი ორიენტირებული გრაფის წვეროებში თქვენი მოგზაურობის შესაბამისად.

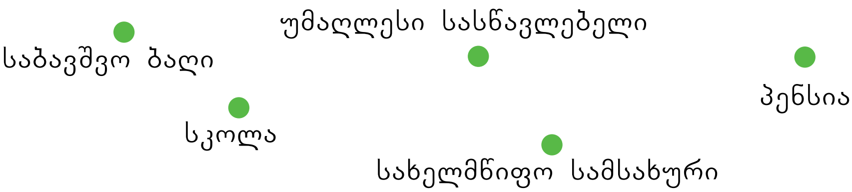


გორი
აბაშა
ზესტაფონი
სენაკი
მცხეთა
ქუთაისი
ხაშური

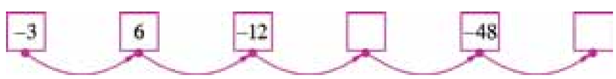
15 გვაქვს სამი დოქი — რვალიტრიანი (სავსე), ხუთლიტრიანი და სამლიტრიანი (ცარიელები). როგორი გადასხმები უნდა მოვახდინოთ ამ ჭურჭლებში, რომ რვალიტრიანსა და ხუთლიტრიანში მივიღოთ 4-4 ლიტრი?

მითითება. შეიძლება გამოიყენოთ გრაფი, რომლის შედგენა ასე იწყება: (8; 0; 0)→(3; 5; 0)→

16 მოიფიქრეთ და დაასახელეთ რაიმე კანონზომიერება, რომლის მიხედვით შეიძლება მოცემული წვეროების მქონე ორიენტირებული გრაფის შედგენა.



17 მოიფიქრეთ რაიმე კანონზომიერება რომლის მიხედვით არის დაწყებული ამ გრაფის შედგენა, შემდეგ დაასრულეთ გრაფი.



18 ხუთი წერტილი წრეწირზეა განლაგებული. რა უმცირესი ოდენობის მონაკვეთებით უნდა დავაკავშიროთ ეს წერტილები, რომ ყოველი მათგანიდან ნებისმიერ სხვაში მოხვედრა გავლებული მონაკვეთების გასწვრივ მოძრაობისას შეიძლებოდეს არაუმეტეს ერთ სხვა მოცემულ წერტილზე გავლის საშუალებით?

1.3 მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი

გავიხსენოთ რეკურენტული ფორმულა, რომლითაც (a_n) არითმეტიკული პროგრესია მოიცემა:

$$a_{n+1}=a_n+d,\ n\in\mathrm{N}. \qquad (1)$$

არითმეტიკული პროგრესიის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინასაგან ერთი და იმავე d რიცხვის (პროგრესიის სხვაობის) მიმატებით. (1) ფორმულაზე დაყრდნობით შევნიშნეთ ის კანონზომიერებაც, რაც არითმეტიკული პროგრესიის წევრებისთვის არსებობს:

$$\boldsymbol{a_n=a_1+d(n-1),\ n\in\mathrm{N};} \qquad (2)$$

ანუ, **თუ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა არის d, მაშინ a_n — ამ პროგრესიის n-ური წევრი (2) ფორმულით გამოითვლება.**

ეს დებულება აღვნიშნოთ $A(n)$-ით.

$A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$-ის ჭეშმარიტობა ნიშნავს, რომ (2) ფორმულა სწორია, როცა $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$. შეამოწმეთ, რომ $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$ დებულებები ჭეშმარიტია.

$A(4)$-ის ჭეშმარიტობა შეიძლება $A(3)$-ის ჭეშმარიტობიდან მივიღოთ:

$$a_4=a_3+d=a_1+2d+d=a_1+3d.$$

$A(4)$-ის ჭეშმარიტობიდან კი შეიძლება მივიღოთ $A(5)$-ის ჭეშმარიტობა:

$$a_5=a_4+d=a_1+3d+d=a_1+4d.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ ჭეშმარიტია $A(k)$, მაშინ ჭეშმარიტია $A(k+1)$-იც.

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+d(k-1)+d=a_1+dk-d+d=a_1+dk=a_1+d(k+1-1).$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ $A(5)$ ჭეშმარიტობიდან გამომდინარეობს $A(6)$-ის ჭეშმარიტობა, $A(6)$-ს ჭეშმარიტობიდან — $A(7)$-ს ჭეშმარიტობა და ა. შ. $A(n)$-ის ჭეშმარიტობა ემყარება ე. წ. **მათემატიური ინდუქციის პრინციპს:**

ვთქვათ, $A(n)$ არის წინადადება, რომელშიც n ნატურალური რიცხვია და

. $A(n)$ ჭეშმარიტია, როცა $n=1$,

. $A(n)$-ის ჭეშმარიტობიდან, როცა $n=k$ (k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია) გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტობა მომდევნო $n=(k+1)$-სთვისაც, მაშინ $A(n)$ ჭეშმარიტია ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის.

ჩამოთვლილი ორი პირობა მოკლედ შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

. $A(1)$ ჭეშმარიტია,

. $A(k)\Rightarrow A(k+1)$, ანუ $A(k)$-ს ჭეშმარიტობიდან გამომდინარეობს $A(k+1)$-ის ჭეშმარიტობა.

დამტკიცების ხერხს, რომელიც ემყარება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპს, ეწოდება დამტკიცება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

მაგალითი

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ, თუ h არის -1-ზე მეტი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, მაშინ ნებისმიერი ნატურალური n-ისთვის

$$(1+h)^n \geq 1+nh. \qquad (1)$$

(1) ტოლობა აღვნიშნოთ $A(n)$-ით.

1. $A(1)$ ჭეშმარიტია, რადგან

$$(1+h)^1=1+h \geq 1+h.$$

2. დავამტკიცოთ $A(k) \Rightarrow A(k+1)$, $k \in \mathbf{N}$, ანუ დავამტკიცოთ, რომ

$$(1+h)^k \geq 1+kh \qquad (2)$$

უტოლობიდან გამომდინარეობს

$$(1+h)^{k+1} \geq 1+(k+1)h \qquad (3)$$

უტოლობა.

პირობის თანახმად, $1+h>0$. ამიტომ (2)-ის ორივე მხარეს $(1+h)$-ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$(1+h)^{k+1} \geq (1+kh)(1+h),$$

$$(1+h)^{k+1} \geq 1+kh+h+kh^2.$$

რადგან $kh^2 \geq 0$, ამიტომ

$$(1+h)^{k+1} \geq 1+(k+1)h.$$

მაშასადამე, მეორე მოთხოვნაც შემოწმებულია, ამიტომ დებულება ნებისმიერი n-ისთვის არის ჭეშმარიტი.

შევაჯამოთ: *გავეცანით დებულებათა დასაბუთების ახალ მეთოდს — მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს.*

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენების პროცესი ორი ნაწილისგან შედგება.

ა) $A(n)$ დებულების შემოწმება, როცა $n=1$.

ბ) $A(k) \Rightarrow A(k+1)$-ის შემოწმება ($A(k)$-ს ჭეშმარიტობიდან გამომდინარეობს $A(k+1)$-ის ჭეშმარიტობა).

თუ ორივე ნაწილი ჩატარებულია, $A(n)$ დებულება ნებისმიერი n-ისთვის არის ჭეშმარიტი.

ს

სიტყვა ინდუქცია ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს „მიყვანას“ — ინდუქცია ჭეშმარიტობამდე მიყვანის ხერხია. მაგალითად, ვაკვირდებით რა კერძო შემთხვევებს — $a_2=a_1+d$, $a_3=a_1+2d$, ..., $a_{10}=a_1+9d$, ვაკეთებთ დასკვნას — $a_n=a_1+d(n-1)$. ინდუქციის გამოყენების პირველი მაგალითები ძველი საბერძნეთის მეცნიერთა (VI-IV საუკუნე ძ.წ.ა) შრომებშია აღმოჩენილი.

ინდუქციას, ინდუქციურ მსჯელობას (კერძო შემთხვევებზე დაყრდნობით ზოგადი დასკვნის გამოტანას) ხშირად შეცდომებამდეც მივყავართ. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა პირველ ათეულში 4 მარტივი რიცხვია (2, 3, 5, 7), მეორე

ათეულშიც — 4 მარტივი რიცხვია — (11; 13; 17; 19). ამ ფაქტს ზოგიერთი მიჰყავს ინდუქციურ დასკვნამდე — შემდეგ ათეულშიც ოთხი მარტივი რიცხვია, რაც სწორი არ არის.

ფრანგი მათემატიკოსი პიერ ფერმა (XVII საუკუნე) განიხილავდა რიცხვებს:

$2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$,

5, 17, 257, 65537 მარტივი რიცხვებია.

ფერმამ გამოთქვა ვარაუდი: ნებისმიერი n ნატურალურ რიცხვისთვის $2^{2^n}+1$ მარტივი რიცხვია. ეს ჰიპოთეზა ინდუქციითაა მიღებული და მხოლოდ რამდენიმე შემთხვევის განხილვის შედეგს ეფუძნება. ეს დასკვნა მცდარი აღმოჩნდა. ეილერმა კონტრმაგალითს მიაგნო — $2^{2^n}+1$, როცა $n=5$, შედგენილი რიცხვია, იგი იყოფა 641-ზე.

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 ვთქვათ, (a_n) მიმდევრობის n-ური წევრი არის პირველი n ნატურალური რიცხვის ჯამი. მაშინ $a_4=$

1) 6 2) 15 3) 21 4) 10.

2 ფიბონაჩის მიმდევრობის ყოველი წევრი, დაწყებული მესამედან წინა ორი წევრის ჯამის ტოლია; ამ მიმდევრობის პირველი და მეორე წევრები 1-ის ტოლია. რა რეკურენტული ფორმულით მოიცემა n-ური წევრი, როცა $n\geq 3$?

1) $a_n=a_{n+1}+a_{n+2}$ 2) $a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$

3) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 4) $a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$.

3 მოცემულია: $S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+....+\frac{1}{n(n+1)}$.

რისი ტოლია S_5?

1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}$ 2) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}$

3) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}$ 4) $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}$

4 თუ $a_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, მაშინ $a_{n+1}=$

1) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}+1$ 2) $\frac{n^2(n+2)^2}{4}$ 3) $\frac{(n+1)^4}{4}$ 4) $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

5 თუ $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, მაშინ $S_{n+1}=$

1) $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ 2) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+1$

3) $\frac{(n+1)^2(2n+1)}{6}$ 4) $\frac{n(n+2)(2n+1)}{6}$

6 მოცემულია: $a_k=\frac{5}{k(k+1)}$; მაშინ $a_{k+1}=$

1) $\frac{5}{(k+1)^2}$ 2) $\frac{5}{k(k+1)}+1$ 3) $\frac{5}{(k+1)(k+2)}$ 4) $\frac{5}{(k+1)(k+2)}+1$

7 თუ $S_k=\frac{k}{2}(3k-1)$, მაშინ $S_{k+1}=$

1) $\frac{k}{2}(3k+2)$ 2) $\frac{k}{2}(3k+2)+1$ 3) $\frac{k}{2}(3k-1)+1$ 4) $\frac{k+1}{2}(3k+2)$

8 თუ $S_k=\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, მაშინ $S_{k+1}=$

1) $\frac{1}{(k+2)(k+4)}$ 2) $\frac{1}{(k+2)(k+4)}+1$

3) $\frac{1}{(k+1)(k+3)}+1$ 4) $\frac{1}{(k+1)(k+4)}$

ამოხსენით ამოცანები

9 გამოიყენეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი და დაამტკიცეთ, რომ (a_n) გეომეტრიული პროგრესიის n-ური წევრი მოიცემა ფორმულით:

$a_n=a_1q^{n-1}$, q არის პროგრესიის მნიშვნელი.

10 (a_n) მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით: $a_1=1$, $a_{n+1}=(n+1)\cdot a_n$, $n\in\mathbb{N}$. შეეცადეთ აღმოაჩინოთ სავარაუდო ფორმულა a_n-ისთვის (n-ური წევრის ფორმულა) და შემდეგ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცოთ მისი ჭეშმარიტობა.

11 (a_n) მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით:

$a_1=1$, $a_{n+1}=(n+3)a_n$, $n\in\mathbb{N}$.

იპოვეთ n-ური წევრის ფორმულა.

12 გამოიყენეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი და დაასაბუთეთ:

ა) $1+3+5+\ \dots\ +(2n-1)=n^2$;

ბ) $1+2+3+\ \dots\ +n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

გ) $1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

დ) $3+7+11+15+\ \dots\ +(4n-1)=n(2n+1)$;

ე) თუ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიაა, მაშინ მისი n წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულით $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$ (ჩავთვალოთ, რომ $S_1=a_1$);

ვ) თუ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიაა, მაშინ

- მისი n წევრის ჯამი (როცა $q\neq1$) გამოითვლება ფორმულით

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

- რა ფორმულით გამოითვლება S_n, როცა $q=1$?

მითითება. $S_{n+1}=S_n+b_{n+1}=S_n+b_1q^n=\dfrac{b_1q^n-b_1+b_1q^{n+1}-b_1q^n}{q-1}=\dfrac{b_1q^{n+1}-b_1}{q-1}$.

13 იპოვეთ ჯამი:

ა) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dots+\dfrac{1}{n(n+1)}$;

მითითება. შეიძლება თუ არა ივარაუდოთ, რომ აღნიშნული ჯამია $S_n=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$? მის ამორჩენაში დაგეხმარებათ S_n-ის ასეთი წარმოდგენა

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

ბ) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\dots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

გამოიყენეთ წინა ამოცანის მითითება.

14 დაასაბუთეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის:

ა) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ \dots\ +n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

ბ) $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ \dots\ +n(3n+1)=n(n+1)^2$;

გ) $1+4+7+10+\ \dots\ +(3n-2)=\dfrac{n}{2}(3n-1)$.

15 დაასაბუთეთ, რომ მცდარია წინადადება: „ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის n^2+11n იყოფა 6-ზე“.

16 დაასაბუთეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-ისთვის 7^n-1 იყოფა 6-ზე.

ამოხსნა. ა) თუ $n=1$, მაშინ $7^n-1=7-1=6$ და დებულება ჭეშმარიტია ამ შემთხვევაში;

ბ) ვთქვათ, 7^k-1 იყოფა 6-ზე, მაშინ შევამოწმოთ, რომ $7^{k+1}-1$ იყოფა 6-ზე.

$$7^{k+1}-1=7^k\cdot7-1=7^k\cdot7-1+7-7=7(7^k-1)+6.$$

დაშვების თანახმად 7^k-1 იყოფა 6-ზე, ამიტომ $(7^{k+1}-1)$-იც იყოფა 6-ზე. მაშასადამე, ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის 7^n-1 იყოფა 6-ზე.

17 მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაასაბუთეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის

ა) $3^{3n+2}+2^{4n+1}$ არის 11-ის ჯერადი;

ბ) $4^n+15n-1$ არის 9-ის ჯერადი;

გ) $7^{2n}-1$ არის 48-ის ჯერადი.

18* ვთქვათ, φ_n არის ფობინაჩის მიმდევრობის n-ური წევრი, მაშინ

$$\varphi_1=1,\ \varphi_2=1 \qquad (1)$$

$$\varphi_{n+2}=\varphi_n+\varphi_{n+1},\ n\in\mathrm{N}. \qquad (2)$$

ა) • არის თუ არა ფიბონაჩის მიმდევრობა გეომეტრიული პროგრესია?

• შეეცადეთ ისე შეარჩიოთ q რიცხვი, რომ $\varphi_n=q^{n-1}$ აკმაყოფილებდეს (2) ტოლობას (სწორად ჩატარებული მსჯელობით თქვენ იპოვით ასეთი q-ს ორ მნიშვნელობას: $q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. ამრიგად, $\varphi'_n=q^{n-1}$ და $\varphi''_n=q^{n-1}$ აკმაყოფილებს (2) ტოლობას).

• აჩვენეთ, რომ (2) ტოლობას აკმაყოფილებს აგრეთვე

$$\varphi_n=\mathrm{C}_1\varphi'_n+\mathrm{C}_2\varphi''_n,\ n\in\mathrm{N},\ \mathrm{C}_1\in\mathbf{R},\ \mathrm{C}_2\in\mathbf{R}.$$

• აჩვენეთ, რომ

$$\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad (3)$$

წარმოგვიდგენს ფიბონაჩის მიმდევრობის n-ურ წევრს, ანუ აკმაყოფილებს (1) და (2) ტოლობებს.

ბ) მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ, რომ (3) ფორმულით წარმოდგენილია ფიბონაჩის მიმდევრობის n—ური წევრი.

დამტკიცებისას ხელსაყრელია გამოიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი, რომელიც შემდეგნაირადაა ფორმულირებული:

• თუ $A(n)$ წინადადება ჭეშმარიტია, როცა $n=1$ და

• ნებისმიერად შერჩეული k-თვის $A(n)$-ის ჭეშმარიტობიდან ყოველი $n \leq k$-თვის გამომდინარეობს $A(n)$-ის ჭეშმარიტობა, როცა $n=k+1$, მაშინ $A(n)$ ჭეშმარიტია ნებისმიერი ნატურალური n-სთვის.

19* **დაასაბუთეთ**, რომ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-თვის

ა) $3^{2n+2}-8n-9$ არის 64-ის ჯერადი;

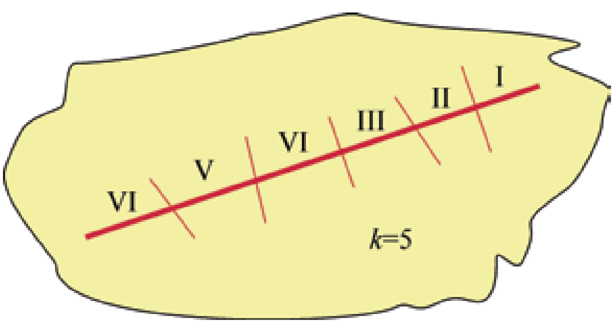
ბ) $7^{n+2}+8^{2n+1}$ არის 19-ის ჯერადი;

გ) $7^{n+2}+8^{2n+1}$ არის 57-ის ჯერადი.

20* **დაასაბუთეთ:** თუ სიბრტყეზე გავლებულია n წრფე, რომელთაგან არც ერთი ორი არ არის პარალელური და არც ერთი სამი არ გადის ერთ წერტილზე, მაშინ სიბრტყე ამ წრფეებით იყოფა $1+\frac{n(n+1)}{2}$ ნაწილად.

მითითება. I ფაზა: $n=1$. ერთი წრფე სიბრტყეს ორ ნაწილად ჰყოფს; $1+\frac{1\cdot(1+1)}{2}=2$.

II ფაზა: გადასვლა k-დან $(k+1)$-ზე.



ვთქვათ, k წრფით სიბრტყე იყოფა $1+\frac{k(k+1)}{2}$ ნაწილად. ვთქვათ, გავლებულია $(k+1)$ ცალი წრფე. ერთ-ერთი იყოს $(k+1)$-ე. პირველი k წრფე სიბრტყეს ჰყოფს $1+\frac{k(k+1)}{2}$ ნაწილად (გარკვეულობისთვის მათ k-ური ნაწილები ვუწოდოთ). $(k+1)$-ე წრფე ყველა დანარჩენ n წრფეს კვეთს და მაშასადამე, იგი ამ k წრფით $(k+1)$ ნაწილად იყოფა.

ქვემოთ „დამტკიცებულია“ დებულებები მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის არასწორი გამოყენებით. შეეცადეთ აღმოაჩინოთ შეცდომა.

1 არ არსებობს რიცხვთა სასრული სიმრავლე, რომელიც შეიცავს განსხვავებულ რიცხვებს.

„დამტკიცება“. ვთქვათ, $n=1$. დებულება ჭეშმარიტია — არ არსებობს ერთელემენტიანი სიმრავლე, რომელშიც განსხვავებული რიცხვებია. ვთქვათ, თეორემა ჭეშმარიტია, როცა $n=k$. ავიღოთ რაიმე სიმრავლე, რომელიც შედგება $k+1$ ელემენტისგან — a_1, a_2, ..., a_k. რადგან თეორემა ჭეშმარიტია, როცა $n=k$, ამიტომ $a_1=a_2=a_3=$ ... $=a_k$. იმავე პირობის თანახმად, $a_2=a_3=$ ... $=a_{k+1}$. მაშასადამე, $a_1=a_2=$ ... $=a_{k+1}$.

- რა შეცდომა დავუშვით?

2 ყოველი ნატურალური რიცხვი ტოლია მისი მომდევნო ნატურალური რიცხვისა.

„დამტკიცება“. ვთქვათ, თეორემა ჭეშმარიტია, როცა $n=k$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $k=k+1$. ვაჩვენოთ, რომ მაშინ თეორემა ჭეშმარიტია, როცა $n=k+1$, ანუ, $k+1=k+2$. იგი კი გამომდინარეობს ტოლობიდან $k=k+1$.

- რა შეცდომაა ამ მსჯელობაში?

3 ყველა ბიჭი ერთი და იმავე სიმაღლისაა.

დამტკიცება: თუ $n=1$, თეორემა, ცხადია, ჭეშმარიტია. ვთქვათ, თეორემა ჭეშმარიტია, როცა $n=k$ — ყოველი k ოდენობის ბიჭი ტოლი სიმაღლისაა. გადავნომროთ ბიჭები რიცხვებით: 1, 2, 3, ..., k, $k+1$. ინდუქციის დაშვების თანახმად, ბიჭები ნომრებით 1, 2, 3, ..., k ტოლი სიმაღლისანი არიან. მეორეს მხრივ, ბიჭები ნომრებით 2, 3, 4, ..., k, $k+1$ ტოლი სიმაღლისანი არიან. მაშასადამე, ყველა ბიჭი ტოლი სიმაღლისაა.

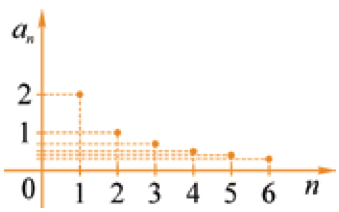
- სად დავუშვით შეცდომა?

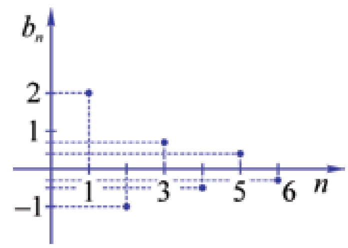
1.4 უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები

უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის განხილვა დავიწყოთ მაგალითებით. ვთქვათ, (a_n) და (b_n) მიმდევრობები მოცემულია n-ური წევრის ფორმულებით: $a_n=\frac{2}{n}$, $b_n=\frac{(-1)^{n+1}2}{n}$. ამ მიმდევრობებიდან თითოეულს ასეთი თვისება აქვს:

ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისთვის არსებობს მიმდევრობის წევრი, რომლის მომდევნო ყოველი წევრის მოდული ნაკლებია ε-ზე. ეს ნიშნავს, რომ (a_n) და (b_n) **უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია.**

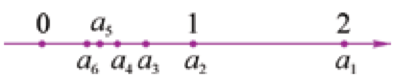
დააკვირდით ამ მიმდევრობების გეომეტრიულ გამოსახვებს:



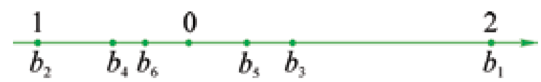


საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახული $(n;\ a_n)$ და $(n;\ b_n)$ წერტილების ორდინატები, შესაბამისად, (a_n) და (b_n) მიმდევრობების წევრებია.

ახლა იგივე მიმდევრობები რიცხვით წრფეზე გამოვსახოთ



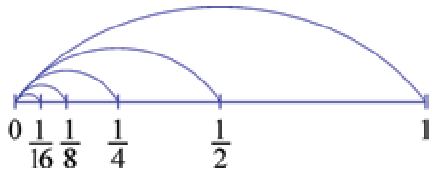
რიცხვით წრფეზე გამოსახულია წერტილები: $a_1=2$, $a_2=1$; $a_3=\frac{2}{3}$, $a_4=\frac{1}{2}$; $a_5=\frac{2}{5}$; $a_6=\frac{1}{3}$.



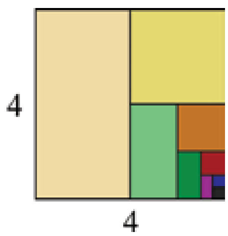
ამ რიცხვით წრფეზე გამოსახულია წერტილები: $b_1=2$; $b_2=-1$; $b_3=\frac{2}{3}$; $b_4=-\frac{1}{2}$; $b_5=\frac{2}{5}$; $b_6=-\frac{1}{3}$.

ვთქვათ, $\varepsilon=\frac{1}{4}$, მაშინ უკვე მერვე წევრის მომდევნო ყოველი წევრის მოდული (ორივე მიმდევრობაში) ნაკლებია $\frac{1}{4}$-ზე, საკოორდინატო სიბრტყეზე შესაბამისი წერტილიდან აბსცისათა ღერძამდე მანძილი ნაკლებია $\frac{1}{4}$-ზე, ხოლო რიცხვით წრფეზე შესაბამისი წერტილიდან სათავემდე მანძილი ნაკლებია $\frac{1}{4}$-ზე.

- ვთქვათ, $\varepsilon=\frac{1}{50}$. რომელი წევრის შემდეგ შესრულდება პირობა: $|a_n|<\frac{1}{50}$?
- ვთქვათ, $\varepsilon=\frac{1}{100}$; რომელი წევრის შემდეგ შესრულდება პირობა: $|b_n|<\frac{1}{100}$?
- გაიხსენეთ და აღწერეთ ის მაგალითი, რომელიც ერთეული მონაკვეთის თანამიმდევრულ დაყოფას ეხება — ყოველი შემდეგი მონაკვეთის სიგრძე წინას ნახევარია.



• შეადგინეთ მიღებული მონაკვეთების სიგრძეთა მიმდევრობა. წარმოადგენს თუ არა ის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობას?



სურათზე ოთხი ერთეულის სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატის დაყოფის პროცესია წარმოდგენილი. ყოველ ეტაპზე დარჩენილი ნაწილის განახევრება ხდება.

• დაწერეთ იმ რიცხვთა მიმდევრობა, რომლებიც აღნიშნული წესით მიღებულ ფიგურათა ფართობებს გამოსახავენ.

• იმსჯელეთ — არის თუ არა ეს მიმდევრობა უსასრულოდ მცირე?

ახლა უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის ერთი მნიშვნელოვანი თვისება აღვნიშნოთ: უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა **შემოსაზღვრული მიმდევრობაა.**

(a_n) მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ მიმდევრობის ყოველი წევრის მოდული ნაკლებია M-ზე — $|a_n|<M$, $n\in \mathrm{N}$.

არსებობს შემოსაზღვრული მიმდევრობები, რომლებიც უსასრულოდ მცირე არ არის.

მაგალითად, ა) $c_n=4+\frac{3}{n^2+1}$ და ბ) $d_n=(-1)^n$ მიმდევრობები არ არის უსასრულოდ მცირე.

მართლაც, თუ $n\geq 1$, მაშინ $\frac{3}{n^2+1}>0$, ამიტომ $c_n>4$, $n\in \mathrm{N}$ — მიმდევრობა არ არის უსასრულოდ მცირე, მეორე მხრივ $n^2+1>1$ ნებისმიერი $n\in \mathrm{N}$-თვის; $\frac{1}{n^2+1}<1$; $\frac{3}{n^2+1}<3$; $4<4+\frac{3}{n^2+1}<7$, ნებისმიერი $n\in \mathrm{N}$-სთვის — ეს (c_n)-ის შემოსაზღვრულობას ნიშნავს.

(d_n) მიმდევრობის წევრების მოდულები 1-ზე ნაკლები არ არის, ამიტომ (d_n) არ არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა. ამასთანავე, $|d_n|=1$ — რაც (d_n)-ის შემოსაზღვრულობას ნიშნავს.

1 თუ (a_n) და (b_n) მიმდევრობები უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია, მაშინ ამ მიმდევრობათა ჯამი, ანუ (a_n+b_n) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა:

მაგალითად,

$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots \qquad a_n=10^{1-n};$

$0{,}3;\ 0{,}03;\ 0{,}003;\ 0{,}0003;\ 0{,}00003;\ \ldots \qquad b_n=3\cdot 10^{-n}$

უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია; მათი ჯამი —

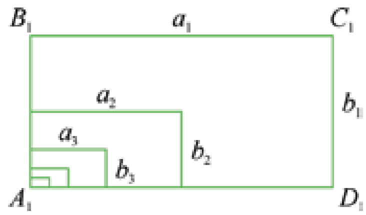
$1{,}3;\ 0{,}13;\ 0{,}013;\ 0{,}0013;\ 0{,}00013;\ \ldots \qquad (a_n+b_n)=13\cdot 10^{-n}$

უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

2

თუ (a_n) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა, (k_n) შემოსაზღვრული მიმდევრობაა, მაშინ $(k_n \cdot a_n)$ ((a_n) და (k_n) მიმდევრობების ნამრავლი) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

კერძოდ, ორ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა ნამრავლი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.



სურათზე წარმოდგენილი $A_1B_1C_1D_1$ მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები a_1 ერთეული და b_1 ერთეულია. აქვე წარმოდგენილია ამ მართკუთხედის გვერდების განახევრებით მიღებული მართკუთხედი და ეს პროცესი გრძელდება — თუ ასე მიღებული ერთი რაიმე მართკუთხედის გვერდებია a_k და b_k, მაშინ მისგან მიღებული მართკუთხედის გვერდებია $\frac{a_k}{2}$ და $\frac{b_k}{2}$, ეს რიცხვები a_{k+1}-ითა და b_{k+1}-ითაა აღნიშნული. ამრიგად, ამ წესით მიიღება რიცხვთა ორი მიმდევრობა (a_n) და (b_n). ისინი რომ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია, ადვილად დარწმუნდებით (გამოიყენეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი და აჩვენეთ რომ $a_n=\frac{a_1}{2^{n-1}}$, $b_n=\frac{b_1}{2^{n-1}}$. ეს გაგიიოლებთ დასაბუთებას). უსასრულოდ მცირეა მათი ნამრავლიც — $(a_n \cdot b_n)$ მიმდევრობა, ანუ მართკუთხედების ფართობების მიმდევრობა.

უსასრულოდ მცირე (a_n) მიმდევრობისა და რაიმე a რიცხვის ნამრავლი $(a \cdot a_n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

მაგალითი 1

ვისარგებლოთ იმით, რომ $\left(\frac{1}{n}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა და ვაჩვენოთ, რომ $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

გვაქვს: $\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$. მაშასადამე, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ არის ორი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის ნამრავლი, ამიტომ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

მაგალითი 2

ვაჩვენოთ, რომ $\left(\frac{n}{n^2+5}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

გვაქვს:

$$\frac{n}{n^2+5}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2+5}.$$

თუ $n \geq 1$, მაშინ $\frac{n^2}{n^2+5}<1$. მაშასადამე, $\left(\frac{n^2}{n^2+5}\right)$ შემოსაზღვრული მიმდევრობაა.

$\left(\frac{1}{n}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა. ამრიგად, $\left(\frac{n}{n^2+5}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

ახლა **უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა** აღვწეროთ:

- „(a_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა" ნიშნავს: $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა. ვგულისხმობთ $a_n \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$.
- გამოიყენეთ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა მაგალითები, რომლებიც ამ პარაგრაფში არის მითითებული და მოიყვანეთ უსასრულოდ დიდი მიმდევრობების მაგალითები.

შევაჯამოთ: *ვისაუბრეთ უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდ მიმდევრობებზე; წარმოვადგინეთ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა ზოგიერთი თვისება.*

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 თუ (a_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა და ნებისმიერი ნატურალური n-ისთვის $a_n \neq 0$, მაშინ $\left(\frac{1}{a_n}\right)$

1) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა
2) არ არის შემოსაზღვრული მიმდევრობა
3) არ არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა
4) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

2 $\left(\frac{1}{n}\right)$ მიმდევრობა

1) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა
2) არ არის შემოსაზღვრული მიმდევრობა
3) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა
4) არ არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა.

3 $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ მიმდევრობა

1) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა

2) არ არის შემოსაზღვრული მიმდევრობა
3) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა
4) არ არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა.

4 (n^2) მიმდევრობა
1) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა
2) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა
3) არ არის უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა
4) შემოსაზღვრული მიმდევრობაა.

5 ვთქვათ, k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, მაშინ 1^k, 2^k, 3^k, ... , ანუ (n^k)
1) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა
2) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა
3) არ არის უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა
4) შემოსაზღვრული მიმდევრობაა.

6 $\left(\frac{n^2+5}{n}\right)$
1) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა
2) არ არის უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა
3) შემოსაზღვრული მიმდევრობაა
4) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა.

7 მოცემულია მიმდევრობები:

ა) $\left(\frac{1+(-1)^n}{n^2}\right)$; ბ) $\left(\frac{n}{n+10}\right)$; გ) $\left(\frac{3n+5}{2n-1}\right)$; დ) $\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

მათგან უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა
1) ბ) 2) გ) 3) დ) 4) ა).

ამოხსენით ამოცანები

8 გამოიყენეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი და დაასაბუთეთ, რომ ყოველი ნატურალური k რიცხვისთვის $\frac{1}{1^k}$; $\frac{1}{2^k}$; $\frac{1}{3^k}$; $\frac{1}{4^k}$; ..., ანუ $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ მიმდევრობა უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

9 ვთქვათ, მოცემულია მიმდევრობები: (α_n) და (β_n). ამასთანავე, ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის $\beta_n \neq 0$ და $|\alpha_n| \leq |\beta_n|$.

- დაასაბუთეთ, რომ $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ მიმდევრობა შემოსაზღვრული მიმდევრობაა.
- დაასაბუთეთ, რომ, თუ (β_n) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა, მაშინ (α_n) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

10* მოცემულ მიმდევრობაში მიუთითეთ წევრი, რომლის მოდული არ არის ნაკლები $\frac{1}{100}$-ზე, მისი მომდევნო ყველა წევრის მოდული კი ნაკლებია $\frac{1}{100}$-ზე:

ა) $a_n=\frac{2n+5}{3n^2-2}$; ბ) $a_n=\frac{100}{\sqrt{n+1}}$; გ) $a_n=\frac{3-n}{5n^2+6}$.

11 დაასაბუთეთ, რომ წარმოდგენილი თითოეული მიმდევრობა უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა:

ა) $\left(\frac{6}{n}-\frac{4}{3n^2}+\frac{7}{8n^3}\right)$; ბ) $\left(\frac{1}{n(n^6+2)}\right)$; გ) $\left(\frac{3}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\right)$;

დ) $\left(\frac{5}{(n+4)^5}\right)$; ე) $\left(\frac{5n+9}{n(n+2)}\right)$.

12 მოცემულია მიმდევრობები: $a_n=\frac{1}{n^2}$, $b_n=\frac{1}{n}$, $c_n=\frac{2}{n^2}$.
დაასაბუთეთ:

ა) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ მიმდევრობა უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა;

ბ) $\left(\frac{a_n}{c_n}\right)$ მიმდევრობა არ არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა.

13 ვთქვათ, (a_n) და (b_n) მიმდევრობების ჯამი — (a_n+b_n) — უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა. გამომდინარეობს თუ არა აქედან, რომ აუცილებლად (a_n) და (b_n) მიმდევრობები უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია?

14 ვთქვათ, ორი მიმდევრობის ნამრავლი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა. გამომდინარეობს თუ არა აქედან, რომ თითოეული ეს მიმდევრობა უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა?

15 დაასაბუთეთ, რომ ორი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობის ნამრავლი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა.

16 დაასაბუთეთ, რომ, თუ (b_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა და ნებისმიერი n-ისთვის $|a_n|\geq|b_n|$, მაშინ (a_n) მიმდევრობა უსასრულოდ დიდია.

მითითება. შეიძლება გამოიყენოთ მე-9 ამოცანაში წარმოდგენილი დებულება.

17 დაასაბუთეთ, რომ, თუ (a_n) და (b_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობებია ისეთი, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-ისთვის $a_n\cdot b_n>0$, მაშინ (a_n+b_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა.

მითითება. მოცემულ შემთხვევაში $|a_n+b_n|=|a_n|+|b_n|\geq|a_n|$.

18 დაასაბუთეთ, რომ მოცემული მიმდევრობა უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა:

ა) $(\sqrt{n^3})$; ბ) (n^3+10n^2); გ) $((-1)^n\cdot n)$;

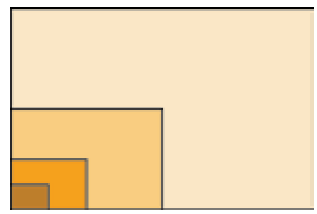
დ) $\dfrac{1+n+n^5}{5-2n+n^4}$; ე) $(5n-n^3)$;

ვ) $\left(\dfrac{2n-n^5}{4-n^3}\right)$; ზ) $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

19 გაიხსენეთ ამ პარაგრაფში განხილული მართკუთხედის მცირე მართკუთხედებად დაყოფის მაგალითი და დაადგინეთ: არის თუ არა უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა ამ მართკუთხედების:

ა) პერიმეტრების მიმდევრობა;

ბ) დიაგონალების მიმდევრობა?



20 ვთქვათ, (a_n) და (b_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობებია. არის თუ არა უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა ამ მიმდევრობათა ჯამი?

პასუხი დაასაბუთეთ.

21* მოცემულია უსასრულო მიმდევრობის პირველი ათი წევრი: 2; 5; 2; 6; 2; 7; 2; 8; 2; 9. აღმოაჩინეთ რაიმე კანონზომიერება და მის მიხედვით წარმოადგინეთ მიმდევრობის კიდევ რამდენიმე წევრი. არის თუ არა მიღებული მიმდევრობა:

ა) შემოსაზღვრული;

ბ) უსასრულოდ დიდი?

22* წინა ამოცანაში მიღებული მიმდევრობა აღნიშნეთ (a_n)-ით. არის თუ არა $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ მიმდევრობა:

ა) შემოსაზღვრული;

ბ) უსასრულოდ მცირე?

ჯ

1 **თემა: თუ $|q|<1$, მაშინ (q^n) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.**

განიხილეთ ჯგუფებში q-ს სხვადასხვა მნიშვნელობა:

ა) $q=\dfrac{1}{5}$; ბ) $q=\dfrac{1}{4}$; გ) $q=\dfrac{1}{6}$; დ) $q=\dfrac{1}{7}$.

- წარმოადგინეთ მიმდევრობის რამდენიმე საწყისი წევრი.

• q-ს მოცემული მნიშვნელობისთვის იპოვეთ $\alpha>0$ რიცხვი, რომლისთვისაც $\frac{1}{|q|}=1+\alpha$ (მაგალითად, თუ $q=\frac{1}{6}$, $\alpha=5$).

• გაიხსენეთ ბერნულის უტოლობა და დაასაბუთეთ, რომ $(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha>n\alpha$ (მაგალითად, $(1+5)^n\geq 1+5n$).

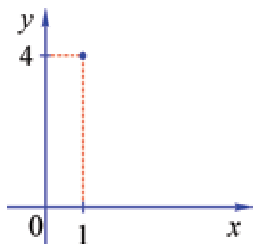
• შეადარეთ მოცემული q-სთვის q^n მიმდევრობა რაიმე უსასრულოდ მცირე მიმდევრობას.

• გამოიყენეთ მე-9 ამოცანაში წარმოდგენილი დებულება.

• ჩაატარეთ მსჯელობა ნებისმიერი q ($|q|<1$) რიცხვისთვის.

2 თემა: მიმდევრობის გეომეტრიული წარმოდგენები.

მოცემულია (d_n) მიმდევრობა, $d_n=\frac{(-1)^{n-1}4}{n}$, $n\in\mathrm{N}$.



• იპოვეთ ამ მიმდევრობის პირველი 5 წევრი.

• საკოორდინატო სიბრტყეზე მონიშნეთ წერტილები: $(n;\ d_n)$, როცა $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

• იპოვეთ იმ ნატურალური n რიცხვების სიმრავლე, რომლებისთვისაც $(n;\ d_n)$ წერტილები ეკუთვნის საკოორდინატო სიბრტყეზე $-0{,}3\leq y\leq 0{,}6$ უტოლობით განსაზღვრულ ზოლს.

1.5 პერიოდული პროცესები და პერიოდული ფუნქციები

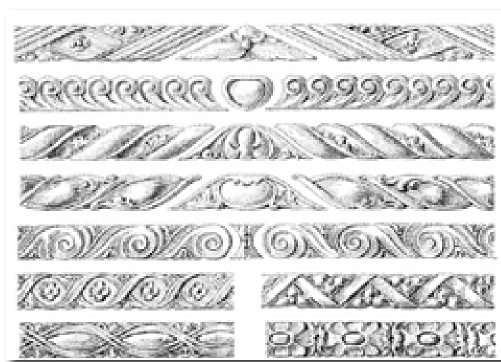
1) ბევრი მოვლენა ბუნებაში პერიოდულად მეორდება — დროის ერთი და იმავე შუალედის გავლის შემდგომ უბრუნდება საწყის მდგომარეობას — პერიოდულად მეორდება. უძველეს დროშივე შეამჩნია ადამიანმა, რომ ცაზე ვარსკვლავთა განლაგება ყოველდღიურად მეორდება; დედამიწაზე პერიოდულად, თანამიმდევრულად იცვლება წელიწადის ოთხი დრო, უფრო ხანგრძლივი დაკვირვებების შედეგად აღმოჩნდა, რომ პერიოდულად, დროის გარკვეულ მონაკვეთებში მეორდება მზისა და მთვარის დაბნელებები.

აკუსტიკაში შეისწავლიან დრეკადი ტალღების წარმოშობასა და გავრცელებას, რაც ძირითადად პერიოდულ რხევებს უკავშირდება.

ფიზიოლოგები გულის რიტმულ ცემას შეისწავლიან, ბიოლოგები — მოცემული სახეობის ცხოველთა ოდენობის პერიოდულ ცვლილებებს. საერთოდ, მეცნიერებისა და ტექნიკის ყველა სფეროში შეისწავლება პერიოდულად მიმდინარე მოვლენები. გამორჩეული ყურადღებით ამ მხრივ დედამიწა და მთელი კოსმოსი შეისწავლება. აქ მიმდინარე პროცესებს ადამიანის ცხოვრებისთვის დიდი მნიშვნელობა აქვს.

გაიხსენეთ მენდელეევის მიერ 1869 წელს აღმოჩენილი კანონზომიერება — ქიმიურ ელემენტთა თვისებები პერიოდულ დამოკიდებულებაშია მათი ატომბირთვების მუხტებთან.

მნიშვნელოვანია პერიოდულობა ხელოვნებაში; არქიტექტურული ძეგლის სილამაზე ხშირად რაიმე დეტალის ან დეტალების ერთობლიობის პერიოდულ გამეორებასთან არის დაკავშირებული. მუსიკაში მეორდება ხოლმე ბგერათა შერწყმა, მელოდია და ამით ძლიერდება მუსიკალური ნაწარმოების მხატვრული ზემოქმედება, ორნამენტებში — ერთი და იმავე ფიგურის პერიოდული გამეორებებით ახლებური, საინტერესო ეფექტი მიიღწევა.



პერიოდულ გამეორებათა კანონზომიერებების აღმოჩენა და დასაბუთება მათემატიკური ამოცანების ამოხსნაში გვეხმარება ხოლმე.

მაგალითად, ვიპოვოთ 2^{1000}-ის ბოლო ციფრი. ამ ამოცანის ამოსახსნელად უფრო ზოგადი ამოცანა შევისწავლოთ: 2-ის ნატურალური ხარისხების ბოლო ციფრების (ერთეულ52თა თანრიგის ციფრების) მიმდევრობის თვისებები განვიხილოთ.

ამოვწეროთ ამ მიმდევრობის რამდენიმე საწყისი წევრი:

$$2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ \ldots$$

— პირველად მეორდება ორიანი, შემდეგ გამეორებას იწყებს შემდეგი ციფრები — 4, 8, 6 და ა. შ. რატომ ხდება ეს გამეორებები? იმიტომ, რომ 2-ის ნებისმიერი ხარისხის მხოლოდ ბოლო ციფრი განსაზღვრავს მომდევნო ხარისხის ბოლო ციფრს; მაშასადამე, ერთი ციფრის გამეორება იწვევს მეორე ციფრის გამეორებას და, მაშასადამე, ყოველი მომდევნო ციფრის გამეორებას. ასე ვღებულობთ **პერიოდს** — ამ მიმდევრობის ნაწილს ორ გამეორებას შორის. რადგან შევძელით და აღვწერეთ პერიოდულობის კანონზომიერება, ამიტომ შეგვიძლია განვსაზღვროთ 2^{1000}-ის ბოლო ციფრიც — 6. ამოცანის ამოსახსნელად „პერიოდული მიმდევრობის“ თვისებები შევისწავლეთ.

2) სხვადასხვა პერიოდული პროცესის აღწერა და შესწავლა მათემატიკის გამოყენებით ხდება, ძირითადად — **პერიოდული ფუნქციების** გამოყენებით. წინა ნაწილში განხილული მიმდევრობა პერიოდული ფუნქციის ერთი კერძო შემთხვევაა.

***f* ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, თუ არსებობს ნულისგან განსხვავებული ისეთი *l* რიცხვი, რომ ყოველი *x*-ისთვის *f*-ის განსაზღვრის არიდან, *x–l* და *x+l* რიცხვებიც ეკუთვნის განსაზღვრის არეს და გვაქვს ტოლობა**

$$f(x)=f(x+l). \qquad (1)$$

l რიცხვს f **ფუნქციის პერიოდი** ეწოდება.

• მაშასადამე, თუ f არის პერიოდული ფუნქცია l პერიოდით, მაშინ f-ის განსაზღვრის არე თავის ყოველ x-თან ერთად შეიცავს წერტილებს, რომლებიც მიიღება x-ისგან პარალელური გადატანით $\vec{a}(l;\ 0)$ ან $\vec{a}(-l;\ 0)$ ვექტორებით, ანუ — პარალელური გადატანებით OX ღერძის გასწვრივ $|l|$ მანძილით (მარჯვნივ და მარცხნივ) ფუნქციის განსაზღვრის არე თავის თავზე აისახება.

• შეამოწმეთ, რომ (1) ტოლობიდან, თუ მასში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $(x–l)$-ს, მივიღებთ

$$f(x-l)=f(x).$$

თუ f ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდი არის l რიცხვი, მაშინ ამ ფუნქციის პერიოდია nl რიცხვიც, სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია. მაშასადამე, f ფუნქციას უამრავი პერიოდი აქვს; მართლაც,

$$f(x+2l)=f(x+l+l)=f(x+l)=f(x),$$

$$f(x+3l)=f(x+2l+l)=f(x+2l)=f(x),$$

$$f(x-2l)=f(x-2l+2l)=f(x),$$

და ა.შ. თუ l_1 და l_2 პერიოდებია, მაშინ l_1+l_2 და l_1-l_2 რიცხვებიც პერიოდებია.

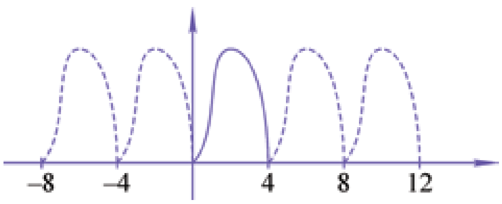
იმედია არ გაგიჭირდებათ იმის ჩვენება, რომ, **თუ *l* პერიოდის მქონე პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრის არეს ეკუთვნის რაიმე *x* რიცხვი, მაშინ *x+nl* ($n\in Z$) რიცხვებიც ეკუთვნის ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეს.**

შევნიშნოთ, რომ, თუ f ფუნქცია მუდმივია, ანუ მისი მნიშვნელობები ერთი და იმავე რიცხვის ტოლია, მაშინ ნულისგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვი ამ ფუნქციის პერიოდია.

თუ f ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი არის l, მაშინ მისი გრაფიკის ასაგებად საკმარისია, ჯერ შევარჩიოთ l სიგრძის რაიმე რიცხვითი შუალედი

(მაგალითად, შეიძლება $[0;\ l]$ ან $\left[-\frac{l}{2};\ \frac{l}{2}\right]$ შუალედების განხილვა) და ავაგოთ გრაფიკი ამ შუალედის $D(f)$ სიმრავლესთან თანაკვეთაზე ($D(f)$ — ფუნქციის განსაზღვრის არეა).

გრაფიკის სხვა ნაწილები მიიღება ამ ნაწილის პარალელური გადატანით $\vec{a}(l;\ 0)$, $\vec{a}(-l;\ 0)$, $\vec{a}(2l;\ 0)$ და ა. შ., ანუ $\vec{a}(nl;\ 0)$ სახის ვექტორებით, სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია.



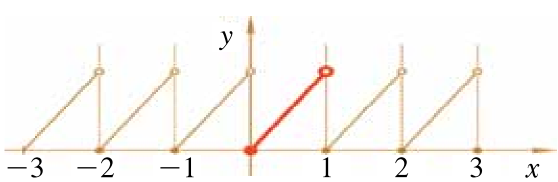
სურათზე მოცემულია ერთ-ერთი პერიოდული ფუნქციის (მისი პერიოდია 4) გრაფიკი. საწყის შუალედად შერჩეულია [0, 4], შემდეგ კი გრაფიკის ეს ნაწილი „მეორდება“ პარალელური გადატანებით.

გავიხსენოთ რიცხვის მთელი და წილადი ნაწილები. **x რიცხვის მთელი ნაწილი ეწოდება მთელ რიცხვს, რომელიც მეტია $(x-1)$-ზე და არ აღემატება x-ს** (ანუ უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x-ს). x რიცხვის მთელი ნაწილი $[x]$-ით აღვნიშნეთ. მაგალითად, $[9{,}8]=9$; $[-4{,}5]=-5$, **x რიცხვის წილადი ნაწილი ეწოდება x რიცხვისა და მისი მთელი ნაწილის სხვაობას;** მას ასე აღვნიშნავთ: $\{x\}$. ამრიგად, $\{x\}=x-[x]$.

მაგალითად, $\{4{,}5\}=0{,}5$, $\{-4{,}8\}=0{,}2$, $\{9\}=0$. მართლაც $\{4{,}5\}=4{,}5-4=0{,}5$; $\{-4{,}8\}=-4{,}8-(-5)=0{,}2$; $\{9\}=9-9=0$.

$y=\{x\}$ ფუნქცია პერიოდული ფუნქციის მაგალითია. ნებისმიერი მთელი რიცხვი ამ ფუნქციის პერიოდია. უმცირესი დადებითი პერიოდი 1-ის ტოლია.

გრაფიკის წარმოსადგენად შევნიშნოთ, რომ, როცა $0 \le x < 1$, მაშინ $\{x\}=x$; როცა $x=1$, $\{x\}=0$.



სურათზე გამოყოფილია ამ ფუნქციის გრაფიკის ნაწილი — [0, 1) შუალედზე აგებული. (ეს ნაწილი $y=x$ წრფეზე მდებარეობს). ამ ნაწილის პარალელური გადატანებით $\vec{a}(n;\ 0)$ სახის ვექტორებით $(n \in Z)$ მიიღება $y=\{x\}$ ფუნქციის გრაფიკი.

- დაასახელეთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობები $x=k$ $(k \in Z)$ წერტილებში.
- რა წრფეზე მდებარეობს ფუნქციის გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც აგებულია $[-1; 0)$ შუალედზე, $[1; 2)$ შუალედზე?
- ღებულობს თუ არა ფუნქცია უარყოფით მნიშვნელობებს?
- აქვს თუ არა ფუნქციას უდიდესი მნიშვნელობა, უმცირესი მნიშვნელობა (თუ აქვს დაასახელეთ)?
- აღწერეთ ის „ნახტომი“, რაც ახასიათებს ფუნქციის გრაფიკს, x-ის მთელ წერტილებზე „გავლისას“.

შევაჯამოთ: *წარმოდგენილია პერიოდული ფუნქციის ცნება, პერიოდული ფუნქციის მაგალითი — $y=\{x\}$; $\{x\}$ არის x რიცხვის წილადი ნაწილი. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა* $\boldsymbol{R}$ *სიმრავლეზე — ყოველ x ნამდვილ რიცხვს შევუსაბამებთ მის წილად ნაწილს; ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის $[0;\ 1)$ შუალედი. ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი 1-ის ტოლია.*

პერიოდი – (არამათემატიკური მნიშვნელობით) დროის გარკვეულ მონაკვეთსაც აღნიშნავს ხოლმე, მეტწილად მაშინ, როცა ეს მონაკვეთი ერთი რაიმე ნიშნითაა გამორჩეული. მაგალითად, ვიტყვით ხოლმე: „ომის პერიოდში“ (ომის დროს), ან „სწავლის პერიოდში“.

პერიოდული – ის რაც გარკვეული პერიოდის (შესაძლოა, დროის მონაკვეთის) შემდეგ ჩნდება ან მეორდება. მაგალითად, პერიოდული წვიმები, პერიოდული გამოცემები, ელემენტთა პერიოდული სისტემა.

ს

ყოველდღიურ ცხოვრებაში თუ რაიმე ხშირად მეორდება, მას პერიოდულს უწოდებენ ხოლმე — გამეორება კი შეიძლება მიახლოებითი იყოს. მაგალითად, მზის აქტივობის პერიოდულობა. ცხადია, მზეზე მოვლენები ზუსტი პერიოდულობით რომ გამოირჩეოდეს, მათი წინასწარმეტყველება ადვილი იქნებოდა. ასევეა პერიოდული გამოცემებიც. მაგალითად, გაზეთი ხომ ხშირად ყოველდღიურად არ გამოდის, მით უმეტეს, ტექსტებიც სხვადასხვაა. პერიოდულობის ზუსტი მაგალითები მხოლოდ მათემატიკაში გვაქვს.

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 [7,5]=

1) 7 2) 8 3) 7,5 4) 7,6.

2 {7,4}=

1) 0,6 2) 0,4 3) 7 4) 8.

3 [–7,5]=

1) –8 2) –7 3) –9 4) 0,5.

4 {–8,3}=

1) 0,3 2) –0,3 3) 0,7 4) –0,7.

5 მოცემულია თანაფარდობები:

ა) $x-1<[x]\leq x$; ბ) $[x]>x$; გ) $0\leq\{x\}<1$; დ) $\{x\}=1$.

მათგან ჭეშმარიტია

1) ბ 2) მხოლოდ გ) 3) დ) 4) ა) და გ).

6 თუ $[x]=5$, მაშინ

1) $5\le x<6$ 2) $x<5$ 3) $x>6$ 4) $x=4$.

7 თუ $[x]=-3$, მაშინ

1) $x<-3$ 2) $x=-4$ 3) $-3\le x<-2$ 4) $-4\le x<-3$.

8 საწყობიდან მაღაზიაში x ტ ტვირთია გადასატანი 5 ტ ტევადობის ავტომანქანებით. საკმარისი ავტომანქანების ოდენობა არ შეიძლება იყოს

1) $\left[\frac{x}{5}\right]$ 2) $\frac{x}{5}$

3) $\left[\frac{x}{5}\right]+1$ 4) $\left[\frac{x}{5}\right]-1$.

9 ნებისმიერი x რიცხვისთვის $[x]+\{x\}=$

1) $2x$ 2) x 3) $3x$ 4) $-x$.

ამოხსენით ამოცანები

10 იპოვეთ $[x]$, თუ

ა) $x=0{,}25$; ბ) $x=-0{,}31$; გ) $x=3\frac{1}{9}$; დ) $x=5$;

ე) $x=-4\frac{8}{9}$; ვ) $x=-7$; ზ) $x=-12{,}4$.

11 იპოვეთ $\{x\}$, თუ

ა) $x=0{,}39$; ბ) $x=-0{,}43$; გ) $x=-4\frac{1}{7}$; დ) $x=5\frac{4}{9}$;

ე) $x=7$; ვ) $x=1{,}41$; ზ) $x=-2{,}97$.

12 მიუთითეთ x-ის რამდენიმე მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\{x\}=\frac{1}{2}$.

13 ვთქვათ, f პერიოდული ფუნქციაა, მისი პერიოდია l; x_0 არ ეკუთვნის ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეს. დაასაბუთეთ, რომ ფუნქციის განსაზღვრის არეს არ ეკუთვნის x_0+nl, $n\in Z$ სახის არც ერთი რიცხვი.

14 დაასაბუთეთ:

ა) პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრის არე შეიცავს უამრავ რიცხვს (დადებითსაც და უარყოფითსაც);

ბ) პერიოდული ფუნქცია ყოველ თავის მნიშვნელობას ღებულობს არგუმენტის უამრავი მნიშვნელობისთვის;

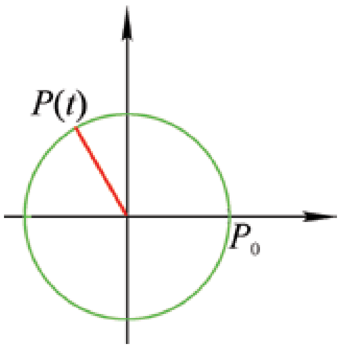
გ) თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $\mathbf{R}$ სიმრავლეზე და პერიოდულია l პერიოდით, მაშინ $g(x)=f(ax)$ ფუნქციის პერიოდია $\frac{l}{a}$ $(a\neq o)$;

დ) თუ l_1 და l_2 არის $y=f(x)$ ფუნქციის პერიოდები, მაშინ ნებისმიერი მთელი k-სა და n-ისთვის, kl_1+kl_2 ამ ფუნქციის პერიოდია.

15 გაიხსენეთ ფუნქციები, რომლებიც გასულ წლებში შეისწავლეთ (მაგალითად, წრფივი ფუნქცია, კვადრატული ფუნქცია, $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ ფუნქცია). არის თუ არა რომელიმე მათგანი პერიოდული ფუნქცია? პასუხი დაასაბუთეთ.

16 გაიხსენეთ ფუნქციის თვისებები, რომლებიც გასულ წელს შეისწავლეთ (ზრდადობა, კლებადობა, ფუნქციის ნულების არსებობა). რა თვისებები შეიძლება ჰქონდეს (ან არ ჰქონდეს) პერიოდულ ფუნქციას? პასუხი დაასაბუთეთ (მაგალითად, თუ f პერიოდულია, შეიძლება თუ არა, რომ $f(x)=a$ განტოლებას ჰქონდეს ნულების სასრული ოდენობა?).

17 გავიხსენოთ, რომ ყოველ t ნამდვილ რიცხვს R_0^t მობრუნებით შევუსაბამეთ $P_0(1;\ 0)$ წერტილის t რადიანის ტოლი კუთხით მობრუნებით მიღებული P_t წერტილი. P_t წერტილს კი მისი x_t კოორდინატი შევუსაბამოთ — მივიღეთ ფუნქცია (მოცემული ასახვების კომპოზიცია), რომელიც ყოველ t ნამდვილ რიცხვს x_t-ს შეუსაბამებს. იმსჯელეთ ამ ფუნქციის პერიოდულობის შესახებ. განიხილეთ, ანალოგიურად, ფუნქცია $t\to y_t$ (y_t არის P_t წერტილის ორდინატი) და იმსჯელეთ მისი თვისებების შესახებ.



18 განიხილეთ $y=[x]$ ფუნქციის თვისებები და ააგეთ მისი გრაფიკი.

19 x-ის რა მნიშვნელობებისთვისაა ჭეშმარიტი თანაფარდობა:

ა) $\left\{x+\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{2}$; ბ) $\left\{3x-2\frac{1}{4}\right\}=\frac{2}{3}$; გ) $\left\{2x+\frac{2}{5}\right\}=\frac{1}{3}$?

მითითება. ბ) $\left\{3x-2\frac{1}{4}\right\}=\left\{3x-\frac{1}{4}\right\}$, $3x-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}+k$ (k მთელი რიცხვია),

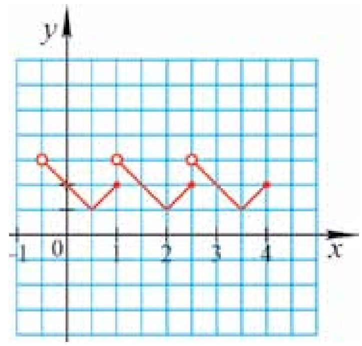
$3x=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+k,\ \ x=\frac{11}{36}+\frac{k}{3},\ \ k\in Z.$

20* შეეცადეთ გრაფიკების აგების საშუალებით იპოვოთ $2\{x\}=1-\frac{x}{2}$ განტოლების ფესვების ოდენობა.

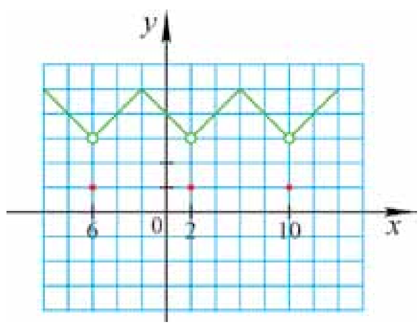
21 სურათზე პერიოდული ფუნქციების გრაფიკების ფრაგმენტებია მოცემული. გამოთქვით თითოეულ შემთხვევაში ფუნქციის შესაძლო პერიოდის შესახებ თქვენი ვარაუდი.

ა)

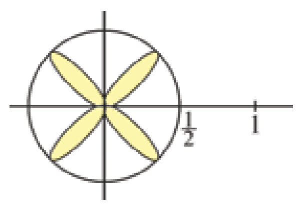
ბ)



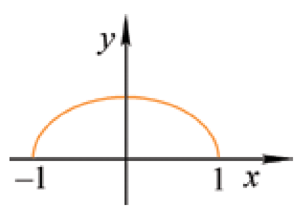
გ)



22 ააგეთ ორნამენტი სურათზე წარმოდგენილი მოხატულობის ორჯერ მარჯვნივ გადატანით — თითო-თითო ერთეულით და, ანალოგიურად, მარცხნივ გადატანებით თითო ერთეულით.



23 ააგეთ იმ პერიოდული ფუნქციის გრაფიკი, რომლის პერიოდია 2, ხოლო გრაფიკის ნაწილია სურათზე წარმოდგენილი წირი.



24 ფუნქციის პერიოდი არის 5-იც და 8-ც. არის თუ არა ამ ფუნქციის პერიოდი 1?

25 ფუნქციის პერიოდი არის 24-იც და 36-იც. არის თუ არა ამ ფუნქციის პერიოდი 12?

ჩვენი ლექსიკონი

ორნამენტი – (ლათინური – ორნამენტუმ) მხატვრული, გრაფიკული, ან სკულპტური სამკაული, რომელიც, მეტწილად, შედგება გეომეტრიული ფიგურების, ან მცენარეების, ცხოველების, ... გამოსახულებებისგან; ორნამენტს ჩუქურთმასაც უწოდებენ.

პროექტი

1. აირჩიეთ რაიმე თემა და იმსჯელეთ ხელოვნებაში, მეცნიერების რაიმე დარგში (მაგალითად, მეტეოროლოგიაში, ბიოლოგიაში ან ასტრონომიაში) პერიოდულობისა და მისი მნიშვნელობის შესახებ.

2. გამოიყენეთ ქიმიის სახელმძღვანელო და იმსჯელეთ ქიმიურ ელემენტთა პერიოდული სისტემის შესახებ — ნივთიერებათა თვისებების პერიოდული გამეორებების, პერიოდის, პერიოდში მეტალური თვისებების ცვლილებების კანონზომიერებების შესახებ.

3. იმსჯელეთ მათემატიკაში პერიოდული ფუნქციების შესახებ. კერძოდ, ვთქვათ, $f(x)$ არის A სიმრავლეზე განსაზღვრული პერიოდული ფუნქცია, $g(x)$ კი რაიმე B სიმრავლეზეა განსაზღვრული. პირველის პერიოდია l_1, მეორისა — l_2. იქნება თუ არა ყოველი ასეთი ორი ფუნქციისთვის $f(x)+g(x)$ ფუნქცია პერიოდული? იქნებ არც კი იყოს ასეთი ფუნქცია განსაზღვრული? იქნება მოიფიქროთ რამდენიმე ნიმუში ისეთი ორი ფუნქციისა, რომლებისთვისაც $f(x)+g(x)$ პერიოდული ფუნქციაა. იმსჯელეთ ასეთი სახის ფუნქციის პერიოდის შესახებ — რა კავშირშია ის l_1 და l_2 პერიოდებთან?

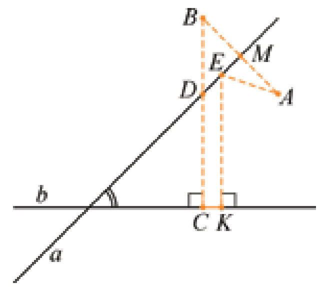
1.6 ვაგრძელებთ გეომეტრიული გარდაქმნების თვისებების შესწავლას

ამ პარაგრაფში გავიმეორებთ საკითხებს გეომეტრიული გარდაქმნების შესახებ, გავიღრმავებთ ცოდნას ამ მიმართულებით.

1) ღერძული და ცენტრული სიმეტრიების შესახებ

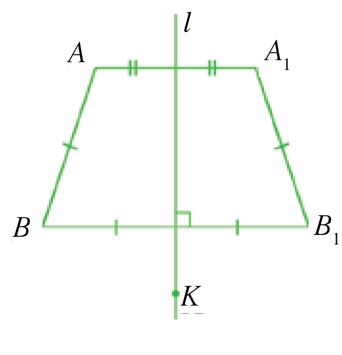
საუბარი კვლავ პრაქტიკული ამოცანების განხილვით დავიწყოთ.

ვთქვათ, გზატკეცილი და სარწყავი არხი 45^0-ზე ნაკლები კუთხით იკვეთება. ამ კუთხის შიგნით დასახლებული პუნქტია. საჭიროა ამ პუნქტიდან რაც შეიძლება ნაკლები სიგრძის გზა გავიყვანოთ, რომელიც ჯერ არხის ნაპირს უერთდება, შემდეგ — გზატკეცილს.

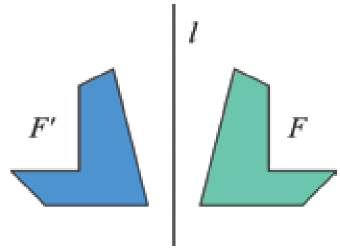


ამ ამოცანის მათემატიკური მოდელის შექმნას წინ უძღვის გარკვეული დაშვებები — პუნქტი A წერტილითაა წარმოდგენილი, არხი — a წრფით, გზატკეცილი — b წრფით.

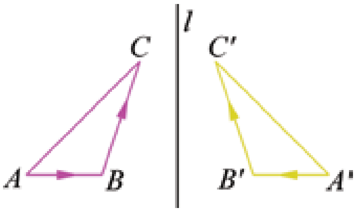
ახლა უკვე შეიძლება მათემატიკის გამოყენება. კერძოდ, ავაგებთ a წრფის მიმართ A წერტილის სიმეტრიულ B წერტილს (გავიხსენოთ: A წერტილზე გავავლებთ a-ს მართობულ წრფეს და მასზე, წრფეთა გადაკვეთის M წერტილიდან, გადავდებთ MA-ს ტოლ MB მონაკვეთს). ამრიგად, a წრფე AB მონაკვეთს შუა წერტილში კვეთს და მისი მართობულია. შემდეგ B წერტილიდან b წრფეზე (გზატკეცილზე) დავუშვებთ BC მართობს. D წერტილი — BC-ს a-სთან გადაკვეთის წერტილი — საძიებელი წერტილია: გზა უნდა გავიყვანოთ A-დან D-სკენ, შემდეგ — D-დან C-სკენ. a წრფის ნებისმიერი სხვა E წერტილიდან b წრფემდე და A წერტილამდე მანძილების ჯამი ტოლია AEK ტეხილის სიგრძის, რომელიც, თავის მხრივ, აღემატება $AD+DC=BC$ მანძილს ($AE+EK$ მანძილი BEK ტეხილის სიგრძის ტოლია, ის კი BC მართობის სიგრძეს აღემატება).



სურათები დაგეხმარებათ გაიხსენოთ სიბრტყეზე ღერძული სიმეტრიის თვისებები: ვთქვათ, S_l არის ღერძული სიმეტრია l ღერძის მიმართ. S_l არის სიბრტყის თავის თავზე ისეთი ასახვა, როცა სიბრტყის ყოველ A წერტილს შეესაბამება l ღერძის მიმართ სიმეტრიული $S_l(A)$ წერტილი (l ღერძის ყოველი K წერტილის სიმეტრიული წერტილი თვით K წერტილია). სურათზე წარმოდგენილია ღერძული სიმეტრიის თვისება — ღერძული სიმეტრია არის **მოძრაობა** — სიბრტყის თავის თავზე ასახვა, როცა წერტილებს შორის მანძილი არ იცვლება — $AB=A_1B_1$.



- ამ სურათზე წარმოდგენილია F და F' ფიგურები, რომელთაგან თითოეული მიიღება მეორისგან l წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრიით — მოძრაობის ერთი კერძო შემთხვევით. ასეთი **F და F' ფიგურები ტოლია.**



• სურათზე გამოსახული ABC სამკუთხედი სიმეტრიულია l წრფის მიმართ $A'B'C'$ სამკუთხედის, A კუთხე A' კუთხის სიმეტრიულია, B კუთხე — B' კუთხის, C კუთხე — C' კუთხის, AB მონაკვეთი — $A'B'$-ის, AC — $A'C'$-ის, BC — $B'C'$-ის, ამიტომ

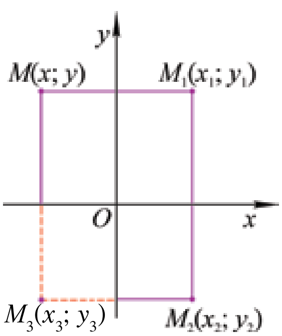
$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',$$
$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ BC=B'C'.$$

ამრიგად,

$$\Delta ABC=\Delta A'B'C'.$$

ღერძული სიმეტრიისას ზოგიერთი სიდიდე არ იცვლება. მაგალითად, კუთხის სიდიდე და მონაკვეთის სიგრძე. ისინი ღერძული სიმეტრიის **ინვარიანტული** (უცვლელი) სიდიდეებია.

რა შეიძლება შეიცვალოს ღერძული სიმეტრიისას? მაგალითად, ვთქვათ, ამავე ABC სამკუთხედის შემოვლის მიმართულება $A \to B \to C$ თანამიმდევრობით განისაზღვრა — ასეთი შემოვლა საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობისას ხდება. მაშინ ABC სამკუთხედის სიმეტრიული $A'B'C'$ სამკუთხედის შემოვლის მიმართულება A, B, C წვეროების სახეების მიხედვით: $A' \to B' \to C'$ გვაძლევს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით შემოვლას. განხილული მაგალითი არის კერძო შემთხვევა ასეთი ზოგადი დებულებისა: ღერძული სიმეტრიისას ორიენტაცია იცვლება.



სურათზე წარმოვადგენთ სიმეტრიას y ღერძის მიმართ და სიმეტრიას x ღერძის მიმართ; პირველი სიმეტრია კოორდინატებით ასე ჩაიწერება ($M_1(x_1;y_1)$ სიმეტრიულია $M(x;y)$ წერტილის y ღერძის მიმართ):

$$x_1=-x,\qquad y_1=y.$$

სიმეტრია x ღერძის მიმართ ასე ჩაიწერება ($M_2(x_2;\ y_2)$ სიმეტრიულია $M_1(x_1;\ y_1)$-ის x ღერძის მიმართ):

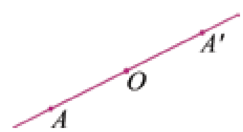
$$x_2=x_1,\qquad y_2=-y_1.$$

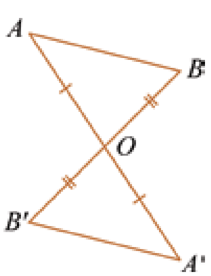
ამ ღერძულ სიმეტრიათა კომპოზიცია (თანამიმდევრობით ჩატარებული სიმეტრიები y და x ღერძების მიმართ) არის **ცენტრული სიმეტრია კოორდინატთა სათავის მიმართ.**

$M_3(x_3;\ y_3)$ წერტილი სიმეტრიულია $M(x;\ y)$ წერტილის სათავის მიმართ —

$$\begin{cases} x_3=-x \\ y_3=-y. \end{cases}$$

სიბრტყეზე ნებისმიერი O წერტილის მიმართ ცენტრული სიმეტრია არის ასახვა, რომელიც ამ სიბრტყის ყოველ A წერტილს შეუსაბამებს O წერტილის მიმართ მის სიმეტრიულ A' წერტილს — O წერტილი AA' მონაკვეთის შუა წერტილია.





სურათზე გამოსახულია ცენტრული სიმეტრიის ერთი მნიშვნელოვანი თვისება — თუ A' არის სიმეტრიული A წერტილის, B — B'-ის, მაშინ $A'B'=AB$ — **ცენტრული სიმეტრია მოძრაობაა.** ასეც ვამბობთ ხოლმე: ცენტრული სიმეტრიისას მანძილები არ იცვლება. O წერტილის მიმართ ცენტრული სიმეტრიისას O წერტილს იგივე O წერტილი შეესაბამება, O წერტილი ცენტრული სიმეტრიის უძრავი წერტილია.

- აქვს თუ არა ცენტრულ სიმეტრიას კიდევ ერთი უძრავი წერტილი?
- აქვს თუ არა ღერძულ სიმეტრიას 2 უძრავი წერტილი?
- რა ფიგურაა ღერძული სიმეტრიის უძრავი წერტილების სიმრავლე?
- გეომეტრიულ ფიგურათა თქვენთვის ცნობილი რა თვისებები (რა სიდიდეები) არ იცვლება (ინვარიანტულია) ამ გარდაქმნების დროს? გაიხსენეთ ისინი და, იმედია, არ გაგიჭირდებათ ამ კითხვებზე პასუხების გაცემა. ამასთანავე, შევნიშნოთ, რომ ღერძული სიმეტრია სიბრტყის მოძრაობის ერთადერთი კერძო სახეა, რომელსაც ორი სხვადასხვა უძრავი წერტილი აქვს. სიბრტყის მოძრაობა, რომელსაც აქვს სამი უძრავი წერტილი და ეს წერტილები ერთ წრფეს არ ეკუთვნის, იგივური ასახვაა.

შევაჯამოთ: წარმოდგენილია მოძრაობის ორი კერძო შემთხვევა — ცენტრული და ღერძული სიმეტრიები სიბრტყეზე.

ორიენტაცია (ფრანგული orientation-იდან დამკვიდრდა, რაც თავდაპირველად აღმოსავლეთზე მიმართულს ნიშნავდა, ლათინურად oriens – აღმოსავლეთი) –
1. სივრცეში ადგილმდებარეობის გარკვევა.
2. გარემომცველ პირობებში, რაიმე საკითხებში გარკვევა, გათვითცნობიერება.
3. საზოგადოებრივი, პოლიტიკური, საგანმანათლებლო და სხვა სახის მოღვაწეობის გაშლა გარკვეული მიმართულებით. მაგალითად, სკოლაში სწავლება მოსწავლეზე უნდა იყოს ორიენტირებული.

ინვარიანტი, ინვარიანტული სიდიდე (ფრანგული – invariant) – სიდიდე, რომელიც უცვლელი რჩება ამა თუ იმ გარდაქმნის მიმართ.

1. დაასაბუთეთ სხვადასხვა ხერხით ცენტრული და ღერძული სიმეტრიის თვისებები.
2. მიუთითეთ ამ გეომეტრიულ გარდაქმნათა ინვარიანტები — გეომეტრიულ ფიგურათა თვისებები, რომლებიც არ იცვლება.

1. როგორ ასახვას ეწოდება წერტილის (წრფის) მიმართ სიმეტრია?
2. როგორ ასახვას ეწოდება მოძრაობა?
3. რა შემთხვევაში ეწოდება რაიმე ფიგურას მოცემული წერტილის (წრფის) მიმართ სიმეტრიული ფიგურა?

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 რომბს აქვს
1) სიმეტრიის 2 ღერძი
2) სიმეტრიის 3 ღერძი
3) სიმეტრიის 4 ღერძი
4) სიმეტრიის 5 ღერძი.

2 კვადრატს აქვს
1) სიმეტრიის მხოლოდ 2 ღერძი
2) სიმეტრიის მხოლოდ 3 ღერძი
3) სიმეტრიის 4 ღერძი
4) სიმეტრიის 5 ღერძი.

3 წრეწირს აქვს
1) სიმეტრიის მხოლოდ 2 ღერძი
2) სიმეტრიის მხოლოდ 3 ღერძი
3) სიმეტრიის მხოლოდ 4 ღერძი
4) სიმეტრიის უამრავი ღერძი.

4 მართკუთხედს აქვს
1) სიმეტრიის მხოლოდ 2 ღერძი
2) სიმეტრიის მხოლოდ 1 ღერძი
3) სიმეტრიის 4 ღერძი
4) სიმეტრიის 5 ღერძი.

5 ვთქვათ, $M(x;\ y)$ წერტილი არის $M(2;\ -3)$ წერტილის სიმეტრიული x ღერძის მიმართ, მაშინ
1) $x=-2,\ y=-3$
2) $x=-2,\ y=3$
3) $x=2,\ y=3$
4) $x=2,\ y=-3$.

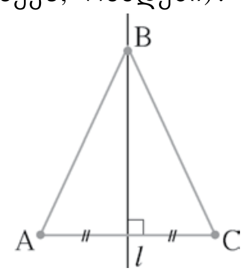
6 ვთქვათ, $M(x;\ y)$ წერტილი არის $M(-3;\ 5)$ წერტილის სიმეტრიული კოორდინატთა სათავის მიმართ, მაშინ
1) $x=-3,\ y=5$
2) $x=-3,\ y=-5$
3) $x=3,\ y=5$
4) $x=3,\ y=-5$.

7 ტოლგვერდა სამკუთხედს აქვს
1) სიმეტრიის მხოლოდ ერთი ღერძი
2) სიმეტრიის მხოლოდ ორი ღერძი
3) სიმეტრიის სამი ღერძი
4) სიმეტრიის ოთხი ღერძი.

ამოხსენით ამოცანები

8 აქვს თუ არა სიმეტრიის ღერძი:
ა) წრფეს (თუ აქვს, რამდენი)?
ბ) მონაკვეთს (თუ აქვს, რამდენი)?

9 l წრფე არის მოცემული შეკრული ტეხილის სიმეტრიის ღერძი. რომელი გვერდების წაშლის შემდეგ მიღებული ფიგურის სიმეტრიის ღერძი იქნება კვლავ l წრფე?

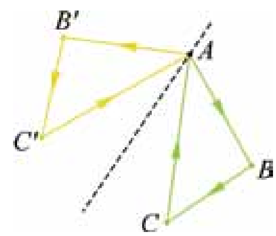


10 B' წერტილი არის $B(-5;\ 7)$ წერტილის სიმეტრიული I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებზე გამავალი წრფის მიმართ; იპოვეთ B' წერტილის კოორდინატები.

11 დაასაბუთეთ, რომ, თუ $B'(x',\ y')$ წერტილი სიმეტრიულია $B(x;\ y)$ წერტილის I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებზე გამავალი წრფის მიმართ, მაშინ $x'=y;\ y'=x$.

12 მოცემული წერტილებიდან
$(-1;\ 5)$, $(3;\ -2)$, $(0;\ 0)$, $(5;\ 1)$, $(1;\ -5)$, $(7;\ 0)$, $(-3;\ 2)$, $(1;\ 5)$, $(3;\ -2)$, $(0;\ 7)$, $(5;\ -1)$, $(-2.\ 3)$; $(4;\ 0)$, $(0;\ 4)$, $(2;\ 1)$, $(1;-10)$, $(3;\ 2)$ შეარჩიეთ:
ა) წერტილები, რომლებიც სიმეტრიულია OX ღერძის მიმართ;
ბ) წერტილები, რომლებიც სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ;
გ) წერტილები, რომლებიც სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ;
დ) წერტილები, რომლებიც სიმეტრიულია I და III მეოთხედების საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებზე გამავალი წრფის მიმართ.

13 მოცემულია ორი ტოლი სამკუთხედი — ΔABC და $\Delta AB'C'$.



$\angle BAC$ და $\angle B'AC'$, $\angle B$ და $\angle B'$, $\angle C$ და $\angle C'$ ტოლი კუთხეებია. სამკუთხედები სხვადასხვა ორიენტაციისაა, ABC-ს შემოვლა ($A \rightarrow B \rightarrow C$ მიმართულებით) $AB'C'$-ის შემოვლის მიმართულების საწინააღმდეგოდ ხდება.
დაასაბუთეთ, რომ არსებობს ღერძული სიმეტრია ABC სამკუთხედისა $A'B'C'$-ზე.

მითითება. განიხილეთ სიმეტრია BAB' კუთხის ბისექტრისის შემცველი წრფის მიმართ. ამ სიმეტრიის დროს B აისახება B'-ზე, C აისახება C'-ზე. მართლაც, თუ C აისახა C'-სგან განსხვავებულ C''-ზე, მაშინ გვექნება: $A'B'C'$ და $AB'C''$ ტოლი სამკუთხედებია, სხვადასხვაა და ერთნაირადაა ორიენტირებული, რაც შეუძლებელია.

14 წრფე მოცემულია განტოლებით: $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$. დაწერეთ იმ წრის განტოლება, რომელიც:
ა) სიმეტრიულია ამ წრფის OX ღერძის მიმართ;
ბ) სიმეტრიულია ამ წრფის OY ღერძის მიმართ;
გ) სიმეტრიულია ამ წრფის I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებზე გამავალი წრფის მიმართ;
დ) კოორდინატთა სათავის მიმართ.

მითითება. გამოვიყენოთ OX ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიის ფორმულები:
$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x' \\ y=-y'. \end{cases}$$

$ax+by+c=0$-დან გვაქვს $ax'-by'+c=0$.

ამრიგად, ღერძული სიმეტრიით OX ღერძის მიმართ $ax+by+c=0$ განტოლებით მოცემული წრფე აისახება $ax-by+c=0$ განტოლებით მოცემულ წრფეზე.

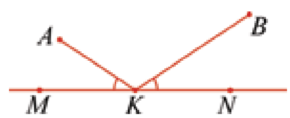
15 იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია $y=2x+3$ წრფის:
ა) OX ღერძის მიმართ;
ბ) OY ღერძის მიმართ;
გ) I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისების შემცველი წრფის მიმართ;
დ) კოორდინატთა სათავის მიმართ.

16 $y=2x+b$ და $y=kx-7$ წრფეები სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ. იპოვეთ b და k.

17 არის თუ არა მოცემული ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიული OY ღერძის მიმართ:
ა) $y=|x|$; ბ) $y=x$; გ) $y=x^2$; დ) $y=x^2+1$;
ე) $y=(x-1)^2$; ვ) $y=x^2+2$; ზ) $y=x^2+x$; თ) $y=|x-2|$?

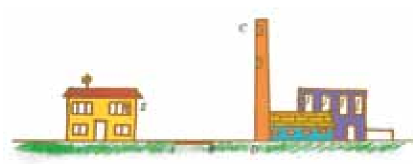
18 რა ღერძული სიმეტრიით შეიძლება მივიღოთ $y=x$, $y=2x+3$, $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ ფუნქციების გრაფიკებიდან, შესაბამისად, $y=|x|$, $y=|2x+3|$, $y=|ax^2+bx+c|$ ფუნქციების გრაფიკები?

19 ცნობილია, რომ A წერტილიდან წამოსული სინათლის სხივი აირეკლება MN ზედაპირიდან და გადის B წერტილში. MN-ის რა წერტილში ხვდება A-დან წამოსული სხივი?



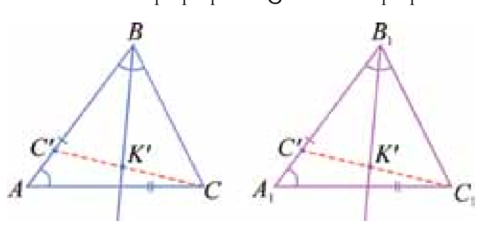
მითითება. გამოიყენეთ თვისება: $\angle AKM=\angle BKM$ (K სინათლის სხივის დაცემის წერტილია).

20 S წერტილიდან მოჩანს AB აუზში არეკლილი ქარხნის CD მილის ნაწილი. როგორ გავიგოთ — მილის რა ნაწილი აირეკლება აუზში?



მითითება. ააგეთ CD-ს სიმეტრიული AB წრფის მიმართ და გაავლეთ SA და SB სხივები.

21* დაასაბუთეთ, რომ $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, თუ $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $AB-BC=A_1B_1-B_1C_1$.



მითითება. შემოგთავაზებთ ამოცანის ამოხსნის გზას, რომელიც სიმეტრიის გამოყენებას ეყრდნობა. ვიგულისხმებთ, რომ $AB>BC$. გაავლეთ B და B_1 კუთხეების ბისექტრისები და განიხილეთ სიმეტრიები ამ ბისექტრისების შემცველი წრფეების მიმართ, ამ სიმეტრიების დროს გვაქვს:

$$C \to C',\ C_1 \to C_1',\ BC'=B_1C_1'.$$

მაშინ $AC'=A_1C_1'$, $\angle A=\angle A_1$, $AC=A_1C_1$ და $\Delta AC'C=\Delta A_1C_1'C_1$. ამიტომ არსებობს მოძრაობა, რომლითაც $AC'C$ სამკუთხედი აისახება $A_1C_1'C_1$-სამკუთხედზე (CC' წრფე აისახება C_1C_1' წრფეზე, K წერტილი — K' წერტილზე, CC'-ის შუამართობი — C_1C_1'-ის შუამართობზე.

მაშასადამე, B აისახება B_1-ზე. ამრიგად, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$. ანალოგიურად ამოიხსნება ეს ამოცანა, როცა $AB<BC$.

ცალკე განიხილეთ უმარტივესი შემთხვევა: $AB=BC$.

ახლა შეეცადეთ ეს ამოცანა სიმეტრიის გამოყენების გარეშეც ამოხსნათ.

22 ვთქვათ, B და B' წერტილები AC წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს, ამასთანავე, $\angle BAC=\angle B'AC$ და $AB-BC=AB'-B'C$. დაასაბუთეთ, რომ B და B' წერტილები სიმეტრიულია AC წრფის მიმართ.

23* ვთქვათ, Z_0 არის ცენტრული სიმეტრია O წერტილის მიმართ და $Z_o(A)=A'$. l_1 წრფე გადის O წერტილზე და $A_1=S_{l_1}(A)$ (A_1 არის A წერტილის სიმეტრიული l_1 წრფის მიმართ). l_2 არის A' და A_1-ის წერტილების სიმეტრიის ღერძი.

დაასაბუთეთ, რომ $A'A_1 \parallel l_1$; $l_1 \perp l_2$ და $O \in l_2$.

24 აღწერეთ, როგორ შეიძლება წარმოვადგინოთ ცენტრული სიმეტრია ორი ღერძული სიმეტრიის კომპოზიციით.

25 არსებობს თუ არა

ა) წრფე, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება;

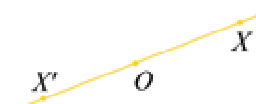
ბ) სხივი, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება;

გ) წერტილი, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება?

26 ვთქვათ, X და X' წერტილები $O(a,\ b)$ ცენტრის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია.

ა) დაასაბუთეთ, რომ $\overrightarrow{OX}=-\overrightarrow{OX'}$; (1)

ბ) დაწერეთ კოორდინატებით (1) ვექტორული ტოლობა და გამოსახეთ X' წერტილის კოორდინატები X წერტილის კოორდინატებით.



2) პარალელური გადატანა

გავიხსენოთ, რომ სიბრტყის წერტილთა ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, რომელსაც პარალელური გადატანა ვუწოდეთ, ასე წარმოვადგინეთ: პარალელური გადატანა არის ასახვა, რომლითაც სიბრტყის ყველა წერტილი ერთსა და იმავე მანძილზე, ერთი და იმავე მიმართულებით გადაადგილდება. ყოველი T პარალელური გადატანა სავსებით განისაზღვრება (ანუ სიბრტყის ყოველი წერტილის სახე განისაზღვრება) შესაბამის წერტილთა ერთი რაიმე $(A;\ T(A))$ დალაგებული წყვილის მოცემით, ანუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის მოცემით, $B=T(A)$. მაშინ სიბრტყის ყოველი X წერტილის სახე არის ის X' წერტილი, რომლისთვისაც გვაქვს:

$$\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

ამ შემთხვევაში ასეც ვამბობთ: T არის პარალელური გადატანა $\overrightarrow{AB}$ ვექტორით. თუ $\overrightarrow{AB}=(a;\ b)$, მაშინ (1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$x'-x=a$$
$$y'-y=b,$$

ანუ,

$$\begin{aligned} x'&=x+a\\ y'&=y+b. \end{aligned} \qquad (2)$$

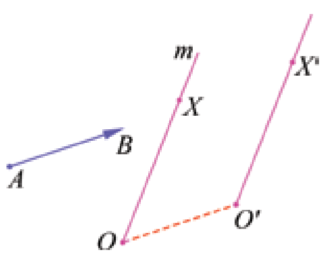
(2) ფორმულებით მოიცემა $T(X)=X'$-ის კოორდინატები X-ის კოორდინატებით — ასეც ვიტყვით ხოლმე: პარალელური გადატანა კოორდინატებითაა მოცემული.

პარალელური გადატანის კერძო შემთხვევაა იგივური ასახვა — როცა $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, მაშინ

$$x'=x$$
$$y'=y$$

და, მაშასადამე, ყოველ $X(x;\ y)$ წერტილს ამავე X წერტილს ვუთანადებთ. წარმოვადგინოთ პარალელური გადატანის რამდენიმე თვისება:

ა) თუ T არის პარალელური გადატანა არანულოვანი $\overrightarrow{AB}$ ვექტორით, მაშინ ყოველი სხივი ამ პარალელური გადატანით თანამიმართულ სხივზე აისახება.



სურათზე ერთ-ერთი შემთხვევაა წარმოდგენილი; თუ $O'=T(O)$, მაშინ, m სხივის ყოველი X წერტილისთვის მეორე სხივზე არსებობს X' წერტილი (X-ის სახე) ისეთი, რომ გვაქვს: $X'=T(X)$.

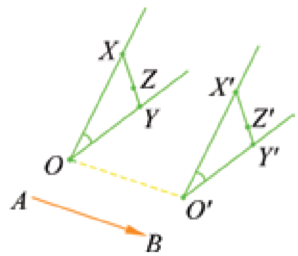
- განიხილეთ სხვა შემთხვევები (რა შემთხვევაშია ეს სხივები ერთ წრფეზე; რა შემთხვევაშია მათი თანაკვეთა სხივი, ცარიელი სიმრავლე?)
- რა გეომეტრიულ ფიგურაზე აისახება რაიმე წრფე პარალელური გადატანისას?
- რა შემთხვევაშია მოცემული წრფე **ინვარიანტული** პარალელური გადატანის მიმართ?

ბ) პარალელური გადატანის დროს ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება — პარალელური გადატანა მოძრაობაა. მონაკვეთის სიგრძე ინვარიანტულია პარალელური გადატანის მიმართ.

- შეეცადეთ დაასაბუთოთ ეს დებულება (2) ფორმულების გამოყენებით.
- შეეცადეთ დაასაბუთოთ ეს დებულება ვექტორების გამოყენებით.

გ) პარალელური გადატანისას კუთხე აისახება კუთხეზე; კუთხის სიდიდე ინვარიანტულია პარალელური გადატანის მიმართ.

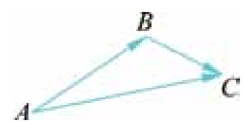
- გამოიყენეთ სურათზე წარმოდგენილი მოცემულობა და მის მიხედვით დაასაბუთეთ, რომ, თუ $T(O)=O'$, მაშინ XOY კუთხე აისახება $X'O'Y'$ კუთხეზე. ამასთანავე, კუთხის სიდიდე არ იცვლება.



დ) პარალელურ გადატანათა კომპოზიცია პარალელური გადატანაა.

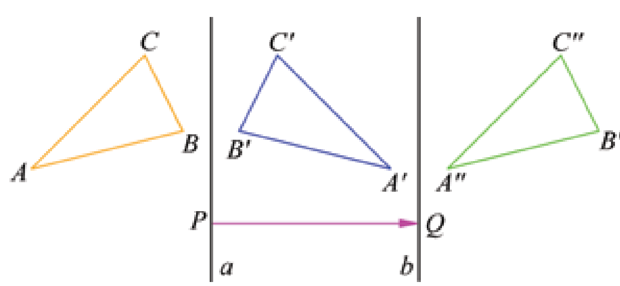
$\overrightarrow{AB}$ ვექტორით პარალელური გადატანისა და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორით პარალელური გადატანის კომპოზიცია $\overrightarrow{AC}$ ვექტორით პარალელური გადატანაა.

სურათზე ერთ-ერთი შემთხვევაა გამოსახული.



$\overrightarrow{AB}$ ვექტორით პარალელური გადატანის შებრუნებული ასახვა არის $\overrightarrow{BA}$ ვექტორით პარალელური გადატანა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ ასახვათა კომპოზიცია იგივური ასახვაა — სიბრტყის ყოველი წერტილი თავის თავზე აისახება.

ახლა გავიხსენოთ, რომ **ორი პარალელური ღერძის მიმართ სიმეტრიათა კომპოზიცია პარალელური გადატანაა.**



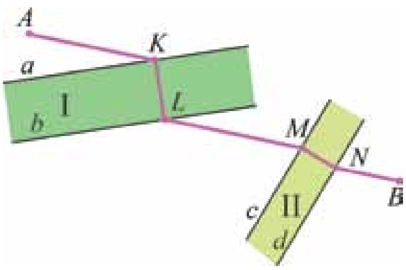
სურათზე $A'B'C'$ სამკუთხედი მიიღება ABC-სგან a წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრიით (შეიცვალა სამკუთხედზე შემოვლის მიმართულება — ორიენტაცია), $A''B''C''$ სამკუთხედი მიიღება $A'B'C'$ სამკუთხედისგან b წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრიით (კიდევ ერთხელ შეიცვალა ორიენტაცია). საბოლოოდ $A''B''C''$ მიიღება ABC-სგან $2\overrightarrow{PQ}$ $(PQ\perp a)$ ვექტორით პარალელური გადატანისას (ეს ფაქტი ჩვენ უკვე გვქონდა განხილული). შეიძლება ვთქვათ: ღერძული სიმეტრიისას იცვლება ორიენტაცია, პარალელური გადატანისას ორიენტაცია არ იცვლება.

შევაჯამოთ: განვიხილეთ კიდევ ერთი გეომეტრიული გარდაქმნა — პარალელური გადატანა, წარმოვადგინეთ მისი თვისებები, ინვარიანტები.

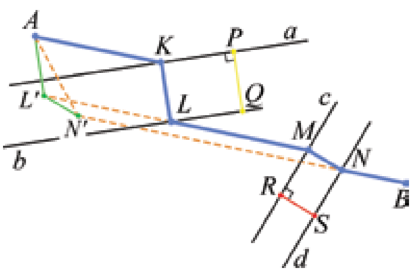
ს

განვიხილოთ პრაქტიკული ამოცანა:

ორ დასახლებულ პუნქტს შორის ორი მდინარე გადის. ამ მდინარეებზე ხიდები მდინარეთა ნაპირების მართობულად უნდა აიგოს ისე, რომ მათი გავლით A-დან B-ში უმოკლესი გზით მოვხვდეთ.



ამ პრაქტიკული ამოცანის მათემატიკური მოდელის შექმნა (მათემატიკურად ჩამოყალიბება) შემდეგი დაშვებებით იწყება: პირველი მდინარის ნაპირებს a და b პარალელური წრფეებით წარმოვადგენთ, მეორე მდინარისას — c და d პარალელური წრფეებით, დასახლებულ პუნქტებს — A და B წერტილებით.



სურათზე $PQ \perp a$, $RS \perp c$. ხიდების ასაშენებლად K და M წერტილები ისე უნდა შეირჩეს, რომ $KL \parallel PQ$, $MN \parallel RS$ და $AKLMNB$ ტეხილის სიგრძე უმცირესი იყოს ამ სახის ტეხილების სიგრძეებს შორის. A წერტილიდან B წერტილში მოსახვედრად გზის ნებისმიერად დაგეგმვისას აუცილებლად მოგვიწევს PQ-ს ტოლი და მისი პარალელური მონაკვეთის გავლა, აგრეთვე, RS-ის ტოლი და მისი პარალელური მონაკვეთის გავლა — ასეთია ხიდების აგების მოცემული წესი. ასე რომ, ამოცანის ამოხსნის გამარტივების მიზნით ხელსაყრელია თავიდანვე განვახორციელოთ ორი პარალელური გადატანა; ჯერ T_1, $\overrightarrow{PQ}$ ვექტორით და შემდეგ T_2, $\overrightarrow{RS}$ ვექტორით. ვთქვათ, $T_1(A)=L'$ და $T_2(L')=N'$. ამრიგად, შესარჩევია უმოკლესი გზა N'-დან B-ში. ცხადია, ვირჩევთ წრფის მონაკვეთს ($N'B$-ს) — მისი სიგრძე არ აღემატება ამ წერტილების შემაერთებელი ნებისმიერი ტეხილის სიგრძეს. ამ მონაკვეთისა და d წრფის გადაკვეთის წერტილზე ვაგებთ MN ხიდს, $MN \parallel L'N'$ და $MN=L'N'$. შემდეგ, M-დან „გაგვყავს“ გზის მონაკვეთი $N'B$-ს პარალელურად. მისი და b-ს გადაკვეთის L წერტილიდან ავაგებთ ხიდს — KL-ს, ($KL \parallel PQ$) და K წერტილს ვუკავშირებთ A წერტილს. ცხადია, $AK \parallel N'B$. ამრიგად, მიღებული $AKLMNB$ ტეხილის სიგრძე უმცირესია A-სა და B-ს მოცემული წესით დამაკავშირებელი ყველა სხვა ტეხილის სიგრძეებს შორის.

?

1. რა თვისებები აქვს პარალელურ გადატანას?
2. პარალელური გადატანის მიმართ რა ინვარიანტულ სიდიდეებს იცნობთ?
3. რა ასახვას წარმოადგენს ორი პარალელური გადატანის კომპოზიცია?
4. რა შემთხვევაშია ორი პარალელური გადატანის კომპოზიცია იგივური ასახვა?
5. რა ასახვაა ორი პარალელური წრფის მიმართ ღერძულ სიმეტრიათა კომპოზიცია?

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 თუ პარალელური გადატანა $\vec{p}\,(a;\ b)$ ვექტორითაა მოცემული და ამ ასახვისას $M(x;\ y)$ წერტილს ეთანადება $M'(x';\ y')$ წერტილი, მაშინ აუცილებლად
1) $\begin{cases} x=x'+a \\ y=y'+b \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x'=x \\ y'=y+b \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y. \end{cases}$

2 თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორით პარალელური გადატანისას სიბრტყის ნებისმიერი $M(x;\ y)$ წერტილი აისახება $M'(x';\ y')$ წერტილზე, მაშინ $\overrightarrow{BA}$ ვექტორით $M'(x';\ y')$ აისახება
1) $M(y;\ x)$ წერტილზე 2) $M(-x;\ -y)$ წერტილზე
3) $M(x;\ -y)$ წერტილზე 4) $M(x;\ y)$ წერტილზე.

3 $\vec{p}\,(3;\ 0)$ ვექტორით პარალელური გადატანისას $A(2;\ 5)$ წერტილი აისახება
1) $A'(5;\ 5)$ წერტილზე 2) $A'(-1;\ 5)$ წერტილზე
3) $A'(2;\ 2)$ წერტილზე 4) $A'(2;\ 5)$ წერტილზე.

4 ცნობილია, რომ T პარალელური გადატანით $O(0;\ 0)$ წერტილი აისახება $M(-2;\ 3)$ წერტილზე. მაშინ ამ პარალელური გადატანით $A(-3;\ 2)$ წერტილი აისახება
1) $A'(-1;\ 2)$ წერტილზე 2) $A'(1;\ -2)$ წერტილზე
3) $A'(-5;\ 5)$ წერტილზე 4) $A'(-1;\ -1)$ წერტილზე.

5 დაწერეთ იმ T პარალელური გადატანის ფორმულები, რომლითაც $A(-3;\ -5)$ აისახება $B(-3;\ -7)$ წერტილზე.
1) $x'=x-3$, $y'=y-7$ 2) $x'=x-3$, $y'=y-5$ 3) $x'=x$, $y'=y-2$ 4) $x'=x$, $y'=y+2$.

6 A და B წერტილებს შორის მანძილი 5 ერთეულია. T პარალელური გადატანაა, $A'=T(A)$, $B'=T(B)$. იპოვეთ $A'B'$.
1) 10 2) 2,5 3) 15 4) 5.

ამოხსენით ამოცანები

7 T პარალელური გადატანაა $\overrightarrow{AB}$ ვექტორით, $|\overrightarrow{AB}|=a$.
- წარმოადგინეთ ეს პარალელური გადატანა ორი რაიმე ღერძული სიმეტრიის კომპოზიციის საშუალებით. რამდენნაირად შეიძლება ამ წარმოდგენის განხორციელება?
- იპოვეთ მანძილი სიმეტრიის ღერძებს შორის.

8 ცნობილია, რომ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი მიიღება ABC სამკუთხედისგან T პარალელური გადატანით $T(A)=A_1$, $T(B)=B_1$, $T(C)=C_1$. ჩამოწერეთ თანაფარდობები ამ სამკუთხედების ძირითად ელემენტებს შორის.

9 ა) რა შემთხვევაში აისახება ერთი მონაკვეთი მეორე მონაკვეთზე პარალელური გადატანისას?

ბ) მოცემულია ორი თანამიმართული სხივი. შეიძლება თუ არა ერთ-ერთი მათგანი პარალელური გადატანით აისახოს მეორეზე?

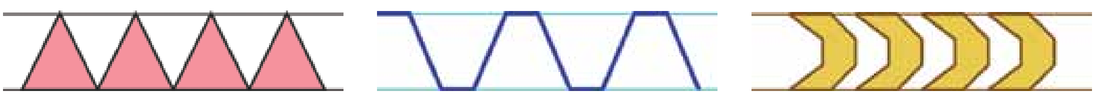
გ) მოცემულია ორი პარალელური წრფე. შეიძლება თუ არა რაიმე პარალელური გადატანით ერთ-ერთი მათგანი აისახოს მეორეზე?

დ) მოცემულია ორი გადამკვეთი წრფე. შეიძლება თუ არა რაიმე პარალელური გადატანით ერთ-ერთი მათგანი აისახოს მეორეზე?

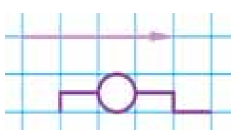
ე) რა შემთხვევაში შეიძლება რაიმე პარალელური გადატანით ერთი კუთხე აისახოს მეორეზე?

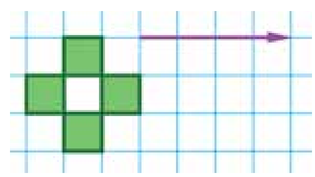
ვ) რა შემთხვევაში შეიძლება აისახოს რაიმე პარალელური გადატანით ერთ-ერთი წრეწირი მეორე წრეწირზე?

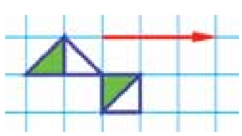
10 სურათზე სამი ბორდიურის ნაწილებია გამოსახული. თითოეულ შემთხვევაში გამოყავით ბორდიურის რაიმე ნაწილი, რომლის ერთი და იმავე სახის პარალელური გადატანებით მიიღება ეს ბორდიური.

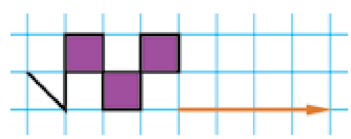


11 გამოსახეთ ორნამენტი, რომელიც მიიღება სურათზე წარმოდგენილი ფრაგმენტის მითითებული პარალელური გადატანით რამდენჯერმე გადატანისას.

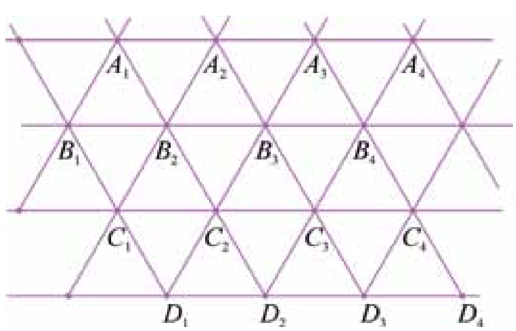
ა) 

ბ) 

გ) 

დ) 

12 წესიერი სამკუთხედებით სიბრტყის დაფარვისას ამ სამკუთხედებს საერთო შიგა წერტილები არა აქვს და სიბრტყის ყოველი წერტილი ერთ სამკუთხედს მაინც ეკუთვნის.



სურათზე ერთ-ერთი ასეთი დაფარვაა გამოსახული.

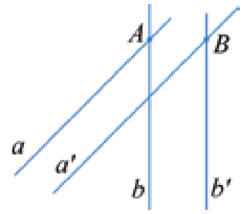
განვიხილოთ პარალელური გადატანები სამკუთხედების გვერდების სიგრძის ტოლი მანძილითა და ამ გვერდების მიმართულებით.

• რა მონაკვეთებზე აისახება C_2C_3 მონაკვეთი ამ გადატანებით?

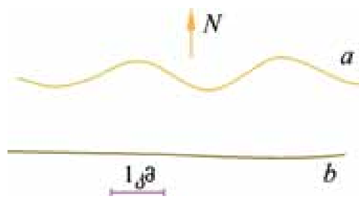
• რა მონაკვეთზე აისახება B_1B_2 მონაკვეთი რაიმე ერთი მიმართულებით ზემოთ აღნიშნული ორი პარალელური გადატანის კომპოზიციით?

• არსებობს თუ არა პარალელური გადატანა, რომლითაც $B_1B_2C_1$ აისახება $A_1A_2B_2$-ზე?

13 ცნობილია, რომ $a \parallel a'$, $b \parallel b'$. რა ვექტორით განისაზღვრება პარალელური გადატანა, რომლითაც a აისახება a'-ზე და b — b'-ზე (რა წერტილზე აისახება a და b წრფეების გადაკვეთის A წერტილი)?

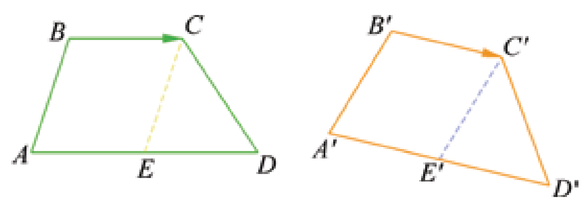


14 სურათზე a წირით გამოსახულია საავტომობილო გზა, b გამოსახავს რკინიგზის მონაკვეთს. როგორ გავიგოთ პარალელური გადატანის გამოყენებით საავტომობილო გზის რა ნაწილია 2 კმ-ზე უფრო შორს — „ჩრდილოეთის“ მიმართულებით — სარკინიგზო მონაკვეთიდან?



15* დაასაბუთეთ, რომ, თუ ერთი ტრაპეციის გვერდები, შესაბამისად, ტოლია მეორე ტრაპეციის გვერდების, მაშინ არსებობს მოძრაობა, რომლითაც მეორე ტრაპეცია მიიღება პირველისგან, ანუ ტრაპეციები ტოლია.

მითითება. ვთქვათ, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$, $CD=C'D'$. განვიხილოთ პარალელური გადატანები: T_1 ($\overrightarrow{BC}$ ვექტორით) და T_2 ($\overrightarrow{B'C'}$ ვექტორით). $T_1(AB)=CE$, $T_2(A'B')=C'E'$. მაშინ, ცხადია, $\Delta ECD=\Delta E'C'D$. მაშასადამე, არსებობს მოძრაობა, რომლის დროს $\Delta ECD \to \Delta E'C'D'$. ამ მოძრაობის შედეგად გვაქვს: $DA \to D'A'$; $A \to A'$; $BA=B'A'$ და $B \to B'$.

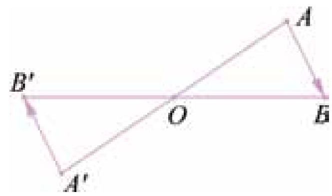


16 ვთქვათ, f ასახვით რაიმე A წერტილი აისახება A' წერტილში, ხოლო ნებისმიერი (A-სგან განსხვავებული) B წერტილი — ისეთ B' წერტილში, რომ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$.

დაასაბუთეთ, რომ ეს ასახვა ცენტრული სიმეტრიაა.

17 ვთქვათ, Z_0 არის ცენტრული სიმეტრია O წერტილის მიმართ. $Z_0(A)=A'$; $Z_0(B)=B'$.

- დაასაბუთეთ: $\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$.



- ვთქვათ, Z_{0_1} არის ცენტრული სიმეტრია O_1 წერტილის მიმართ; $Z_{0_1}(A')=A''$; $Z_{0_1}(B')=B''$. დაასაბუთეთ, რომ ამ ცენტრულ სიმეტრიათა კომპოზიცია არის პარალელური გადატანა: $Z_{0_1}\circ Z_0$ პარალელური გადატანაა — $A\to A''$, $B\to B''$ და $\overrightarrow{A''B''}=\overrightarrow{AB}$.
- რა ასახვაა სამი ცენტრული სიმეტრიის კომპოზიცია?

18 ა) იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელზეც აისახება $y=2x-1,5$ წრფე პარალელური გადატანით, რომელიც $\overrightarrow{OM}(3;\ -4)$ ვექტორით განისაზღვრება;

ბ) იპოვეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც მიიღება $y=x^2$ პარაბოლისგან პარალელური გადატანით: $x'=x-3$; $y'=y+1$;

გ) იპოვეთ ის პარალელური გადატანა (წარმოადგინეთ კოორდინატებით), რომლითაც $y=x^2$ აისახება $y=x^2-2x-3$ პარაბოლაზე?

დ) მოცემულია ფუნქციები: $y=x^2+1$; $y=x$; $y=(x+5)^2$; $y=(x-3)^2$; $y=x^2$; $y=|x|$; $y=-1$; $y=|x+1|$. შეარჩიეთ ამ ფუნქციებიდან იმ ფუნქციათა წყვილები, რომელთა გრაფიკებიდან ერთ-ერთი მიიღება მეორისგან OX ან OY ღერძის პარალელურად რაიმე პარალელური გადატანით.

(შეარჩიეთ ამოცანის ამოხსნის ხერხი)

იპოვეთ:

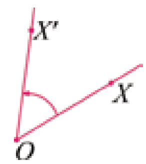
ა) $y=2x+5$ წრფის სახე $\vec{a}=(3;1)$ ვექტორით პარალელური გადატანისას;

ბ) $y=3x+2$ წრფის სახე $\vec{a}=(2;1)$ ვექტორით პარალელური გადატანისას.

I ხერხი: გაითვალისწინეთ, რომ პარალელური გადატანისას წრფის სახე არის წრფე; იპოვეთ რაიმე ორი წერტილი, რომელზეც მოცემული წრფის სახე გადის; არის თუ არა საკმარისი მხოლოდ ერთი წერტილის პოვნა?

II ხერხი: გამოიყენეთ საკოორდინატო ფორმულები.

3) მობრუნება



გავიხსენოთ, რომ R_0^α — მობრუნება α კუთხით O წერტილის გარშემო განვსაზღვრეთ, როგორც სიბრტყის თავის თავზე ისეთი ასახვა, როცა სიბრტყის ყოველ X წერტილს შეესაბამება ამ X-ის O წერტილის გარშემო α კუთხით მობრუნებისას მიღებული X' წერტილი — OX' სხივი მიიღება OX სხივისგან α კუთხით მობრუნებით; $OX'=OX$; $\overrightarrow{OX'}$ ვექტორი მიიღება $\overrightarrow{OX}$ ვექტორისგან α კუთხით მობრუნებით — $|\overrightarrow{OX'}|=|\overrightarrow{OX}|$.

გავიხსენოთ, რომ მობრუნების α კუთხის სიდიდე დადებითიც შეიძლება იყოს და უარყოფითიც და გრადუსების ნებისმიერი რიცხვით შეიძლება გამოისახოს; მობრუნება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით დადებითი მიმართულებაა — მობრუნების კუთხე (გრადუსებში) დადებითი რიცხვით გამოისახება; ამასთანავე, ნებისმიერი მთელი n-ისთვის $R_0^{\alpha+360^0\cdot n}$ და R_0^α ერთსა და იმავე ასახვას წარმოადგენს.

ამრიგად, ნებისმიერი n მთელი რიცხვისთვის,

$$R_0^{\alpha+360^0\cdot n}=R_0^\alpha$$

360^0-ით მობრუნება ერთი სრული ბრუნია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით; -360^0-ით მობრუნება ერთი სრული ბრუნია საათის ისრის მიმართულებით.

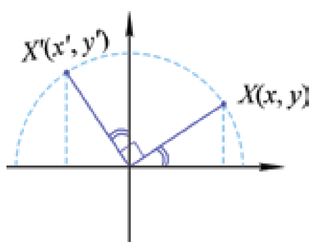
მობრუნების კუთხეს რადიანებითაც ვზომავდით — 1 რადიანი$=\dfrac{180^0}{\pi}\approx 57^0$; π რადიანი$=180^0$.

მაშასადამე, ნებისმიერი მთელი n-სთვის,

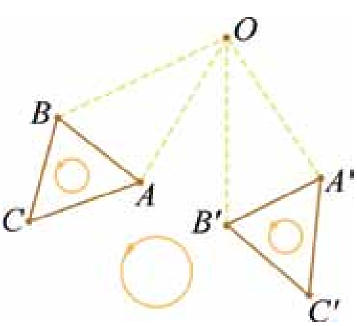
$$R^{\alpha+2\pi\cdot n}=R^\alpha$$

მაგალითად, ნებისმიერი მთელი n-სთვის კოორდინატთა სათავის გარშემო $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ კუთხით მობრუნება, ან (ამავე შედეგის მომცემი) $\dfrac{\pi}{2}$ კუთხით ($n\in Z$) მობრუნება, შეიძლება კოორდინატებით წარმოვადგინოთ:

$$\begin{cases} x'=-y \\ y'=x. \end{cases}$$



სურათზე წარმოდგენილია ერთ-ერთ შემთხვევაში ამ ფორმულების ილუსტრაცია.



$A'B'C'$ სამკუთხედი მიიღება ABC სამკუთხედისგან O წერტილის გარშემო α კუთხით მობრუნებისას (ABC მიიღება $A'B'C'$-ისგან $-\alpha$ კუთხით მობრუნებისას. სამკუთხედების შიგნით გამოსახულია პატარა წრეწირები და მითითებულია კუთხეების ათვლის დადებითი მიმართულება). მობრუნებისას არ იცვლება ორიენტაცია — შემოვლის მიმართულება სამკუთხედის გარშემო; **მობრუნების მიმართ, ისევე, როგორც პარალელური გადატანის მიმართ, ორიენტაცია ინვარიანტულია.**

მობრუნება მოძრაობაა — მობრუნებისას არ იცვლება წერტილებს შორის მანძილები. მონაკვეთის სიგრძე მობრუნების მიმართ ინვარიანტული სიდიდეა.

• შეამოწმეთ ამ დებულების ჭეშმარიტობა, მაგალითად, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n\in Z)$ კუთხით მობრუნების შემთხვევაში (კოორდინატების ფორმულების გამოყენებით).

• შეამოწმეთ, რომ მობრუნება O წერტილის გარშემო $\alpha=\pi$ კუთხით (მაშასადამე, $\alpha=\pi+2\pi n$, $n\in\mathrm{Z}$, კუთხითაც) ცენტრული სიმეტრიაა O ცენტრით.

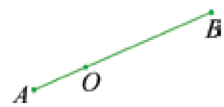
• შეამოწმეთ; რომ საერთო ცენტრის მიმართ მობრუნებათა კომპოზიცია მობრუნებაა ამავე ცენტრის მიმართ:

$$R_0^{\alpha}\circ R_0^{\beta}=R_0^{\alpha+\beta};$$

• რა შემთხვევაშია ორი მობრუნების კომპოზიცია იგივური ასახვა?

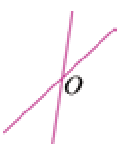
• რა წერტილი აისახება თავის თავზე O წერტილის გარშემო ნებისმიერი კუთხით მობრუნებისას?

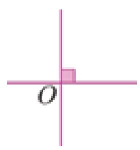
• რა მობრუნებით შეიძლება აისახოს მოცემული წრფე თავის თავზე?



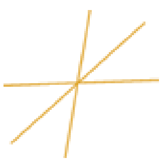
• რა მობრუნებით (O-ს გარშემო) შეიძლება აისახოს მოცემული მონაკვეთი თავის თავზე?

• შეიძლება თუ არა მონაკვეთი აისახოს თავის თავზე რაიმე წერტილის გარშემო π კუთხით მობრუნებით?





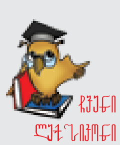
• რა მობრუნებით შეიძლება აისახოს გადამკვეთი წრფეების წყვილი თავის თავზე? დაიხმარეთ სურათზე გამოსახული შემთხვევები.



• რა მობრუნებებით შეიძლება აისახოს თავის თავზე სურათზე გამოსახული გადამკვეთი წრფეების სამეული?

შევაჯამოთ: *განვიხილეთ მოძრაობის კიდევ ერთი სახეობა — მობრუნება წერტილის გარშემო რაიმე α კუთხით.*

1. იცვლება თუ არა ორიენტაცია α კუთხით მობრუნებისას?
2. მონაკვეთისა და კუთხის რა თვისებები არ იცვლება მოცემული წერტილის გარშემო რაიმე α კუთხით მობრუნებისას?
3. რა ფორმულებით ჩაიწერება $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნება კოორდინატთა სათავის მიმართ?
4. რა შემთხვევაშია ორი მობრუნების კომპოზიცია იგივური ასახვა?
5. რა ვექტორზე აისახება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი რაიმე O წერტილის გარშემო 540^0-ით მობრუნებისას?



რადიანი (ტერმინი ლათინური რადიუს-დან წარმოიშვა, რაც სხივს ნიშნავს) – ცენტრული კუთხე, რომლის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია, 1 რადიანი$=\frac{180^0}{\pi}$.
რადიანი სხივს მაგვარსაც ნიშნავს.

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 $\frac{\pi}{3}=$

1) 30^0 2) 60^0 3) 45^0 4) 90^0.

2 $270^0=$

1) $\frac{3\pi}{2}$ 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $-\frac{3\pi}{2}$ 4) π.

3 $R_0^{\frac{13\pi}{6}}$ — მობრუნებაა O წერტილის გარშემო $\frac{13\pi}{6}$ კუთხით. $R_0^{\frac{13\pi}{6}}=$

1) $R_0^{\frac{3\pi}{6}}$ 2) $R_0^{\frac{\pi}{6}}$ 3) $R_0^{\frac{\pi}{2}}$ 4) $R_0^{\frac{\pi}{3}}$.

4 $R_0^{-\pi}=$

1) R_0^{π} 2) $R_0^{2\pi}$ 3) $R_0^{\frac{\pi}{2}}$ 4) $R_0^{\frac{3\pi}{2}}$.

5 თუ $n\in Z$, მაშინ ნებისმიერი α-სთვის $R_0^{\alpha+2\pi n}=$

1) $R_0^{2\pi\alpha}$ 2) $R_0^{2\alpha}$ 3) $R_0^{\pi\alpha}$ 4) R_0^{α}.

6 $R_0^{\frac{\pi}{3}}\circ R_0^{\frac{\pi}{6}}=$

1) $R_0^{\frac{\pi}{3}}$ 2) $R_0^{\frac{\pi}{6}}$ 3) R_0^{π} 4) $R_0^{\frac{\pi}{2}}$.

7 იმ ცენტრული კუთხის ზომა, რომლის რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია, არის

1) π რადიანი 2) 1 რადიანი 3) $\frac{\pi}{2}$ რადიანი 4) $\frac{\pi}{3}$ რადიანი.

8 n^0-იანი კუთხის რადიანული ზომაა

1) $\frac{\pi n}{180}$ რად 2) πn რად 3) $\frac{\pi}{360}$ რად 4) $\frac{\pi}{270}$ რად.

9 1 რადიანის ზომის კუთხე

1) მახვილია 2) ბლაგვია
3) მართი კუთხის ნახევარზე ნაკლებია 4) არ არის მახვილი კუთხე.

10 ვთქვათ, A' არის A-ს სახე O წერტილის გარშემო α კუთხით მობრუნებისას, B' არის B-ს სახე ამავე მობრუნებისას. მაშინ

1) $A'B'=2AB$ 2) $A'B'=AB$ 3) $A'B'=\frac{1}{2}AB$ 4) $A'B'\neq AB$.

ამოხსენით ამოცანები

11 ა) დაასაბუთეთ, რომ $B(-3;\ 2)$ წერტილი შეიძლება მივიღოთ $A(2;\ 3)$ წერტილისგან კოორდინატთა სათავის გარშემო $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნებისას;

ბ) იპოვეთ $-\frac{\pi}{2}$-ის ტოლი კუთხით კოორდინატთა სათავის გარშემო მობრუნების ფორმულები;

გ) მოცემულია წერტილები $(-3;\ 1)$; $(-2;\ 5)$; $(7;\ 1)$; $(1;\ 3)$; $(-1;\ 7)$; $(-2;\ 0)$. შეარჩიეთ იმ წერტილთა წყვილები, რომელთაგან პირველი მიიღება მეორისგან $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლი კუთხით მობრუნებით (კოორდინატთა სათავის მიმართ);

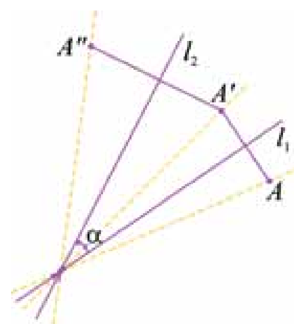
დ) მოცემულია წერტილები: $(0;\ -1)$, $(3;\ 1)$; $(2;\ 0)$; $(-7;\ -3)$; $(-5;\ -2)$; $(-1;\ 0)$, $(1;\ -3)$; $(-3;\ 7)$. შეარჩიეთ იმ წერტილთა წყვილები, რომელთაგან პირველი მიიღება მეორისგან კოორდინატთა სათავის გარშემო $-\frac{\pi}{2}$-ის ტოლი კუთხით მობრუნებით.

12 დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მიიღება $y=2x-1$ წრფისგან კოორდინატთა სათავის გარშემო

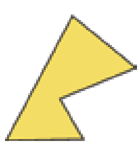
ა) $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლი კუთხით; ბ) $-\frac{\pi}{2}$-ის ტოლი კუთხით მობრუნებისას.

13 ვთქვათ, l_1 და l_2 წრფეები იკვეთება O წერტილში. l_2 მიიღება l_1-ისგან α კუთხით მობრუნებისას.

დააკვირდით სურათს. მასზე A წერტილის A''-ზე ასახვის მიხედვით წარმოდგენილია l_1 და l_2 წრფეების მიმართ ღერძული სიმეტრიების კომპოზიცია. აჩვენეთ, რომ ეს კომპოზიცია არის მობრუნება. იპოვეთ მობრუნების კუთხე.



პროექტი



ქაღალდისგან გამოჭერით ორი ტოლი ფიგურა (მაგალითად, სურათზე გამოსახული ფორმის). მაგიდაზე განალაგეთ ეს ფიგურები ისე, რომ შესაძლებელი იყოს ერთ-ერთი მათგანის „ასახვა“ მეორეზე:

ა) პარალელური გადატანით;

ბ) ცენტრული სიმეტრიით;

გ) α კუთხით მობრუნებით, $\alpha \neq 180^0$.

4) მსგავსების გარდაქმნა

უკვე განვიხილეთ სიბრტყის გეომეტრიული გარდაქმნები — ღერძული სიმეტრია, ცენტრული სიმეტრია, პარალელური გადატანა, მობრუნება წერტილის გარშემო.

ყველა ეს გარდაქმნა სიბრტყის წერტილთა სიმრავლის თავის თავზე ისეთი ასახვის კერძო შემთხვევებია, როცა ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება. თითოეული ამ გარდაქმნის დროს, თუ M წერტილს შეესაბამება M' წერტილი, N-ს — N' წერტილი, მაშინ

$$M'N'=MN. \qquad (1)$$

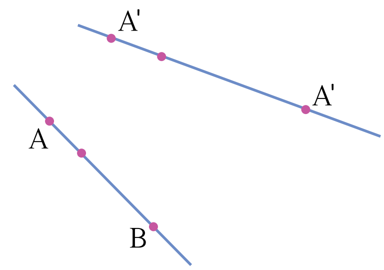
სიბრტყის ასეთ გარდაქმნას **გადაადგილება (მოძრაობა)** ეწოდება. ზემოთ ჩამოთვლილი გეომეტრიული გარდაქმნები გადაადგილების კერძო შემთხვევებია.

გადაადგილება კი კერძო შემთხვევაა სიბრტყის ისეთი გარდაქმნის, როცა ორ წერტილს შორის მანძილი ერთი და იმავე რიცხვჯერ იცვლება —

$$M'N'=k\cdot MN. \qquad (2)$$

ამ გარდაქმნას **მსგავსების გარდაქმნა** ეწოდება. როცა $k=1$, მაშინ (2) ტოლობიდან მივიღებთ (1) ტოლობას.

მსგავსების ასახვით ყოველი ფიგურა მის მსგავს ფიგურაში აისახება. კერძოდ, ყოველი სამკუთხედი მის მსგავს სამკუთხედზე აისახება.



ვიცით, რომ ყოველ ორ წერტილზე ერთადერთი წრფე გადის. ვთქვათ, მსგავსების ასახვით A წერტილი აისახა A' წერტილზე, B — B'-ზე.

- გამოიყენეთ (2) ტოლობა და აჩვენეთ, რომ A-სა და B-ს შორის მდებარე ყოველი წერტილი A'-სა და B'-ს შორის მდებარე წერტილზე აისახება.

მსგავსების გარდაქმნისას წრფე აისახება წრფეზე, კუთხე — მის ტოლ კუთხეზე.

მსგავსების გარდაქმნის კერძო შემთხვევაა **ჰომოთეტია** — ჰომოთეტია O ცენტრითა და k კოეფიციენტით ისეთი გარდაქმნაა, როცა ყოველ M წერტილს შეესაბამება — ისეთი M' წერტილი, რომ

$$\overrightarrow{OM'}=k\,\overrightarrow{OM}\,. \qquad (3)$$

თუ ჰომოთეტიით M აისახება M'-ზე, $N-N'$-ზე, მაშინ

$$\overrightarrow{M'N'}=k\,\overrightarrow{MN}\,.$$

- შეეცადეთ მიიღოთ ეს ტოლობა. ამისთვის გამოიყენეთ (3) და ვექტორული ტოლობა $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{O'N'}-\overrightarrow{O'M'}$.

შევაჯამოთ: *განვიხილეთ მსგავსების გარდაქმნა და მისი კერძო შემთხვევა — ჰომოთეტია. ჩამოყალიბებულია მათი ზოგიერთი თვისება.*

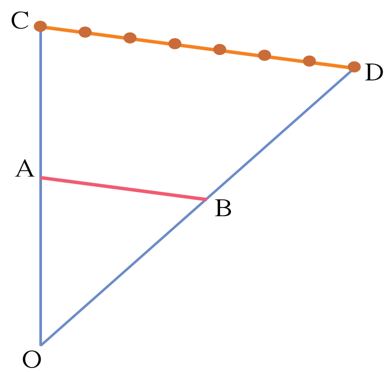
ა

ამოხსენით ამოცანა

1 შეარჩიეთ სიტყვები გამოტოვებულ ადგილებში ჩასასმელად ისე, რომ ჭეშმარიტი წინადადებები მიიღოთ
ა) ჰომოთეტიისას ყოველი წრფე აისახება მის ..... წრფეზე;
ბ) მსგავსების ასახვის დროს ყოველი კუთხე აისახება მის ..... კუთხეზე;
გ) მსგავსების ასახვისას ყოველი სამკუთხედი აისახება მის ..... სამკუთხედზე;
დ) მსგავსების ასახვისას, რომლის კოეფიციენტი არის k, $k>1$, ყოველი მონაკვეთი აისახება მონაკვეთზე, რომლის სიგრძე k-ჯერ ..... მოცემულ მონაკვეთზე;
ე) მსგავსების ასახვისას, რომლის კოეფიციენტია k, $0<k<1$, ყოველი მონაკვეთი აისახება მონაკვეთზე, რომლის სიგრძე $\frac{1}{k}$-ჯერ ..... მოცემულ მონაკვეთზე.
ვ) მსგავსების ასახვის კერძო შემთხვევაა, მაგალითად, ...

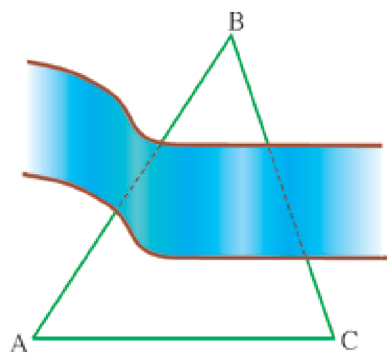
2 დაუკვირდით სურათს. ვთქვათ, $CD\parallel AB$; CD მონაკვეთი დაყოფილია შვიდ ტოლ ნაწილად.

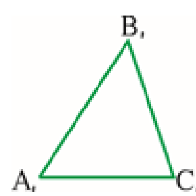
• **აღწერეთ:** როგორ შეიძლება AB მონაკვეთი ჰომოთეტიის გამოყენებით გავყოთ 3:4 შეფარდებით?



3 მოცემულია ორი არატოლი პარალელური მონაკვეთი. რა ჰომოთეტიებით შეიძლება ერთი აისახოს მეორეზე?

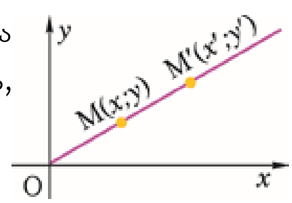
4 ვთქვათ, გვაქვს კუთხის მზომი ხელსაწყო, ვიმყოფებით მდინარის ერთ-ერთ მხარეს C წერტილში და გვსურს მდინარეზე გადასვლის გარეშე ვიპოვოთ მანძილი ორ ობიექტს შორის, რომლებიც მდინარის სხვადასხვა მხარესაა (A და B). კუთხის მზომი ხელსაწყოებით შესაძლებელია $\angle A$ და $\angle C$-ს გაზომვა. აღწერეთ მსგავსების გამოყენებით AB-ს სიგრძის პოვნის პროცესი.





5 ვთქვათ, მოცემულია ჰომოთეტია, რომლის კოეფიციენტია k, ცენტრია O. დაამტკიცეთ, რომ, თუ O კოორდინატთა სათავეა, მაშინ ჰომოთეტია მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \qquad (1)$$



ანუ, თუ $M(x;\,y)$ აისახება $M'(x',\,y')$-ზე, მაშინ გვაქვს (1) ფორმულები.

მითითება. გამოიყენეთ ჰომოთეტიის განსაზღვრება:

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$$

6 მოცემულია ABC სამკუთხედი. O არის AB-ს შუა წერტილი. ააგეთ ამ სამკუთხედის ჰომოთეტიური სამკუთხედი ცენტრით O წერტილში და k კოეფიციენტით, როცა: ა) $k=2$, ბ) $k=-2$, გ) $k=0,5$, დ) $k=-0,5$.

7 შემდეგი წინადადებებიდან შეარჩიეთ ჭეშმარიტი წინადადება:
ა) ყოველი ორი ტოლი ფიგურა მსგავსია;
ბ) ყოველი ორი მსგავსი ფიგურა ტოლია;
გ) ყოველი ორი ჰომოთეტიური ფიგურა მსგავსია;
დ) ყოველი ორი მსგავსი ფიგურა ჰომოთეტიურია.

8 სწორია თუ არა, რომ:
ა) ყოველი ორი ტოლფერდა სამკუთხედი მსგავსია;
ბ) ყოველი ორი კვადრატი მსგავსია;
გ) ყოველი ორი წრეწირი მსგავსია;
დ) ყოველი ორი არატოლი და პარალელური მონაკვეთი ჰომოთეტიურია;
ე) ყოველი ორი წრეწირი ტოლია.

9 ცნობილია, რომ ერთი წრეწირი ჰომოთეტიურია მეორე წრეწირის. როგორ ვიპოვოთ ჰომოთეტიის ცენტრი?

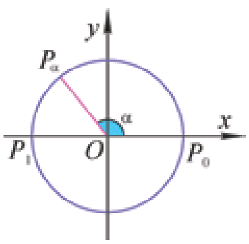
10 აჩვენეთ, რომ H_0^k ჰომოთეტიისა და გადაადგილების კომპოზიცია არის მსგავსების ასახვა k კოეფიციენტით.

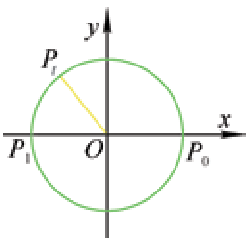
11 გაიხსენეთ სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები. დაამტკიცეთ ისინი ჰომოთეტიისა და გადაადგილების კომპოზიციის გამოყენებით.

მითითება. გაითვალისწინეთ, რომ, თუ სამკუთხედები ტოლია, მაშინ ერთ-ერთი მათგანი მიიღება მეორისგან რაიმე გადაადგილებით (მოძრაობით).

1.7 ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. სინუსისა და კოსინუსის პერიოდულობა.

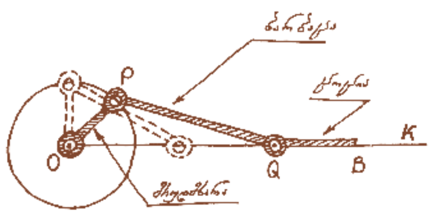
წინა პარაგრაფში კუთხე მობრუნებას დავუკავშირეთ.





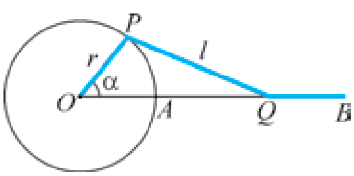
α კუთხით მობრუნებისას P_0 წერტილი მოძრაობს წრეწირზე და მისი საბოლოო მდებარეობა P_α წერტილია; ამასთანავე, მობრუნების α კუთხე შეიძლება იყოს დადებითი (მაშინ P_0 მოძრაობს წრეწირზე საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით) ან უარყოფითი (საათის ისრის მიმართულებით); ამასთანავე, გრადუსების ან რადიანების ნებისმიერი რიცხვით გამოსახული; ნებისმიერი რიცხვისთვის არსებობს მობრუნება ისეთი კუთხით, რომლის ზომა (გრადუსული ან რადიანული) მოცემული რიცხვით გამოისახება.

ყოველ t რიცხვს შეესაბამება წრეწირზე P_t წერტილი, რომელიც P_0-ისგან t რადიანით მობრუნებისას მიიღება. მობრუნების კუთხის ცვლილებისას — წერტილის მოძრაობისას წრეწირზე P_t წერტილის გეგმილი X ღერძზე მოძრაობს P_0 და P_1 წერტილებს შორის — აწარმოებს რხევით მოძრაობას P_0-დან P_1-ისკენ და უკან — P_1-დან — P_0-ისკენ; ამ რხევისას გადახრა კოორდინატთა სათავიდან, როგორც მას უწოდებენ — ამპლიტუდა — რადიუსის ტოლია. ამ რხევითი პროცესის აღწერისა და სხვა პრაქტიკული მიზნებისთვის მნიშვნელოვანია ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრა და მათი გამოყენება. ეს განზოგადება წერტილის წრეწირზე მოძრაობას უკავშირდება.



განვიხილოთ ერთი პრაქტიკული ამოცანა.

სურათზეა წარმოდგენილი ერთ-ერთი მექანიზმის შემადგენელი ნაწილები: OP მრუდმხარა, PQ ბარბაცა და QB ცოცია. ვთქვათ, გვსურს ვიპოვოთ დამოკიდებულება ცოციას O წერტილიდან გადაადგილებასა k წრფის გასწვრივ) და მრუდმხარას მობრუნების კუთხეს შორის.



სურათის მიხედვით შეიძლება კოსინუსების თეორემა გამოვიყენოთ: ვთქვათ, $OQ=y$, $OP=r$, $PQ=l$. მაშინ

$$l^2=r^2+y^2-2yr\cos\alpha, \qquad l^2=r^2+(y-r\cos\alpha)^2-r^2\cos^2\alpha,$$

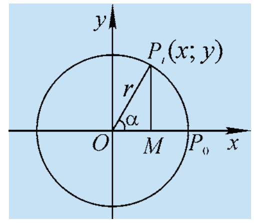
$$l^2=(y-r\cos\alpha)^2+r^2\sin^2\alpha, \qquad (y-r\cos\alpha)^2=l^2-r^2\sin^2\alpha,$$

$$y=r\cos\alpha+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}.$$

ეს დამოკიდებულება ჭეშმარიტია წრეწირზე P წერტილის ნებისმიერი მდებარეობისთვის — α კუთხის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის. საჭიროა α კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები გავავრცელოთ α-ს ნებისმიერ მნიშვნელობაზე.

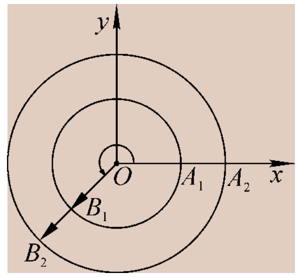
ვთქვათ, P_t წერტილი მიიღება კოორდინატთა სათავის გარშემო P_0-ის α კუთხით მობრუნებით. თუ α დადებითი მახვილი კუთხეა, მაშინ OPM მართკუთხა

სამკუთხედიდან



$$\frac{y}{r}=\sin\alpha, \qquad \frac{x}{r}=\cos\alpha. \qquad (1)$$

ამ ფორმულებით განვსაზღვრავთ ნებისმიერი α კუთხის სინუსსა და კოსინუსს. თუმცა, შეიძლება შემოვიფარგლოთ ერთეულოვანი წრეწირით — (1) ფორმულებით განსაზღვრული sinα და cosα არ არის დამოკიდებული წრეწირის რადიუსზე და მხოლოდ α-ზეა დამოკიდებული.



მართლაც, ვთქვათ, $B_1(x_1;\ y_1)$ და $B_2(x_2;\ y_2)$, შესაბამისად, r_1 და r_2 რადიუსის მქონე კონცენტრული წრეწირების წერტილებია, $r_2>r_1$, თუ $\overrightarrow{OB_2}$ და $\overrightarrow{OB_1}$ კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ

$$\overrightarrow{OB_2}=\frac{r_2}{r_1}\overrightarrow{OB_1},$$

ანუ,

$$x_2=\frac{r_2}{r_1}x_1, \qquad \frac{x_2}{r_2}=\frac{x_1}{r_1}, \qquad y_2=\frac{r_2}{r_1}y_1, \qquad \frac{y_2}{r_2}=\frac{y_1}{r_1}.$$

ამრიგად, cosα-ს და sinα-ს მნიშვნელობები არ არის დამოკიდებული არჩეული წრეწირის რადიუსზე.

ამიტომ, ავირჩიოთ ყველაზე ხელსაყრელი — **ერთეულოვანი წრეწირი** — წრეწირი, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია და რადიუსი ერთის ტოლია. მაშასადამე, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები შეიძლება ასეც განვსაზღვროთ: **α რადიანის ტოლი კუთხის სინუსი ეწოდება ერთეულოვანი წრეწირის P_α წერტილის ორდინატს, α რადიანის ტოლი კუთხის კოსინუსი — P_α წერტილის აბსცისას.**

$$\boxed{\sin\alpha=y, \qquad \cos\alpha=x.}$$

შენიშვნა. როცა ვიტყვით: α კუთხე რომელიმე (მაგალითად, I) მეოთხედს ეკუთვნის — ვგულისხმობთ: P_α წერტილი ეკუთვნის აღნიშნულ მეოთხედს.

უკვე აღვნიშნეთ, რომ ნებისმიერი t რიცხვისთვის, არსებობს მობრუნება, რომლის რადიანული ზომა t რიცხვით გამოისახება. ამიტომ ნებისმიერი t რიცხვის სინუსი და კოსინუსი ვუწოდოთ t რადიანის ტოლი კუთხის სინუსსა და კოსინუსს. მაშასადამე, t რიცხვის სინუსი ამ რიცხვის შესაბამისი P_t წერტილის ორდინატია, კოსინუსი — აბსცისა:

$$\sin t=y, \qquad \cos t=x. \qquad (2)$$

იმ t რიცხვებისთვის, რომლებისთვისაც $\cos t\neq 0$, განვსაზღვრავთ tg$t$-საც ფორმულით:

$$\boxed{tgt=\frac{\sin t}{\cos t}} \qquad (3)$$

სინუსისა და კოსინუსის განსაზღვრებიდან გვაქვს: ნებისმიერი t რიცხვისთვის:

$$\boxed{\sin^2 t+\cos^2 t=1.}$$

ამასთანავე, შეამოწმეთ, რომ თუ $\cos t\neq 0$, მაშინ

$$1+\mathrm{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}.$$

მაშასადამე, ნებისმიერ t რიცხვს (2) ფორმულებით შევუსაბამეთ სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობები — განვსაზღვრეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები — სინუსი და კოსინუსი; (3) ფორმულით, როცა $\cos t\neq 0$, განვსაზღვრეთ t რიცხვის ტანგენსი.

ამ განსაზღვრებების შესაბამისად, რადგან ერთეულოვანი წრეწირის ყოველი (x, y) წერტილისათვის $-1\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 1$, x ღებულობს ნებისმიერ მნიშვნელობას $[-1; 1]$ შუალედიდან, ასეთივეა y-იც. ამრიგად, **სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობათა სიმრავლეები [–1; 1] შუალედია;** ამ ფუნქციებიდან თითოეულის **განსაზღვრის არე ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეა.**

შეიძლება ითქვას: სინუსი და კოსინუსი $[-1; 1] \to \mathbf{R}$ ასახვის კერძო შემთხვევებია.

ამასთანავე, გავიხსენოთ, რომ ნებისმიერი t რიცხვისთვის და ნებისმიერი $n\in Z$ რიცხვისთვის,

$$R_0^t \text{ და } R_0^{t+2\pi n}$$

მობრუნებები, ანუ, P_t და $P_{t+2\pi n}$ წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა. მაშასადამე, ნებისმიერი t რიცხვისთვის

$$\sin(t+2\pi n)=\sin t,\ \ n\in Z,$$
$$\cos(t+2\pi n)=\cos t,\ \ n\in Z.$$

— სინუსი და კოსინუსი პერიოდული ფუნქციებია. ორივე ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი 2π რიცხვია.

შევაჯამოთ: *განვსაზღვრეთ ნებისმიერი რიცხვის სინუსი და კოსინუსი; t რიცხვის სინუსი არის ერთეულოვან წრეწირზე ამ რიცხვის შესაბამისი P_t წერტილის ორდინატი, $\sin t=y$; კოსინუსი არის P_t წერტილის აბსცისა, $\cos t=x$; ნებისმიერი t რიცხვისთვის, რომლისთვისაც $\cos t\neq 0$, $\mathrm{tg}t=\frac{\sin t}{\cos t}$.*

სინუს და კოსინუს ფუნქციებიდან თითოეულის განსაზღვრის არე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, მნიშვნელობათა სიმრავლე — [–1; 1] შუალედი. სინუსი და კოსინუსი პერიოდული ფუნქციებია, თითოეული მათგანის უმცირესი დადებითი პერიოდი არის 2π.

ს

ტრიგონომეტრია ბერძნული სიტყვაა და სამკუთხედის (ტრიგონონ) გაზომვას (მეტრის) ნიშნავს. მათემატიკის ეს დარგი ასტრონომიის, გეოგრაფიისა და ნავიგაციის პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტასთან დაკავშირებით ვითარდებოდა. ვარაუდობენ, რომ ამ დარგის საწყისები უკვე ძველ ეგვიპტეში (ჩ.წ.ა.-მდე რამდენიმე ათასეული წლის წინ) ჩაისახა.

ჩვენამდე მოღწეული ნაშრომებიდან პირველია ძველი ბერძენი მათემატიკოსის პტოლემეს (II საუკუნე) წიგნი, რომელშიც ტრიგონომეტრიის ელემენტებია მოცემული. აქ სხვა საკითხებთან ერთად მოცემულია ცხრილი, რომელიც შეიძლება ჩაითვალოს 0^0-დან 90^0-მდე კუთხეების სინუსების ცხრილად (30′-იანი ბიჯით). ამ ცხრილით საუკუნეების მანძილზე სარგებლობდნენ სხვადასხვა ქვეყნებში.

სინუსი და კოსინუსი ინდოელი მეცნიერების ასტრონომიულ ნაშრომებშიც გვხვდება (IV-V საუკუნე), ხოლო ტანგენსი — IX-X საუკუნეებში არაბ მეცნიერთა პრაქტიკულ გამოკვლევებში, მაგალითად, ჩრდილის მიხედვით მზის სიმაღლის განსაზღვრისას. ამ ამოცანას ეფუძნება მზის საათის დამზადება.

სურათზე XVI საუკუნის გრავიურაა გამოსახული. მის მიხედვით თქვენ აღმოაჩენთ, თუ რა გაზომვები მიმდინარეობდა იმ დროის ევროპაში.

თანამედროვე სახე ტრიგონომეტრიის ფორმულებსა და ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს გამოჩენილმა მათემატიკოსმა **ლეონარდ ეილერმა** (1707-1783) მისცა.

მათემატიკის თითქმის ყველა ნაწილში და მის გამოყენებებში გვხვდება ეილერის სახელი — ეილერის თეორემა, ეილერის იგივეობა, ეილერის ფორმულა, ეილერის მუდმივა, ეილერის ფუნქცია და ა.შ. 1735 წელს ეილერი ცალი თვალით დაბრმავდა. 1766 წლიდან კი სრულიად უსინათლო იყო. მიუხედავად ამისა, ის მაინც აგრძელებდა უმნიშვნელოვანეს სამეცნიერო მუშაობას და არაჩვეულებრივი აღმოჩენებით ამდიდრებდა მეცნიერებას.

?

1. რა ფორმულით განვსაზღვრავთ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის სინუსს, კოსინუსს, ტანგენსს?

2. რა ფორმულით განვსაზღვრავთ ნებისმიერი α კუთხის სინუსს, კოსინუსს, ტანგენსს?

3. რას ვუწოდეთ ნებისმიერი t რიცხვის სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი?

4. არის თუ არა სინუსი და კოსინუსი პერიოდული ფუნქციები?

5. შეიძლება თუ არა, t-ს რაიმე მნიშვნელობებისთვის $[-1;\ 1]$-დან $\cos t$-სა და $\sin t$-ს მნიშვნელობები (ორივე) იყოს უარყოფითი, დადებითი?

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 ნებისმიერი t რიცხვისთვის $\sin(2\pi+t)=$

1) $\sin 2t$ 2) $\sin 2\pi$ 3) $\sin t$ 4) $\sin(t+\pi)$.

2 ნებისმიერი t რიცხვისთვის $\cos(t-2\pi)=$

1) $\cos(-2\pi)$ 2) $\cos 2\pi$ 3) $\cos 2t$ 4) $\cos t$.

3 $t=\frac{\pi}{4}$-ს ერთეულოვან წრეწირზე შეესაბამება წერტილი

1) $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4 $t=\frac{3\pi}{2}$-ს ერთეულოვან წრეწირზე შეესაბამება წერტილი

1) $(-1;\ 0)$ 2) $(0;\ -1)$ 3) $(1;\ 0)$ 4) $(0;\ 1)$.

5 $\cos\frac{3\pi}{2}=$

1) 1 2) 0 3) -1 4) $\frac{1}{2}$.

6 $\mathrm{tg}\pi=$

1) 1 2) -1 3) 0 4) $\sqrt{3}$.

7 $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}=$

1) -1 2) 1 3) 0 4) ± 1.

8 ნებისმიერი t რიცხვისთვის $\sin^2 t=$

1) $1-\cos^2 t$ 2) $1+\cos^2 t$ 3) $2+\cos^2 t$ 4) $1+\sin^2 t$.

9 ნებისმიერი t რიცხვისთვის, რომლისთვისაც $\cos t \neq 0$, $1+\mathrm{tg}^2 t=$

1) $\frac{l}{\sin^2 t}$ 2) $\frac{l}{\cos^2 t}$ 3) 1 4) $\cos^2 t$.

10 $\sin^2 2+\cos^2 2=$

1) 1 2) 2 3) $\frac{1}{2}$ 4) 3.

11 r-რადიუსიანი წრეწირის $3r$ სიგრძის რკალის შესაბამისი ცენტრული კუთხის რადიანული ზომაა

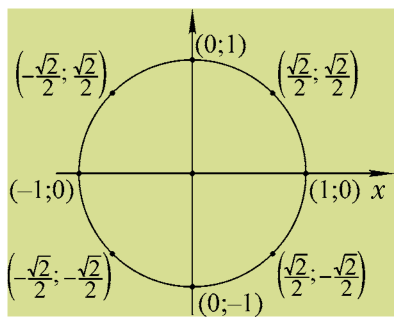
1) 3π 2) $\frac{3\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) 3.

12 $2+\cos\alpha$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობაა

1) 2 2) 4 3) 3 4) 1.

ამოხსენით ამოცანა

13 ერთეულოვანი წრეწირი 8 ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი — მიღებული წერტილები შეესაბამება t-ს მნიშვნელობებს: 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; π; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$.

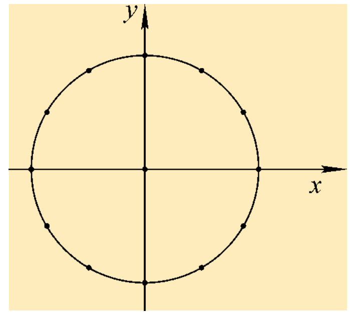


- დაასაბუთეთ, რომ მიღებული P_t წერტილების კოორდინატები, შესაბამისად, მითითებული რიცხვებია.
- გამოიყენეთ სურათზე წარმოდგენილი მონაცემები შეავსეთ ცხრილი:

α	0;	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\mathrm{tg}\alpha$									

- დაასაბუთეთ, რომ $t=-\frac{\pi}{4}$ და $t=\frac{7\pi}{4}$-ს ერთი და იგივე წერტილი შეესაბამება.
- იპოვეთ ამ რიცხვების სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი.

14 ერთეულოვანი წრეწირი 12 ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი ისე, როგორც ეს სურათზეა წარმოდგენილი.



- იპოვეთ მიღებული წერტილების კოორდინატები.
- იპოვეთ სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი, როცა

  $t=-\frac{\pi}{6}$, $t=-\frac{\pi}{3}$.
- გამოიყენეთ 1 და 2 ამოცანაში მიღებული შედეგები და შეავსეთ ცხრილი:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\mathrm{tg}\alpha$									

15 გამოიყენეთ პერიოდულობის თვისება და იპოვეთ t რიცხვის სინუსი და კოსინუსი:

ა) $t=\frac{13\pi}{6}$; ბ) $t=-\frac{7\pi}{2}$.

16 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}+\cos^3\frac{\pi}{3}$; ბ) $\left(\mathrm{tg}30^0+\frac{\mathrm{tg}45^0}{\mathrm{tg}30^0}\right)\cos30^0$;

გ) $\frac{\sin^2 30^0+\cos^4 45^0}{\mathrm{tg}^2 60^0}$; დ) $\frac{2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$.

17 რომელ მეოთხედს ეკუთვნის კუთხე, რომლის რადიანული ზომაა:

ა) $\frac{\pi}{5}$; ბ) $\frac{7\pi}{5}$; გ) $\frac{5\pi}{4}$; დ) $-\frac{11\pi}{9}$; ე) -1;

ვ) -2; ზ) 2; თ) $3{,}6$; ი) $5{,}63$; კ) $-2{,}25$.

18 შეავსეთ ცხრილი (რვეულში):

n	-2	-1	0	1	2	10
$\alpha=\frac{\pi}{6}+2\pi n$						
მეოთხედი, რომელსაც α ეკუთვნის						

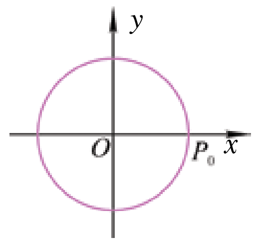
19 იპოვეთ წრეწირის იმ რკალის რადიანული α ზომა, რომლის რადიუსი 15 ერთეულია, ხოლო რკალის სიგრძე არის:

ა) 5; ბ) 3.

მითითება. გაიხსენეთ: r რადიუსის მქონე წრეწირის t რადიანის რკალის სიგრძე არის tr.

20 ავტომობილი მოძრაობს 80 კმ/სთ სიჩქარით. მისი თვლების დიამეტრი 75 სმ-ია. რამდენ სრულ ბრუნს ასრულებს ავტომობილის თვალი 1 წთ-ში?

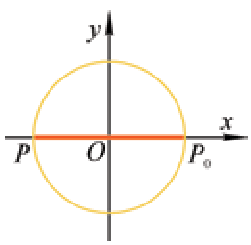
21 წერტილი მოძრაობს წრეწირზე დადებითი მიმართულებით და ამ მოძრაობის კუთხური სიჩქარე არის 1 რადიანი წამში (1 წამში მობრუნების კუთხე). $t=0$ შემთხვევაში წერტილი P_0-ს ემთხვევა. მონიშნეთ სურათზე წერტილის მდებარეობა:



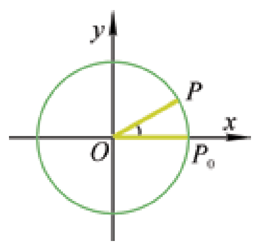
ა) $\frac{\pi}{4}$ წამის შემდეგ; ბ) $\frac{2\pi}{3}$ წუთის შემდეგ.

22 ჩაწერეთ ყველა ის t რიცხვი, რომელიც P_O წერტილიდან t რადიანის ტოლი კუთხით მობრუნებისას ერთეულოვან წრეწირზე P წერტილს წარმოგვიდგენს:

ა)

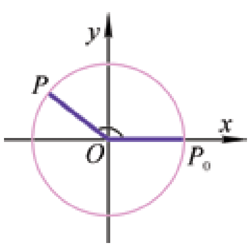


ბ)



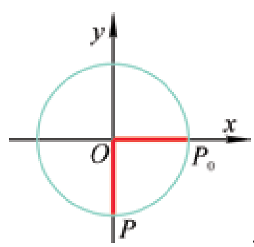
$\angle P_0OP=\frac{\pi}{6}$

გ)



$\angle P_0OP=\frac{5\pi}{6}$

დ)



23 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $4\sin\pi-4\cos\frac{3\pi}{2}+3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\mathrm{tg}0$; ბ) $3\cos^2\frac{\pi}{3}+2\sin^2\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$;

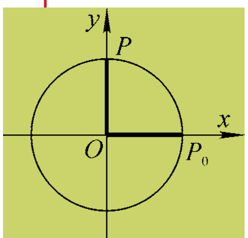
გ) $\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$; დ) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{4}$.

24 დაწერეთ ფორმულის სახით t-ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც:

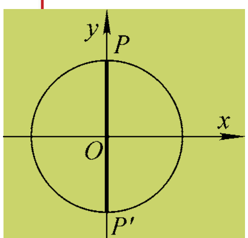
ა) $\sin t=1$; ბ) $\cos t=-1$;

გ) $\cos t=0$; დ) $\operatorname{tg} t=0$.

მითითება. თუ $\sin t=1$, მაშინ t რიცხვს შეესაბამება ის წერტილი, რომლის ორდინატია 1, ასეთი წერტილი ერთადერთია — $P(1;\ 0)$ წერტილი. ის შეესაბამება $t=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ რიცხვებს;



გ) თუ $\cos t=0$, მაშინ t რიცხვს შეესაბამება ის წერტილი, რომლის აბსცისა 0-ია, ასეთი თვისების ორი წერტილი გვაქვს: P და P'. ისინი შეესაბამება რიცხვებს:



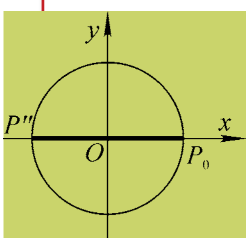
$$t=\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad \text{და} \quad t=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z,$$

ანუ

$$t=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$$

ყველა ეს რიცხვი ასეც ჩაიწერება:

$$t=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$$



დ) თუ $\operatorname{tg} t=0$, მაშინ $\sin t=0$ და t რიცხვს P_0 და P'' წერტილები შეესაბამება:

$$t=2\pi n,\ \text{ან}\ t=\pi+2\pi n=\pi(2n+1),\ n\in Z.$$

ეს რიცხვები შეიძლება ასეც ჩავწეროთ: $t=\pi n,\ n\in Z$.

25 იპოვეთ გამოსახულების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები:

ა) $1+\sin t$; ბ) $2-\cos t$; გ) $3+2\sin t$; დ) $2-2\cos t$; ე) $|\sin t|$.

26 შესაძლებელია, თუ არა $\sin t=m$ ტოლობა, როცა m არის:

ა) $\sqrt{2}$; ბ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; გ) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$; დ) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

27 იპოვეთ t რიცხვის სინუსი და კოსინუსი:

ა) $t=\dfrac{25\pi}{6}$; ბ) $t=-\dfrac{9\pi}{4}$; გ) $t=\dfrac{7\pi}{3}$.

28 მოსწავლემ f ფუნქციისთვის შეამოწმა ტოლობები და დაასკვნა, რომ T ამ ფუნქციის პერიოდია. სწორად მსჯელობს თუ არა მოსწავლე?

ა) $f(t)=\sin t$, $\quad \sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$; $\quad \sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$; $\quad T=\dfrac{2\pi}{3}$;

ბ) $f(t)=\cos t$, $\quad \cos\dfrac{\pi}{2}=0$, $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\right)=0$, $\quad T=\pi$.

29 ვთქვათ, $f(t)$ ფუნქცია პერიოდულია, k და b რაიმე რიცხვებია. დაასაბუთეთ, რომ $kf(t)+b$ ფუნქციაც პერიოდულია.

30 იპოვეთ:

ა) $\sin\frac{9\pi}{4}$; ბ) $\cos\frac{121\pi}{4}$; გ) $\sin\left(-\frac{111\pi}{4}\right)$; დ) $\cos\left(-\frac{203\pi}{4}\right)$.

31 დაასაბუთეთ: თუ საერთო განსაზღვრის არის მქონე $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვს საერთო პერიოდი — T, მაშინ $f(x)+g(x)$ პერიოდული ფუნქციაა და მისი პერიოდია T.

32 დაასაბუთეთ: თუ $f(x)$-ის უმცირესი დადებითი პერიოდია T, მაშინ $f(kx)$-ის უმცირესი დადებითი პერიოდია $\frac{T}{k}$.

მითითება. განიხილეთ ფუნქცია:

$$F(x)=f(kx)$$

$$F(x+\frac{T}{k})=f(k(x+\frac{T}{k}))=f(kx+T)=f(kx)=F(x).$$

ვთქვათ, $0<l<\frac{T}{k}$ და ნებისმიერი x-თვის $f(x)$-ის განსაზღვრის არიდან

$F(x+l)=f(k(x+l))=f(kx+kl)$ ეს კი არ უდრის $f(kx)$-ს, რადგან $0<kl<T$.

33 დაასაბუთეთ, რომ $(\cos 3x+\cos 4x)$-ის უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π.

მითითება. ცხადია, 2π პერიოდია, შევამოწმოთ, რომ 2π უმცირესი დადებითი პერიოდია.

ვთქვათ, l პერიოდია, $0<l<2\pi$ და $F(x)=\cos 3x+\cos 4x$.

მაშინ $F(x+l)=F(x)$ (ნებისმიერი x-სთვის). განვიხილოთ

$$F(x+l)=\cos 3(x+l)+\cos 4(x+l).$$

ამრიგად,

$$\cos(3x+3l)+\cos(4x+4l)=\cos 3x+\cos 4x.$$

კერძოდ, როცა $x=0$, მაშინ

$$\cos 3l+\cos 4l=2.$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$\cos 3l=1,\ \cos 4l=1.\ (1)$$

მაგრამ, l-ის უმცირესი დადებითი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ერთდროულად შესრულდება (1) ტოლობები, არის 2π. ამრიგად 2π-ზე ნაკლები პერიოდი $F(x)$ ფუნქციას არა აქვს.

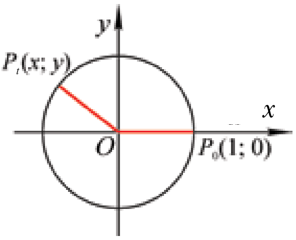
34 იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $\sin 3x$; ბ) $\cos 5x$; გ) $\sin\frac{x}{5}$;

დ) $\cos\frac{x}{3}$; ე) $2\sin 3x+3\cos 2x$; ვ) $1-\sin\frac{x}{2}+\cos x$.

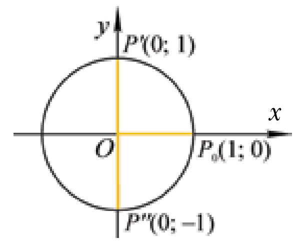
1.8 ვაგრძელებთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების შესწავლას

1) ტანგენსის პერიოდულობა



t რიცხვის ტანგენსი ერთეულოვან წრეწირზე შესაბამისი $P_t(x;\ y)$ წერტილის სინუსისა და კოსინუსის შეფარდებაა:

$$\mathrm{tg}t=\frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \text{ანუ} \qquad \mathrm{tg}t=\frac{y}{x};$$

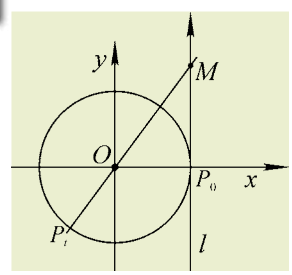


თუ P_t წერტილის აბსცისა ნულია, მაშინ ტანგენსი განსაზღვრული არ არის. ნულის ტოლი აბსცისა აქვს P' და P'' წერტილებს, რომლებიც $t=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ და $t=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$, რიცხვებს შეესაბამება. ეს რიცხვები ასეც ჩაიწერება:

$$t=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z.$$

მაშასადამე,

> თუ $t\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, მაშინ ყოველ t რიცხვს $\mathrm{tg}t$-ს ერთადერთი მნიშვნელობა შეესაბამება.



ვთქვათ, l წრფე ერთეულოვან წრეწირს ეხება P_0 წერტილში, OP_t წრფე კი l-ს M წერტილში კვეთს. OM წრფის განტოლება, ცხადია, $y=kx$ სახით ჩაიწერება და მას P_t წერტილის კოორდინატებიც აკმაყოფილებს, თუ $P_t=(x_t; y_t)$, მაშინ

$$y_t=k\cdot x_t,\ \ k=\frac{y_t}{x_t}=\mathrm{tg}t.$$

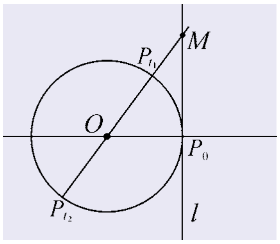
მაშასადამე, OM წრფის განტოლებაა:

$$y=\mathrm{tg}t\cdot x. \qquad (1)$$

ცხადია, მას M წერტილის კოორდინატებიც აკმაყოფილებს. M-ის აბსცისა 1-ის ტოლია, y-ორდინატი (1)-დან მიიღება — M წერტილის ორდინატი $\mathrm{tg}t$-ს ტოლია.

P_0M წრფეს **ტანგენსების ღერძი** ეწოდება.

ამრიგად, თუ t რაიმე რიცხვია, მაშინ მისი ტანგენსი გრაფიკულად ასე შეიძლება მოიძებნოს: ვპოულობთ t-ს შესაბამის P_t წერტილს ერთეულოვან წრეწირზე. გავავლებთ OP_t წრფეს და მოვნიშნავთ ამ წრფისა და P_0 წერტილზე გავლებული მხები წრფის გადაკვეთის წერტილს. ამ წერტილის ორდინატია $\mathrm{tg}t$, ანუ t რიცხვის ტანგენსი ტანგენსების ღერძზე შესაბამისი წერტილის ორდინატია.



სურათზე მონიშნულ P_{t_1} და P_{t_2} წერტილებს ტანგენსების ღერძზე ერთი წერტილი — M წერტილი შეესაბამება. მაშასადამე, ამ t_1 და t_2 რიცხვების ტანგენსები ტოლია. P_{t_1} და P_{t_2} წერტილების შესაბამისი რიცხვები ერთმანეთისგან πn $(n\in Z)$ რიცხვით განსხვავდება.

მაშასადამე,

$$\mathrm{tg}(t+\pi n)=\mathrm{tg}t,\ \ n\in Z. \qquad (2)$$

ამრიგად, **ტანგენსი პერიოდული ფუნქციაა.**

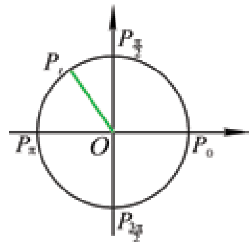
- შეეცადეთ დაასაბუთოთ, რომ π არის ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

2) ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა პოვნა, ნულები; ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნები

სინუსი და კოსინუსი პერიოდული ფუნქციებია 2π პერიოდით, ამიტომ მივუთითებთ ამ ფუნქციების ნულებს და ნიშნების ცვლილებას მხოლოდ 2π სიგრძის $[0;2\pi)$ შუალედში. პერიოდულობის გამო არ გაგვიჭირდება ამ ფუნქციების ნულების მითითება და ნიშნების გარკვევა ნებისმიერ სხვა შუალედში.

გავიხსენოთ, რომ t რიცხვის სინუსი და კოსინუსი, შესაბამისად, P_t წერტილის ორდინატი და აბსცისაა:

$$\sin t=y,\ \ \cos t=x.$$



რადგან $t\in[0;\ 2\pi)$, ამიტომ მხოლოდ P_0 და P_π წერტილების ორდინატებია ნულის ტოლი. მაშასადამე, $t=0$ და $t=\pi$ არის $\sin t$-ს ნულები $[0;\ 2\pi)$ შუალედში.

$\sin t$-ს ყველა ნული ასე ჩაიწერება:

$$t=\pi n,\ \ n\in Z.$$

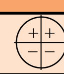
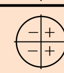
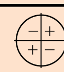
ტანგენსის ნულების სიმრავლე სინუსის ნულების სიმრავლეს ემთხვევა. ეს ნულებია:

$$t=\pi n,\ \ n\in Z.$$

კოსინუსის ყველა ნული კი ასე ჩაიწერება:

$$t=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ მეოთხედების მიხედვით წერტილების კოორდინატების ნიშნებს, შეიძლება შევადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნების ცხრილი:

	I მეოთხედი	II მეოთხედი	III მეოთხედი	IV მეოთხედი	
$\sin t$	+	+	−	−	
$\cos t$	+	−	−	+	
$\mathrm{tg}\, t$	+	−	+	−	

ამ ცხრილში გამორიცხულია კუთხეები, რომლებიც მეოთხედების საზღვრის შესაბამისია.

მაგალითი 1

მოცემულია: $\sin t=-\frac{3}{5}$, $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$. ვიპოვოთ $\cos t$, $\mathrm{tg}\, t$.

ამოხსნა.

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1$$
$$\cos^2 t=1-\sin^2 t$$

$$\cos^2 t=\frac{16}{25}$$

რადგან $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$, შესაბამისი წერტილი ერთეულოვან წრეწირზე III მეოთხედს ეკუთვნის, $\cos t<0$. მაშასადამე,

$$\cos t=-\frac{4}{5},\quad \operatorname{tg} t=\left(-\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{4}.$$

მაგალითი 2

მოცემულია: $\operatorname{tg} t=-2$, $\frac{3\pi}{2}<t<2\pi$. ვიპოვოთ $\sin t$, $\cos t$.

ამოხსნა.
გავიხსენოთ, რომ

$$1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$1+4=\frac{1}{\cos^2 t}.$$

ამრიგად,

$$\cos^2 t=\frac{1}{5}.$$

IV მეოთხედში $\cos t>0$, ამიტომ $\cos t=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin t=\cos t\cdot\operatorname{tg} t=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

მაგალითი 3

კალკულატორის გამოყენებით ვიპოვოთ $\cos 5^0 40'12''$.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები ზოგიერთი მოდელის კალკულატორის საშუალებით შეიძლება ვიპოვოთ როგორც გრადუსებში, ასევე რადიანებში გამოსახული კუთხეებისთვის. კალკულატორზე შესაბამისი ღილაკის გამოყენებაა საჭირო, რომლითაც მივუთითებთ გრადუსებს ვიყენებთ, თუ რადიანებს.

გრადუსებზე გადართვასთან ერთად საჭიროა არგუმენტის მნიშვნელობა ათობითი სისტემის ჩანაწერით წარმოვადგინოთ. მაგალითად,

$$5^0 40'12''=5^0+\left(\frac{40}{60}\right)^0+\left(\frac{12}{3600}\right)^0=5{,}67^0,$$

$$\cos(5^0 40'12'')=\cos 5{,}67^0\approx 0{,}0987987.$$

ზოგიერთი მოდელის კალკულატორი კი ამ გარდაქმნების გარეშეც „კითხულობს“ კუთხეებს და პოულობს ფუნქციათა მნიშვნელობას.

საკმარისია მივაწოდოთ: $\boxed{MODE}$ $\boxed{MODE}$ $\boxed{1}$,

შემდეგ კი $\boxed{\cos}$ 5 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 40 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 12 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $\boxed{=}$ და ეკრანზე მივიღებთ სათანადო მნიშვნელობას.

მაგალითი 4

კალკულატორით გამოვთვალოთ $\sin 25^0 17' 35''$.

$$25^0 17' 35'' = 25^0 + \left(\frac{17}{60}\right)^0 + \left(\frac{35}{3600}\right)^0 = 25^0 + \left(\frac{17\cdot 60+35}{3600}\right)^0$$

ამჟერად ყველა მოქმედება კალკულატორზე ვაწარმოოთ: გრადუსებზე გადართვისა და სინუსის $\boxed{\text{SIN}}$ მითითების შემდეგ მივიღებთ პასუხს: 0,427248.

მაგალითი 5

$\text{tg}\frac{14\pi}{5}$-ის პოვნის პროცესი კალკულატორზე ასე წარმოგვიდგება:

Radian | 14 $\boxed{\times}$ π $\boxed{\div}$ 5 = $\boxed{\text{tg}}$ = 0,7265425.

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობების გამოთვლაში სახელმძღვანელოს ბოლოში წარმოდგენილი ცხრილიც გამოგადგებათ.

შევაჯამოთ: *წარმოდგენილია ტანგენსის პერიოდულობის დასაბუთება, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნები მეოთხედების მიხედვით, განხილულია კალკულატორის საშუალებით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობების პოვნა. ამასთანავე, გავიხსენეთ ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, შევავსეთ ადრე მიღებული ცხრილი და წარმოვადგინეთ იგი შემდეგი სახით:*

α (გრადუსებით)	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0
α (რადიანებით)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	არ არის განსაზღვრული	0	არ არის განსაზღვრული

?

1. რისი ტოლია ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდი?

2. არგუმენტის რა მნიშვნელობებისთვის არ არის განსაზღვრული ტანგენს ფუნქცია?

3. რა რიცხვებს ვუწოდებთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნულებს?

4. რომელ მეოთხედებშია სინუსი უარყოფითი?
5. რომელ მეოთხედებშია კოსინუსი უარყოფითი?
6. რომელ მეოთხედებშია ტანგენსი უარყოფითი?
7. რომელ მეოთხედებშია სინუსისა და კოსინუსის ნამრავლი უარყოფითი?

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდია
1) π 2) 2π 3) 3π 4) $\frac{\pi}{2}$.

2 $\operatorname{tg}t$ არ არის განსაზღვრული, როცა $t=$
1) $2\pi k,\ k\in Z$ 2) $\pi k,\ k\in Z$ 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ 4) π.

3 $\operatorname{tg}t$ შეიძლება
1) მხოლოდ დადებითი რიცხვი იყოს 2) მხოლოდ უარყოფითი რიცხვი იყოს
3) მხოლოდ ნატურალური რიცხვი იყოს 4) ნებისმიერი რიცხვი იყოს.

4 თუ $\operatorname{tg}\alpha=3$, მაშინ $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=$
1) π 2) $\pi+3$ 3) 3 4) $\pi+\alpha$.

5 $\operatorname{tg}225^0=$
1) 2 2) 1 3) $\frac{1}{2}$ 4) 3.

6 თუ $t=\frac{10\pi}{3}$, მაშინ $\operatorname{tg}t$
1) დადებითია 2) უარყოფითია 3) ნულის ტოლია 4) არადადებითია.

7 თუ $t=2$, მაშინ $\cos t$
1) დადებითია 2) უარყოფითია
3) ნულის ტოლია 4) არაუარყოფითია.

8 თუ $\sin\alpha<0$ და $\cos\alpha<0$, მაშინ α კუთხე ეკუთვნის
1) I მეოთხედს 2) II მეოთხედს
3) III მეოთხედს 4) IV მეოთხედს.

9 $\operatorname{tg}135^0=$
1) 1 2) -1 3) $\sqrt{3}$ 4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ამოხსენით ამოცანები

10 დადებითია თუ უარყოფითი t რიცხვის სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი, თუ:

ა) $t=\frac{15\pi}{8}$; ბ) $t=-\frac{\pi}{7}$; გ) $t=\frac{29\pi}{3}$;

დ) $t=6$; ე) $t=\frac{10\pi}{9}$; ვ) $t=3$?

11 იპოვეთ კალკულატორის გამოყენებით, წარმოადგინეთ პასუხი მეათიათასედამდე სიზუსტით:

ა) $\sin 10^0$; ბ) $\mathrm{tg}23{,}5^0$; გ) $\cos 80^0$; დ) $\sin 73^0 56'$;

ე) $\cos 4^0 50' 15''$; ვ) $\mathrm{tg}\frac{1}{2}$; ზ) $\cos 0{,}75$; თ) $\cos 16{,}35^0$.

12 $\mathrm{tg}\varphi=-\frac{5}{4}$, φ მეოთხე მეოთხედს ეკუთვნის. იპოვეთ $\sin\varphi$ და $\cos\varphi$.

13 რომელ მეოთხედს ეკუთვნის α, თუ:

ა) $\sin\alpha>0$ და $\cos\alpha>0$; ბ) $\sin\alpha<0$ და $\cos\alpha>0$;

გ) $\sin\alpha>0$ და $\mathrm{tg}\alpha<0$; დ) $\cos\alpha>0$ და $\mathrm{tg}\alpha<0$.

14 იპოვეთ α, თუ $\mathrm{tg}\alpha$ არ არის განსაზღვრული და $\pi\le\alpha\le 2\pi$.

15 იპოვეთ t რიცხვის ორი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $0\le t<2\pi$ და

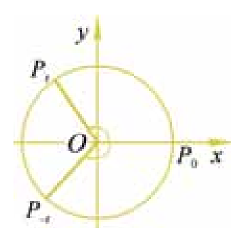
ა) $\sin t=\frac{1}{2}$; ბ) $\cos t=-\frac{1}{2}$; გ) $\mathrm{tg}t=1$;

დ) $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ვ) $\cos t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16 $\sin t=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<t<\pi$. იპოვეთ $\cos t$ და $\mathrm{tg}t$.

3) ლუწი და კენტი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

განვიხილოთ ერთეულოვანი წრეწირი და მასზე P_t და P_{-t} წერტილები. ისინი სიმეტრიულია OX ღერძის მიმართ. ამიტომ ამ წერტილებს აბსცისები ტოლი აქვს, ორდინატები კი მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება; მაშასადამე,



$$\boxed{\cos(-t)=\cos t,\ \ \sin(-t)=-\sin t.} \qquad (1)$$

თუ $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია რიცხვითი წრფის სათავის მიმართ და განსაზღვრის არის ყოველი x რიცხვისთვის

$$f(-x)=f(x), \qquad (2)$$

მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციას **ლუწი ფუნქცია** ეწოდება.

თუ $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია რიცხვითი წრფის სათავის მიმართ და განსაზღვრის არის ყოველი x რიცხვისთვის
$$f(-x)=-f(x), \qquad (3)$$
მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციას **კენტი ფუნქცია** ეწოდება.

ამ განსაზღვრებებისა და (1) ფორმულების მიხედვით, ვღებულობთ: **კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა, სინუსი — კენტი ფუნქცია.**

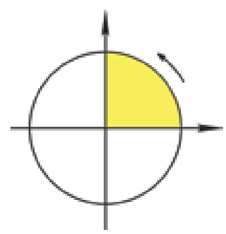
ტანგენსი კენტი ფუნქციაა. მართლაც, თუ $\cos t \neq 0$, მაშინ

$$\mathrm{tg}(-t)=\frac{\sin(-t)}{\cos(-t)}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\mathrm{tg}t.$$

შეამოწმეთ:

- $y=x^n$ ფორმულით მოცემული ფუნქცია, როცა n ლუწი ნატურალური რიცხვია, ლუწი ფუნქციაა;
- $y=x^n$ ფორმულით მოცემული ფუნქცია, როცა n კენტია, ზრდადია.
- მიუთითეთ შუალედი, რომელზეც $y=x^2$ კლებადია.
- გავიხსენოთ, რომ ზრდად ან კლებად ფუნქციას განსაზღვრულს რაიმე სიმრავლეზე, ამ სიმრავლეზე **მონოტონური ფუნქცია** ეწოდება.

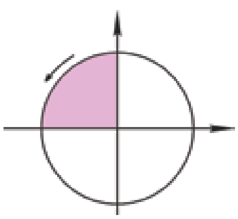
შევისწავლოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მონოტონურობის საკითხი.



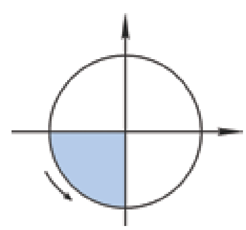
დააკვირდით სურათს. მასზე წარმოდგენილია I მეოთხედში P_t წერტილის ერთეულოვან წრეწირზე დადებითი მიმართულებით მოძრაობა, რასაც შეესაბამება სინუსის (P_t წერტილის ორდინატის) ზრდა და კოსინუსის (აბსცისას) — კლება.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ წერტილის ასეთი მოძრაობა t რიცხვის ზრდისას ხდება, მივიღებთ:

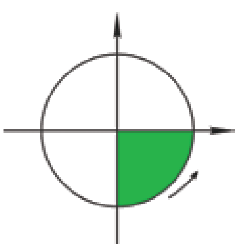
I მეოთხედში: კოსინუსი კლებადია, სინუსი ზრდადია.



II მეოთხედში: კოსინუსი კლებადია, სინუსიც კლებადია (t იზრდება, P_t წერტილის ორდინატი მცირდება, აბსცისაც მცირდება).



III მეოთხედში: სინუსი კლებადია, კოსინუსი ზრდადია.

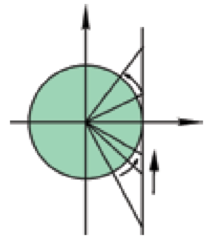


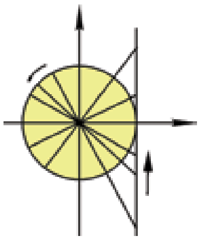
IV მეოთხედში: სინუსი ზრდადია, კოსინუსიც ზრდადია.

თუ გავითვალისწინებთ სინუსისა და კოსინუსის პერიოდულობას, I მეოთხედის შედეგები გავრცელდება $(2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n)$, $n\in Z$ შუალედებზეც. ამრიგად, $(2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n)$, $n\in Z$, შუალედებში კოსინუსი კლებადია, სინუსი ზრდადია.

- შეეცადეთ სხვა მეოთხედების მიხედვით მიუთითოთ ამ ფუნქციების მონოტონურობის შუალედები.

სურათზე ერთეულოვანი წრეწირი და ტანგენსების ღერძია გამოსახული. IV და I მეოთხედებში P_t წერტილი დადებითი მიმართულებით მოძრაობს t-ს ზრდისას. ამ შემთხვევაში ტანგენსების ღერძზე შესაბამისი წერტილის ორდინატიც იზრდება, ანუ ამ მეოთხედებში ტანგენსი ზრდადია — $(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k)$, $k\in Z$ შუალედებში ტანგენსი ზრდადია.





ამ სურათზე წერტილი მოძრაობს მეორე და მესამე მეოთხედებში. t-ს ზრდისას ეს მოძრაობა დადებითი მიმართულებითაა.

ამ შემთხვევაშიც ტანგენსების ღერძზე შესაბამისი წერტილის ორდინატი იზრდება — ტანგენსი იზრდება. II და III მეოთხედებში ტანგენსი ზრდადია. $(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k)$, $k\in Z$ ტანგენსის ზრდადობის შუალედებია.

ეს შემთხვევა შეიძლება არც განგვეხილა — ტანგენსი პერიოდულია π პერიოდით. ამრიგად, II და III მეოთხედებში, ფუნქცია ზრდადია, რადგან ის ზრდადია IV და I მეოთხედებში.

ამრიგად, ტანგენსი ზრდადია $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n)$, $k\in Z$, შუალედებში.

შევაჯამოთ: *განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლუწობა, კენტობა, მონოტონურობა; სინუსი და ტანგენსი კენტი ფუნქციებია, კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა:* $\sin(-t)=-\sin t$; $\cos(-t)=\cos t$; $tg(-t)=-tg t$.

მონოტონური ბერძნული სიტყვებიდანაა წარმოშობილი (მონო – ერთი, ერთადერთი) და ერთი ტონის – ერთფეროვანს, ერთგვარს ნიშნავს. ზოგჯერ კი მოსაწყენის; მომაბეზრებელის გამომხატველიცაა. მაგალითად, მონოტონური მოხსენებით ძნელია მსმენელების დაინტერესება.

მათემატიკაში ეს ცნება გამოჩენილმა გერმანელმა მათემატიკოსმა დირიხლემ (1805-1859) შემოიტანა. თავის სამეცნიერო შრომებში იგი ძირითადად მთელ რიცხვთა თვისებებს შეისწავლიდა.

1. თქვენთვის ცნობილი ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიდან რომელია ლუწი ფუნქცია? რომელია კენტი ფუნქცია?
2. რა შუალედებშია მონოტონური (ზრდადი, კლებადი) თქვენ მიერ შესწავლილი თითოეული ტრიგონომეტრიული ფუნქცია?

ს

ლეონარდ ეილერი (1707-1783) — დიდი შვეიცარიელი მათემატიკოსი, ფიზიკოსი და ასტრონომი.

„sin“ და „cos“ სიმბოლოების დამკვიდრება ეილერის სახელს უკავშირდება. ეილერმა შემოიღო სიმბოლო — tg$x$, თუმცა, მსოფლიოს მრავალ ქვეყანაში ტანგენსს დღეს „tan“ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 ნებისმიერი t რიცხვისთვის $\sin(-t)+\cos(-t)=$

1) $\sin t-\cos t$ 2) $-\sin t+\cos t$ 3) $\cos t+\sin t$ 4) $-\sin t-\cos t$.

2 ნებისმიერი t რიცხვისთვის, რომლისთვისაც $\cos t\neq 0$, გვაქვს $\mathrm{tg}(-t)=$

1) $-\mathrm{tg}t$ 2) $\mathrm{tg}t$ 3) $\sin t$ 4) $\cos t$.

3 ლუწი ფუნქციის განსაზღვრის არე არ შეიძლება იყოს

1) (-3; 3) შუალედი 2) [-3; 3) შუალედი

3) [-3; 3] 4) $(-\infty;\ +\infty)$ შუალედი.

4 თუ $y=f(x)$ კენტი ფუნქციაა და მისი გრაფიკი გადის $M(-3;\ 4)$ წერტილზე, მაშინ ამავე გრაფიკს აუცილებლად ეკუთვნის

1) $M(-3;\ -4)$ წერტილი 2) $M(3;\ -4)$ წერტილი

3) $M(3;\ 4)$ წერტილი 4) $M(-3;\ 8)$ წერტილი.

5 შეარჩიეთ ლუწი ფუნქცია.

1) $y=|x|$ 2) $y=2x$ 3) $y=x^3$ 4) $y=x^5+x$.

6 შეარჩიეთ კენტი ფუნქცია

1) $y=\cos x$ 2) $y=3x^2$ 3) $y=x^4$ 4) $y=2x^3$.

7 მოცემულია უტოლობები:

I. $\sin\frac{4\pi}{5}>\sin\frac{3\pi}{5}$; II. $\cos\frac{\pi}{5}>\cos\frac{\pi}{6}$; III. $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{5}>\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6}$.

მათგან ჭეშმარიტია

1) I 2) მხოლოდ II 3) მხოლოდ III 4) II და III.

8 $\cos 100^0-\cos 99^0$ გამოსახულების მნიშვნელობა

1) დადებითია 2) უარყოფითია 3) ნულია 4) არაუარყოფითია.

9 $\sin 200^0 - \sin 201^0$ გამოსახულების მნიშვნელობა
1) დადებითია 2) უარყოფითია 3) ნულია 4) არადადებითია.

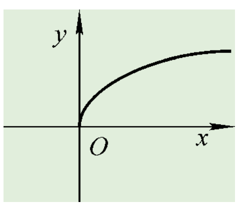
10 დაალაგეთ ზრდის მიხედვით $\mathrm{tg}1^0$, $\mathrm{tg}5^0$, $\mathrm{tg}1$.
1) $\mathrm{tg}1^0<\mathrm{tg}5^0<\mathrm{tg}1$ 2) $\mathrm{tg}5^0<\mathrm{tg}1^0<\mathrm{tg}1$
3) $\mathrm{tg}1^0=\mathrm{tg}1<\mathrm{tg}5^0$ 4) $\mathrm{tg}1<\mathrm{tg}1^0<\mathrm{tg}5^0$

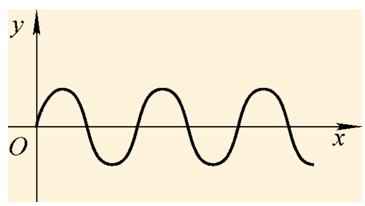
11 თუ t იზრდება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, მაშინ $\sin t$
1) იზრდება 0-დან 1-მდე 2) კლებულობს 0-დან -1-მდე
3) იზრდება -1-დან 0-მდე 4) კლებულობს 1-დან 0-მდე.

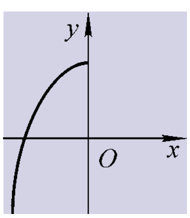
ამოხსენით ამოცანები

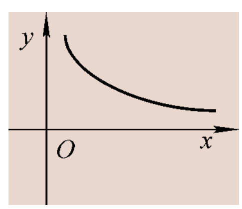
12 შეამოწმეთ — ლუწია, თუ კენტი მოცემული ფუნქცია:
ა) $y=|\sin x|\cdot\cos x$; ბ) $y=(x^2+1)\mathrm{tg}x$;
გ) $y=|x|+\sin|x|$; დ) $y=\sin x+\cos x$;
ე) $y=|x|\cdot\mathrm{tg}x$; ვ) $y=(x^2-1)\cos x$.

13 სურათზე ლუწი ფუნქციის გრაფიკის ნაწილია გამოსახული. გააგრძელეთ გრაფიკის გამოსახვა — წარმოადგინეთ ისეთი ნაწილიც, რაც აუცილებლად ეკუთვნის გრაფიკს.

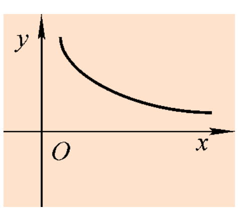
ა) 

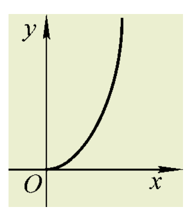
ბ) 

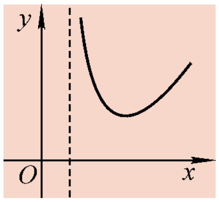
გ) 

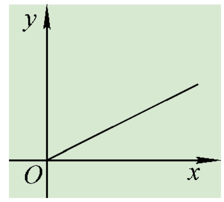
დ) 

14 სურათზე კენტი ფუნქციის გრაფიკის ნაწილია გამოსახული. გააგრძელეთ გრაფიკის გამოსახვა — წარმოადგინეთ ისეთი ნაწილიც რაც აუცილებლად ეკუთვნის გრაფიკს.

ა) 

ბ) 

გ) 

დ) 

15 შეადარეთ $\mathrm{tg}1-\mathrm{tg}1^0$ გამოსახულება ნულს.

16 შეადარეთ:

ა) $\sin 28^0$ და $\sin 36^0$;

ბ) $\cos 28^0$ და $\cos 36^0$;

გ) $\sin\frac{4\pi}{5}$ და $\sin\frac{3\pi}{5}$;

დ) $\cos\frac{4\pi}{5}$ და $\cos\frac{3\pi}{5}$;

ე) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ და $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$;

ვ) $\cos\frac{5\pi}{4}$ და $\cos\frac{6\pi}{5}$;

ზ) $\cos\frac{6\pi}{5}$ და $\cos\frac{5\pi}{4}$;

თ) $\mathrm{tg}15^0$ და $\mathrm{tg}60^0$;

ი) $\mathrm{tg}24^0$ და $\mathrm{tg}42^0$;

კ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ და $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

17 ცნობილია, რომ $0<t_1<\frac{\pi}{2}$, $0<t_2<\frac{\pi}{2}$, $t_2>t_1$. შეადარეთ ნულს:

ა) $\mathrm{tg}t_2-\mathrm{tg}t_1$;

ბ) $\sin t_2-\sin t_1$;

გ) $\cos t_2-\cos t_1$.

18 შეადარეთ:

ა) $\cos 1$ და 1;

ბ) $\mathrm{tg}2$ და 1;

გ) $\sin 2$ და 1;

დ) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$ და $\mathrm{tg}0{,}8$.

19 ცნობილია, რომ $0<t_1<\frac{\pi}{2}$, $0<t_2<\frac{\pi}{2}$; შეადარეთ t_1 და t_2, თუ:

ა) $\sin t_1=\frac{3}{7}$, $\sin t_2=\frac{4}{7}$;

ბ) $\cos t_1=\frac{1}{5}$, $\cos t_2=\frac{1}{7}$;

გ) $\mathrm{tg}t_1=8$, $\mathrm{tg}t_2=5$.

20 დაადგინეთ ნამრავლის ნიშანი:

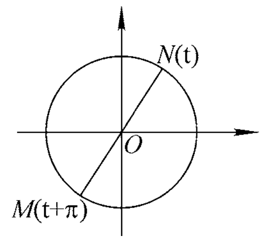
ა) $\sin 780^0\cos 765^0\mathrm{tg}398^0\sin 1560^0$;

ბ) $\cos 1020^0\mathrm{tg}1845^0\mathrm{tg}(-1485^0)$;

გ) $\mathrm{tg}(-1986^0)\cos 2007^0\sin(-2006^0)$;

დ) $\sin\frac{135\pi}{3}\cos\left(-\frac{128\pi}{6}\right)\mathrm{tg}\frac{247\pi}{5}$.

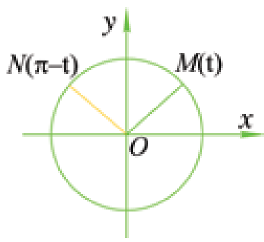
4) დაყვანის ფორმულები



ვთქვათ, MN მონაკვეთი ერთეულოვანი წრეწირის დიამეტრია, მაშინ M და N კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია; ამიტომ M-ის კოორდინატები N-ის კოორდინატებისგან ნიშნით განსხვავდება. ამასთანავე, თუ N წერტილი t რიცხვს შეესაბამება, მაშინ M წერტილი — $\pi+t$-ს. მაშასადამე,

$$\begin{aligned}\sin(\pi+t)&=-\sin t,\\ \cos(\pi+t)&=-\cos t.\end{aligned} \qquad (1)$$

გავიხსენოთ: π ტანგენსის პერიოდია — $\mathrm{tg}(\pi+t)=\mathrm{tg}\,t$.



$M(t)$ და $N(\pi-t)$ წერტილები ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია (შეეცადეთ თავადაც შეამოწმოთ ეს ფაქტი). ამიტომ მათი ორდინატები ტოლია, აბსცისები კი მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება. მაშასადამე,

$$\begin{aligned}\cos(\pi-t)&=-\cos t,\\ \sin(\pi-t)&=\sin t.\end{aligned} \qquad (2)$$

- შეიძლება თუ არა (2) ფორმულები მივიღოთ (1) ფორმულებიდან?
- აჩვენეთ, რომ $\mathrm{tg}(\pi-t)=-\mathrm{tg}\,t$.

შეეცადეთ, ანალოგიური მსჯელობით, ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით, აღწეროთ, შემდეგი ფორმულების ჭეშმარიტობა:

$$\begin{aligned}&\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t\\ &\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t, \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t.\end{aligned} \qquad (3)$$

- (1), (2) და (3) ფორმულების გამოყენებით შეეცადეთ დაასაბუთოთ:

$$\begin{aligned}&\sin(2\pi-t)=-\sin t,\ \cos(2\pi-t)=\cos t,\\ &\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=-\cos t, \cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=\sin t,\\ &\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=-\cos t, \cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=-\sin t.\end{aligned} \qquad (4)$$

- ვთქვათ, $0<t<\frac{\pi}{2}$. გამოარკვიეთ, ამ შემთხვევაში რომელ მეოთხედს ეკუთვნის $\frac{\pi}{2}-t$, $\frac{\pi}{2}+t$, $\frac{3\pi}{2}+t$, $\frac{3\pi}{2}-t$, $2\pi-t$ რიცხვებიდან თითოეულის შესაბამისი წერტილი?
- დაუკვირდით (1)–(4) ფორმულებს. რა განსხვავებაა და რა საერთოა $\pi\pm t$, $2\pi-t$ და $\frac{\pi}{2}\pm t$, $\frac{3\pi}{2}\pm t$ რიცხვების შემთხვევებს შორის?
- **$\frac{\pi}{2}\pm t$ ან $\frac{3\pi}{2}\pm t$ რიცხვების შემთხვევაში სინუსი იცვლება კოსინუსით, კოსინუსი — სინუსით.**
- **$\pi\pm t$, $2\pi\pm t$ რიცხვების შემთხვევაში სინუსი უცვლელია, უცვლელია კოსინუსიც.**

• **თითოეული ტოლობის მარჯვენა მხარეში დაწერილი ნიშანი შეესაბამება მარცხენა მხარეში მოცემული ფუნქციის ნიშანს იმ მეოთხედის შესაბამისად, რომელსაც მისი არგუმენტი ეკუთვნის, თუ მივიჩნევთ, რომ $0<t<\frac{\pi}{2}$.**

(1)–(4) ფორმულები **დაყვანის ფორმულების** სახელითაა ცნობილი.

ასე, მაგალითად, $\cos(\frac{3\pi}{2}-t)=-\sin t$ ტოლობის მარჯვენა მხარეში გვაქვს „–“ ნიშანი. უარყოფითია $\frac{3\pi}{2}-t$ რიცხვის შესაბამისი კოსინუსიც (თუ ვიგულისხმებთ, რომ $0<t<\frac{\pi}{2}$).

შევაჯამოთ: *პერიოდულობის გათვალისწინებით, ნებისმიერი რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა დაიყვანება [0; 2π) შუალედში ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლაზე. დაყვანის ფორმულების გამოყენებით კი [0; 2π) შუალედში სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობების გამოთვლა დაიყვანება $[0;\frac{\pi}{4}]$ შუალედში ამ ფუნქციათა მნიშვნელობების გამოთვლაზე.*

[0; 2π) შუალედში ტანგენსის მნიშვნელობების გამოთვლას იოლად დავიყვანთ ამ ფუნქციის $[0;\ \frac{\pi}{2})$ შუალედში მნიშვნელობების გამოთვლაზე. მაგალითად,

$$\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}=\operatorname{tg}(\pi+\frac{\pi}{3})=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}.$$

შეიძლება $[0,\frac{\pi}{4}]$ შუალედითაც დავკმაყოფილდეთ. მართლაც,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}.$$

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 ნებისმიერი α-სთვის $\cos(180^0+\alpha)=$

1) $\cos\alpha$ 2) $-\cos\alpha$ 3) $\sin\alpha$ 4) $-\sin\alpha$.

2 ნებისმიერი α კუთხისთვის, $\sin(180^0+\alpha)=$

1) $\sin\alpha$ 2) $-\sin\alpha$ 3) $\cos\alpha$ 4) $-\cos\alpha$.

3 ნებისმიერი α კუთხისთვის, $\sin(90^0+\alpha)=$

1) $\cos\alpha$ 2) $-\cos\alpha$ 3) $\sin\alpha$ 4) $-\sin\alpha$.

4 ნებისმიერი α კუთხისთვის, $\cos(90^0+\alpha)=$

1) $\sin\alpha$ 2) $-\sin\alpha$ 3) $\cos\alpha$ 4) $-\cos\alpha$.

5 ნებისმიერი α კუთხისთვის, $\cos(2\pi-\alpha)=$

1) $-\sin\alpha$ 2) $\sin\alpha$ 3) $-\cos\alpha$ 4) $\cos\alpha$.

6 $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $-\frac{1}{2}$.

7 $\cos150^0=$

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$.

8 $\cos\frac{2\pi}{3}=$

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9 $\sin105^0=$

1) $\sin15^0$ 2) $\sin25^0$ 3) $\cos15^0$ 4) $-\cos15^0$.

10 $\cos315^0=$

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11 თუ $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, მაშინ $\sin(270^0-\alpha)=$

1) $\frac{4}{5}$ 2) $\frac{3}{5}$ 3) $-\frac{3}{5}$ 4) $-\frac{4}{5}$.

12 თუ α მახვილი კუთხეა, $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, მაშინ $\cos(180^0+\alpha)=$

1) $-\frac{5}{13}$ 2) $\frac{12}{13}$ 3) $-\frac{12}{13}$ 4) $\frac{5}{13}$.

ამოხსენით ამოცანები

13 იპოვეთ:

ა) $10\mathrm{tg}135^0\sin225^0\cos315^0$;

ბ) $16\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$.

14 გაამარტივეთ:

ა) $\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(180^0-\alpha)}+\frac{\cos\alpha}{\sin(90^0+\alpha)}+1;$

ბ) $\frac{\mathrm{tg}(270^0-\alpha)\sin130^0\cos320^0\sin270^0\cdot\mathrm{tg}(180^0-\alpha)}{\cos50^0\sin220^0\cos360^0}.$

მითითება. $\mathrm{tg}(270^0-\alpha)=\frac{\sin(270^0-\alpha)}{\cos(270^0-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$

15 გამოსახეთ $[0; \frac{\pi}{4}]$-ში მოთავსებული არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციით:

ა) $\sin\frac{28\pi}{3};$ ბ) $\cos\frac{31\pi}{4};$ გ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{58\pi}{3}\right);$ დ) $\sin\left(-\frac{29\pi}{6}\right);$

ე) $\mathrm{tg}800^0;$ ვ) $\sin(-405^0);$ ზ) $\cos600^0;$ თ) $\mathrm{tg}(-941^0).$

მითითება. გამოიყენეთ პერიოდულობა და დაყვანის ფორმულები.

1.9 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკები

1) გავიხსენოთ სინუსისა და კოსინუსის ძირითადი თვისებები:

1) განსაზღვრის არე: $D(\sin)=D(\cos)=\mathbf{R}$,
   მნიშვნელობათა სიმრავლე: $E(\sin)=E(\cos)=[-1;\ 1]$.

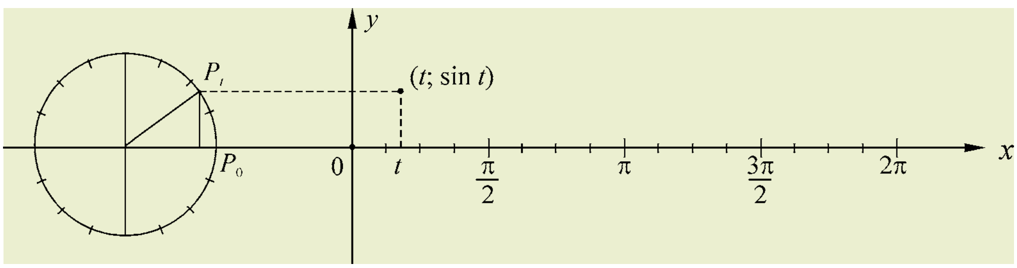
2) სინუსი კენტი ფუნქციაა, კოსინუსი — ლუწი;
   ნებისმიერი x-ისთვის, $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$.

3) სინუსი და კოსინუსი პერიოდული ფუნქციებია და თითოეული მათგანის უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ანუ ნებისმიერი x-ისთვის —

$$\sin(x+2\pi n)=\sin x,$$
$$\cos(x+2\pi n)=\cos x,\quad n\in Z,$$

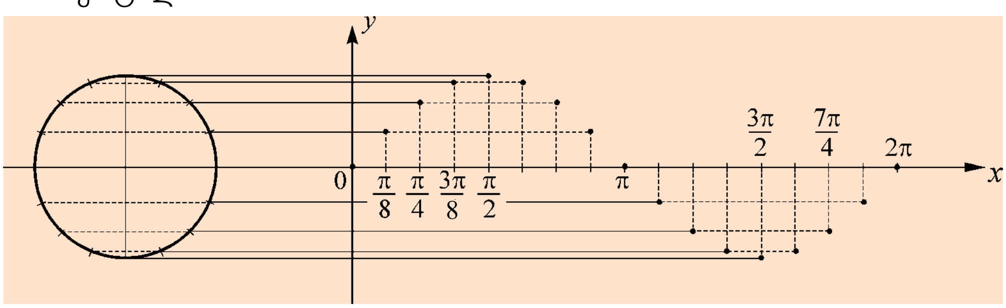
სინუსისა და კოსინუსის გრაფიკების აგებისას ამ თვისებებს გავითვალისწინებთ. მაგალითად, პერიოდულობის გამო საკმარისია გრაფიკები $[0;\ 2\pi)$ შუალედზე ავაგოთ.

ვიწყებთ სინუსის გრაფიკის აგებით. $[0;\ 2\pi)$ შუალედი, ვთქვათ, 16 ტოლ ნაწილად დავყოთ. ამ დაყოფას ერთეულოვანი წრეწირის 16 ტოლ ნაწილად დაყოფა შეესაბამება — კერძოდ, თუ $t=0$, მაშინ მისი შესაბამისია ერთეულოვანი წრეწირის P_0 წერტილი; საზოგადოდ, $[0;\ 2\pi)$-დან აღებული რაიმე t რიცხვის შესაბამისია ამავე წრეწირის P_t წერტილი, რომლის ორდინატი $\sin t$-ს ტოლია.

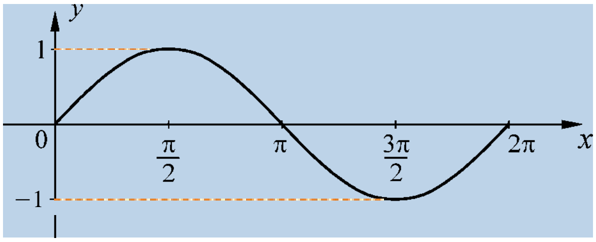


დავიხმაროთ ეს მონაცემები სინუსის გრაფიკის ასაგებად.

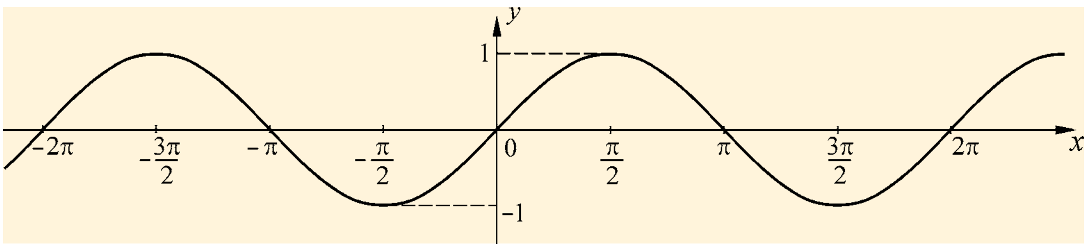
თუ რაიმე P_t წერტილზე გავავლებთ აბსცისათა ღერძის პარალელურ წრფეს, მაშინ $x=t$ წრფესთან მისი გადაკვეთის წერტილის ორდინატიც $\sin t$ იქნება. ასე ავაგებთ x-ის 16-ვე მნიშვნელობისთვის $[0;\ 2\pi)$ შუალედიდან $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის 16 შესაბამის წერტილს.



ფუნქციის თვისებების გათვალისწინებით, შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა $x\in[0;\ 2\pi)$, შემდეგ სურათზეა გამოსახული:



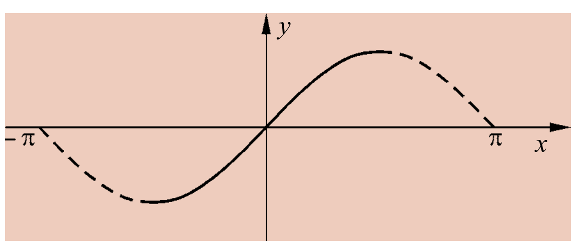
პერიოდულობის გათვალისწინებით, $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის სხვა ნაწილები აგებული წირისგან პარალელური გადატანებით მიიღება (OX ღერძის პარალელური 2π ერთეულის სიგრძის ვექტორებით):



ამ სურათზე გამოსახულ წირს, რომელიც $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს წარმოგვიდგენს, **სინუსოიდა** ეწოდება. სინუსი კენტი ფუნქციაა — შესაბამისად, გრაფიკი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიული წირია.

ახლა გრაფიკის აგების სხვა ხერხი აღვწეროთ:

- იპოვეთ არგუმენტის მნიშვნელობები, რომლებიც ჩვენ მიერ $[0; \frac{\pi}{2}]$ შუალედის დაყოფისას მიღებულ წერტილებს შეესაბამება.
- კალკულატორის გამოყენებით იპოვეთ სინუსის შესაბამისი მნიშვნელობები. დაამრგვალეთ მიღებული ათწილადები მეათედებამდე.
- წარმოადგინეთ მიღებული რიცხვები ცხრილის სახით და იპოვეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე შესაბამისი წერტილები.
- ააგეთ (თქვენი ვარაუდით) გრაფიკის ნაწილი $[0; \frac{\pi}{2}]$ შუალედზე.
- რა ღერძული სიმეტრიით შეიძლება მივიღოთ გრაფიკის ნაწილი $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ შუალედზე? გაითვალისწინეთ: $\sin(\frac{\pi}{2}+t)=\sin(\frac{\pi}{2}-t)$.
- გამოიყენეთ ცენტრული სიმეტრია და ააგეთ გრაფიკი $[-\pi; 0]$ შუალედზე. გაითვალისწინეთ: $\sin(-x)=-\sin x$.



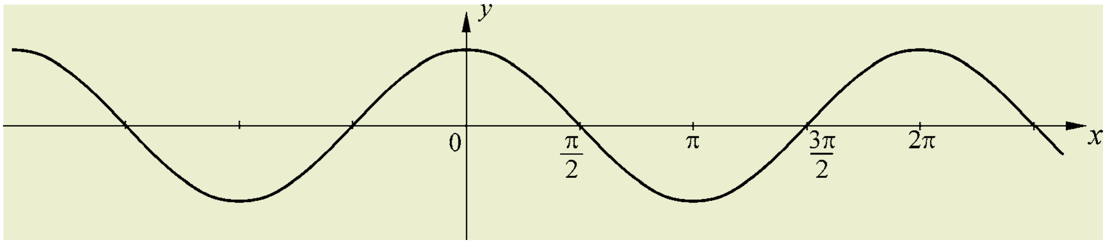
- როგორ მივიღოთ გრაფიკის სხვა ნაწილები? იქნებ გამოვიყენოთ ფუნქციის პერიოდულობის თვისება?

ახლა $y=\cos x$ ფუნქცია განვიხილოთ.

დავიხმაროთ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი და კავშირი სინუსსა და კოსინუსს შორის, რომელიც ნებისმიერი x-სთვის შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

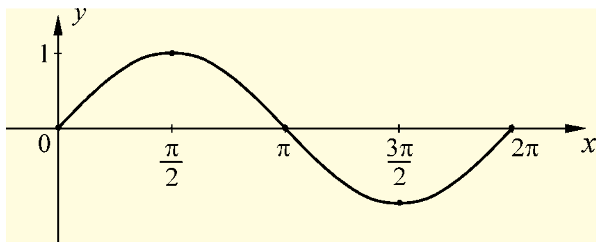
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.$$

ამრიგად, $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი შეიძლება მივიღოთ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით მარცხნივ $\frac{\pi}{2}$ ერთეულით ($\vec{a}(-0{,}5\pi;0)$ ვექტორით). **$y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკია:**



ეს გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ ($x=\pi k$, $k\in Z$ სახის ნებისმიერი წრფის მიმართაც). სიმეტრიულია $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$ სახის ნებისმიერი წერტილის მიმართაც.

სინუსისა და კოსინუსის გრაფიკებზე $[0;\ 2\pi]$ შუალედში გამოვყოთ ე. წ. **საკვანძო წერტილები.**



სურათზე მითითებულია სინუსის გრაფიკის ხუთი საკვანძო წერტილი. ისინი x ღერძზე აღებულ $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, $x=\frac{3\pi}{2}$ და $x=2\pi$ რიცხვებს შეესაბამება.

გრაფიკის x ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია: $x=0$, $x=\pi$ და $x=2\pi$. ამ წერტილებში $\sin x=0$. ეს რიცხვები **სინუსის ნულებია** $[0;\ 2\pi]$ შუალედში.

$x=\frac{\pi}{2}$ სინუსის მაქსიმუმის წერტილია — $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

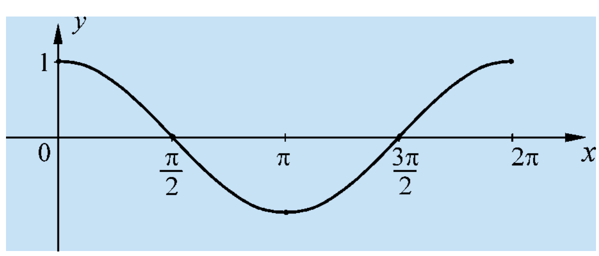
$x=\frac{3\pi}{2}$ სინუსის მინიმუმის წერტილია — $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.

პერიოდულობის გათვალისწინებით, გვაქვს:

სინუსის ნულებია: $x=\pi n$, $n\in Z$.

მაქსიმუმის წერტილებია: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **ამ წერტილებში** $\sin x=1$.

მინიმუმის წერტილებია: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **ამ წერტილებში** $\sin x=-1$.



სურათზე მითითებულია კოსინუსის გრაფიკზე ხუთი საკვანძო წერტილი; ისინი ღერძზე აღებულ $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, $x=\frac{3\pi}{2}$ და $x=2\pi$ რიცხვებს შეესაბამება.

$x=\frac{\pi}{2}$ და $x=\frac{3\pi}{2}$ აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია;

$x=0$ და $x=2\pi$ მაქსიმუმის წერტილებია;

$x=\pi$ მინიმუმის წერტილია.

პერიოდულობის გათვალისწინებით, გვაქვს:

კოსინუსის ნულებია: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z$ და $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z$, ანუ

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z;$$

მაქსიმუმის წერტილებია: $x=2\pi n,\ \ n\in Z$, ამ წერტილებში $\cos x=1$;

მინიმუმის წერტილებია: $x=\pi+2\pi n,\ \ n\in Z$, ამ წერტილებში $\cos x=-1$.

2) ახლა ტანგენსის გრაფიკი ავაგოთ. გავიხსენოთ ტანგენსის ძირითადი თვისებები:

1) **განსაზღვრის არე:** $D(\mathrm{tg})$ არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობის სიმრავლეა, რომლებისთვისაც $\cos x\neq 0$, ანუ $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n)$, $n\in Z$, შუალედების გაერთიანება.

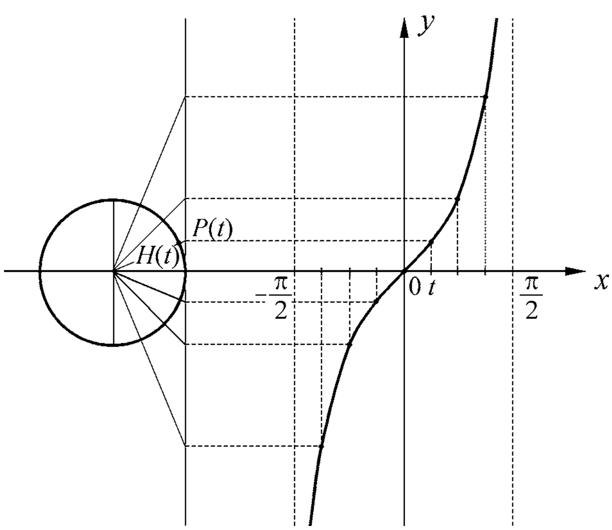
მნიშვნელობათა სიმრავლე: $E(\mathrm{tg})=R$.

2) **ტანგენსი კენტი ფუნქციაა** — ნებისმიერი x-სთვის, რომელიც ეკუთვნის ტანგენსის განსაზღვრის არეს, $\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}x$.

3) **ტანგენსი პერიოდული ფუნქციაა,** უმცირესი დადებითი პერიოდია π — ნებისმიერი x-ისთვის $D(\mathrm{tg})$ სიმრავლიდან: $\mathrm{tg}(x+\pi n)=\mathrm{tg}x$, $n\in Z$.

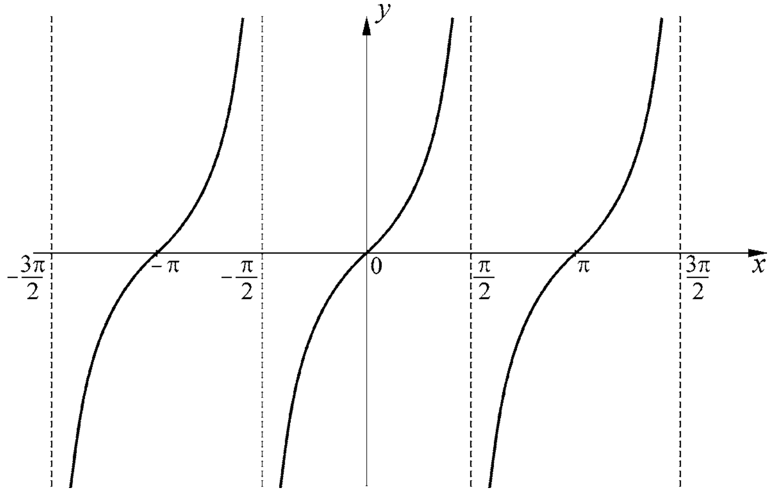
ავაგოთ ტანგენსის გრაფიკი π სიგრძის შუალედზე — $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედზე. გავყოთ ეს შუალედი 8 ტოლ ნაწილად.

$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედის 8 ტოლ ნაწილად დაყოფას ნახევარწრეწირის 8 ტოლ ნაწილად დაყოფა შეესაბამება.



სურათზე ამ შუალედზე ტანგენსის გრაფიკის აგების წესია წარმოდგენილი. პერიოდულობის გამო ტანგენსის გრაფიკი მიიღება აღნიშნული გრაფიკის პარალელური გადატანით x ღერძის გასწვრივ (მარჯვნივ და მარცხნივ) πn, $n \in Z$ ერთეულით.

ტანგენსის გრაფიკს **ტანგენსოიდა** ეწოდება.



ტანგენსის გრაფიკის x ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია $x=\pi n$ ($n \in Z$) წერტილები. ამ წერტილებში $\mathrm{tg}x=0$ — ეს წერტილები ტანგენსის ნულებია.

შევაჯამოთ: გამოვიყენეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები და აღვწერეთ ამ ფუნქციების გრაფიკების აგების ხერხები.

საკვანძო – ძირითადს, მთავარს, არსებითს, მრავალმხრივ საყურადღებოს ნიშნავს. სამხედრო მოქმედებისას ამბობენ ხოლმე; ჯარისკაცებმა საკვანძო პოზიცია დაიკავესო.

ს

სინუსს, კოსინუსსა და ტანგენსს **ძირითად ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს** უწოდებენ. მათ გარდა განიხილავენ კიდევ სამ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციას — სეკანსს, კოსეკანსს და კოტანგენსს.

სეკანსს იმ x რიცხვებისთვის, რომლებისთვისაც $\cos x \neq 0$, ასე განვსაზღვრავთ:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

კოსეკანსს იმ x რიცხვებისთვის, რომლებისთვისაც $\sin x \neq 0$ — ფორმულით:

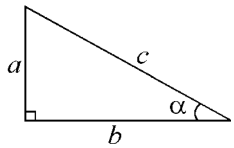
$$\mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

$\mathrm{cosec}\, x$-ს ასეც ჩაწერენ ხოლმე: $\mathrm{csc}\, x$.

კოტანგენსს იმ x რიცხვებისთვის, რომლებისთვისაც, $\sin x \neq 0$ განვსაზღვრავთ ფორმულით:

$$\mathrm{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

მახვილი α კუთხისთვის ექვსი ტრიგონომეტრიული ფუნქცია α მახვილი კუთხის მქონე მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების 6 შეფარდებით განისაზღვრება:



$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\quad \cos\alpha=\frac{b}{c},\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b},$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{b}{a},\quad \sec\alpha=\frac{c}{b},\quad \mathrm{cosec}\alpha=\frac{c}{a}.$$

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 სინუსის გრაფიკი სიმეტრიულია
1) OX ღერძის მიმართ
2) OY ღერძის მიმართ
3) კოორდინატთა სათავის მიმართ
4) I და IV საკოორდინატო მეოთხედების ბისექტრისებზე გამავალი წრფის მიმართ.

2 კოსინუსის გრაფიკი სიმეტრიულია
1) OX ღერძის მიმართ
2) OY ღერძის მიმართ
3) კოორდინატთა სათავის მიმართ
4) I და IV მეოთხედების ბისექტრისებზე გამავალი წრფის მიმართ.

3 სინუსის გრაფიკი x ღერძს კვეთს წერტილებში:
1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ 2) $x=\pi k,\ k\in Z$
3) $x=-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$

4 კოსინუსის გრაფიკი x ღერძს კვეთს წერტილებში:
1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ 2) $x=\pi k,\ k\in Z$
3) $x=2\pi k,\ k\in Z$ 4) $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z.$

5 სინუსის გრაფიკი y ღერძს კვეთს
1) (0; 1) წერტილში 2) (0; −1) წერტილში
3) (0; 0) წერტილში 4) (1; 1) წერტილში.

6 კოსინუსის გრაფიკი y ღერძს კვეთს

1) (0; 1) წერტილში 2) (0; −1) წერტილში
3) (0; 0) წერტილში 4) (1; 1) წერტილში.

7 ტანგენსის გრაფიკი x ღერძს კვეთს წერტილებში

1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ 2) $x=-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$
3) $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ 4) $x=\pi k,\ k\in Z.$

8 ტანგენსის გრაფიკი სიმეტრიულია

1) x ღერძის მიმართ 2) y ღერძის მიმართ
3) კოორდინატთა სათავის მიმართ
4) I და IV მეოთხედების ბისექტრისებზე გამავალი წრფის მიმართ.

ამოხსენით ამოცანები

9 იპოვეთ სინუსოიდაზე OY ღერძიდან $\frac{5\pi}{6}$-ით დაშორებული წერტილების კოორდინატები.

10 $(0;\ \frac{\sqrt{3}}{2})$ წერტილზე გაავლეთ OX ღერძის პარალელური წრფე. იპოვეთ ამ წრფის სინუსოიდასთან გადაკვეთის იმ წერტილების კოორდინატები, რომელთა აბსცისები $[0;\ 2\pi]$ შუალედს ეკუთვნის.

11 იპოვეთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ და $x\in[0;\ 2\pi]$ — იპოვეთ $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ განტოლების ფესვები მითითებულ შუალედში.

12 გამოიყენეთ $y=\sin x$-ის გრაფიკი და იპოვეთ ამ გრაფიკის $y=\frac{1}{2}$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისები, როცა $x\in[0;\ 2\pi]$.

- დაასაბუთეთ, რომ x-ის მიმართ $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ფესვები, რომლებიც ეკუთვნის $[0;\ 2\pi]$ შუალედს, არის $x=\frac{\pi}{6}$ და $x=\frac{5\pi}{6}$.
- გამოიყენეთ პერიოდულობა და დაწერეთ ფორმულა, რომლითაც შეიძლება ვიპოვოთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\sin x=\frac{1}{2}$ — რომლითაც $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ფესვები მოიცემა.

13 შეადგინეთ და ამოხსენით წინა ამოცანის ანალოგიური ამოცანა $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ განტოლებისთვის.

14 კვეთს თუ არა $y=2$ წრფე $y=\sin x$ ან $y=\cos x$ ფუნქციების გრაფიკებს? პასუხი დაასაბუთეთ.

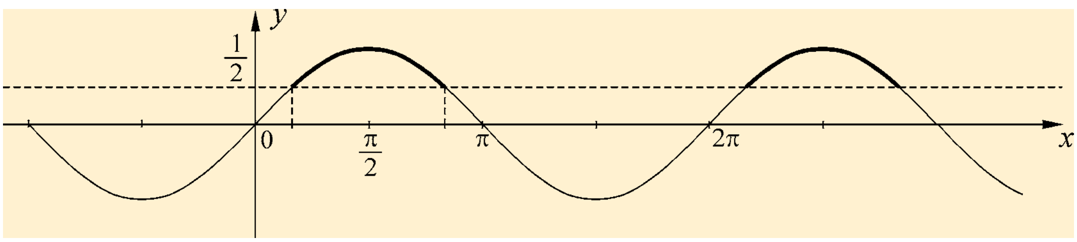
15 კვეთს თუ არა $y=a$ წრფე (a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია) $y=\text{tg}x$ ფუნქციის გრაფიკს?

- იმსჯელეთ გრაფიკის მიხედვით.
- ჩამოაყალიბეთ დასკვნები.

16 იპოვეთ $\cos x=\frac{1}{2}$ განტოლების ფესვები.

- ჯერ იპოვეთ $[-\pi;\ \pi]$ შუალედიდან ყველა ის x რიცხვი, რომლისთვისაც $\cos x=\frac{1}{2}$.
- შეეცადეთ, დაწეროთ ფორმულა $\cos x=\frac{1}{2}$ განტოლების ფესვების საპოვნელად (გამოიყენეთ პერიოდულობა).

17

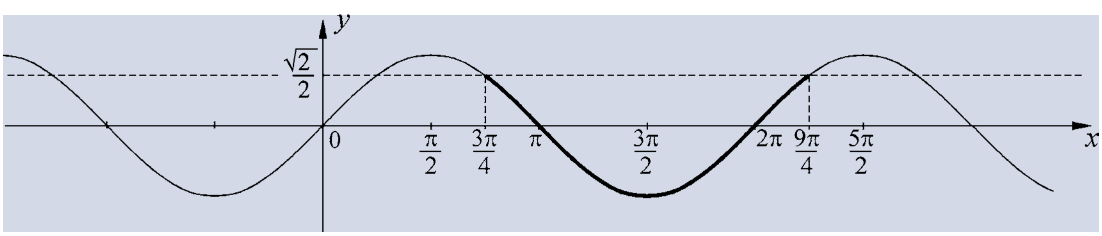


- გამოიყენეთ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი და დაწერეთ $[0;\ 2\pi]$ შუალედიდან x-ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც $\sin x>\frac{1}{2}$.
- გამოიყენეთ პერიოდულობა და იპოვეთ ყველა ის შუალედი, რომლებითაც $\sin x>\frac{1}{2}$ უტოლობის ამონახსნები მოიცემა (x-ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობა მიიღება).

18 გაავლეთ სინუსოიდის სიმეტრიის რომელიმე ღერძი.

- იპოვეთ ამ ღერძისა და სინუსოიდის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.
- დაწერეთ ამ ღერძის განტოლება.
- დაწერეთ ფორმულა, რომლითაც სიმეტრიის ნებისმიერი ღერძი მოიცემა.

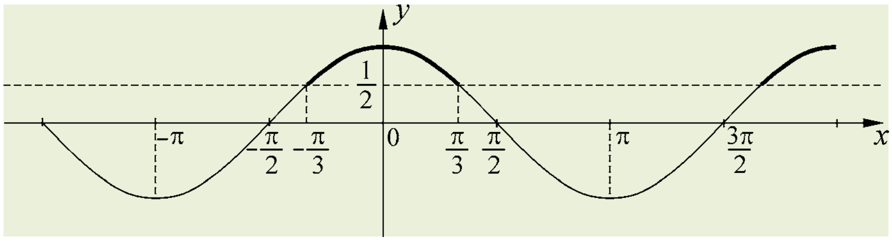
19



- სინუსოიდის მიხედვით იპოვეთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ შუალედიდან, რომლებისთვისაც $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

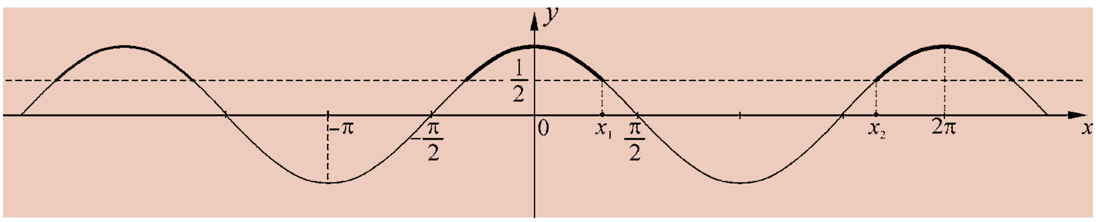
• გამოიყენეთ პერიოდულობა და იპოვეთ ყველა შუალედი, რომლებითაც $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ უტოლობის ამონახსნები მოიცემა.

20



• $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით იპოვეთ $\cos x\geq\frac{1}{2}$ უტოლობის ამონახსნები, რომლებიც $[-\pi;\ \pi]$ შუალედს ეკუთვნის. პასუხი წარმოადგინეთ შუალედის სახით.

21



• იპოვეთ ყველა შუალედი, რომლებითაც $\cos x\geq\frac{1}{2}$ უტოლობის ამონახსნები მოიცემა.

• იპოვეთ $y=\frac{1}{2}$ და $y=\cos x$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების აბსცისები, რომლებიც $[0;\ 2\pi]$ შუალედს ეკუთვნის.

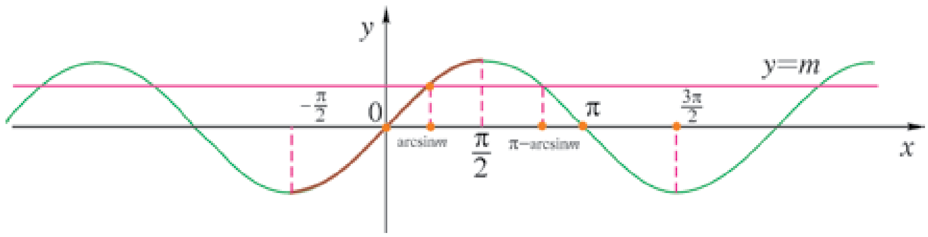
• იპოვეთ $\cos x<\frac{1}{2}$ უტოლობის ამონახსნები, რომლებიც $[0;\ 2\pi]$ შუალედს ეკუთვნის (ამონახსნების სიმრავლე, თუ შესაძლებელია, წარმოადგინეთ შუალედის სახით).

• იპოვეთ ყველა შუალედი, რომლებითაც $\cos x<\frac{1}{2}$ უტოლობის ამონახსნები მოიცემა.

1.10 ტრიგონომეტრიული განტოლებები

1) $\sin x = m$ განტოლება. არკსინუსი

ვთქვათ, m მოცემული რიცხვია და დასმულია ამოცანა — ვიპოვოთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლის სინუსი m-ის ტოლია, ანუ — ამოვხსნათ $\sin x = m$ განტოლება. ამ ამოცანის რამდენიმე კერძო შემთხვევა წინა პარაგრაფში განვიხილეთ, ვიყენებდით სინუსის გრაფიკს და სინუსის თვისებებს.



განტოლების ამოხსნა შეიძლება დავუკავშიროთ $y=\sin x$ და $y=m$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების პოვნის საკითხს.

- თუ $|m|>1$, მაშინ, ცხადია, $y=m$ წრფეს საერთო წერტილი არა აქვს $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკთან და ამ შემთხვევაში განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

- თუ $|m|\le 1$, მაშინ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში (ამ შუალედში სინუსი ზრდადი ფუნქციაა) $y=m$ წრფე სინუსის გრაფიკს ერთ წერტილში კვეთს, არსებობს ერთადერთი რიცხვი $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, რომლის სინუსი m-ის ტოლია, მას **m რიცხვის არკსინუსი** ეწოდება — $\arcsin m$.

ამრიგად, **თუ $|m|\le 1$, $\arcsin m \in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\arcsin m)=m$.**

მაგალითად, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, რადგან $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ და $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, რადგან $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, რადგან $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

π სიგრძის მომდევნო შუალედშიც — $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედში ერთადერთი x რიცხვი არსებობს, რომლის სინუსი არის m-ის ტოლი (ამ შუალედში სინუსი კლებადია).

დაუკვირდით სურათს, გამოიყენეთ სინუსის თვისებები და აჩვენეთ, რომ ეს რიცხვი არის $\pi-\arcsin m$.

მაშასადამე, 2π სიგრძის შუალედში გვაქვს ამონახსნები:

$$x_1=\arcsin m,$$

$$x_2=\pi-\arcsin m.$$

როცა $m=1$, ისინი ერთმანეთს ემთხვევა.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ სინუსი პერიოდული ფუნქციაა და მისი პერიოდი არის 2π, მაშინ შეიძლება დავწეროთ

$$\sin x=m \qquad (1)$$

განტოლების ყველა ამონახსნის ფორმულები:

$$x=\arcsin m+2\pi k \qquad (2)$$

$$x=\pi-\arcsin m+2\pi k,\ k\in Z \qquad (3)$$

ამონახსნების ეს ფორმულები შეიძლება ასეც ჩავწეროთ:

$$\boldsymbol{x=(-1)^k\arcsin m+\pi k,\ k\in Z} \qquad (4)$$

როცა k ლუწია მივიღებთ ყველა ამონახსნს, რომელიც ზემოთ (2) ფორმულითაა წარმოდგენილი; როცა k კენტია — მივიღებთ (3) ფორმულით წარმოდგენილ ამონახსნებს.

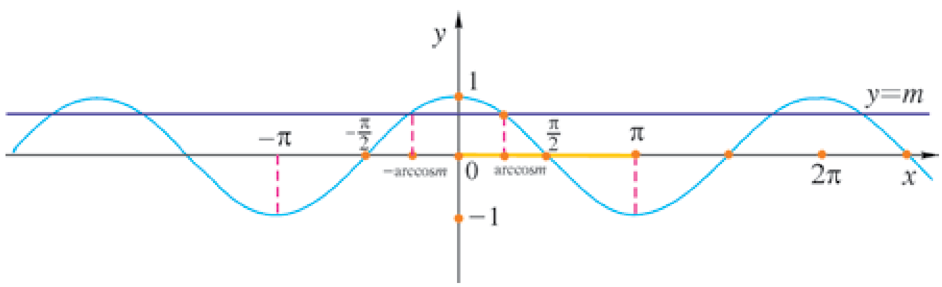
2) $\cos x=m$ განტოლება. არკკოსინუსი.

ვთქვათ, m მოცემული რიცხვია. დავსვათ ამოცანა — ვიპოვოთ

$$\cos x=m \qquad (1)$$

განტოლების ამონახსნების სიმრავლე, ვიპოვოთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლის კოსინუსი m-ის ტოლია.

ამჯერად კოსინუსის თვისებები და მისი გრაფიკი გამოვიყენოთ.



განტოლების ამოხსნა შეიძლება $y=\cos x$ და $y=m$ ფუნქციების გადაკვეთის წერტილების პოვნას დავუკავშიროთ.

თუ $|m|>1$, მაშინ, ცხადია, $y=m$ წრფეს საერთო წერტილი არა აქვს $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკთან და ამ შემთხვევაში განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

თუ $|m|\le 1$, მაშინ $[0;\ \pi]$ შუალედში (ამ შუალედში კოსინუსი კლებადია) $y=m$ წრფე კოსინუსის გრაფიკს ერთ წერტილში კვეთს, არსებობს ერთადერთი რიცხვი $[0;\ \pi]$ შუალედში, რომლის კოსინუსი m-ის ტოლია; მას m **რიცხვის არკკოსინუსი** ეწოდება — $\arccos m$.

ამრიგად, **თუ $|m|\le 1$, მაშინ $\arccos m\in[0;\ \pi]$ და $\cos(\arccos m)=m$.**

მაგალითად, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, რადგან $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ და $\frac{\pi}{3}\in[0;\ \pi]$,

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$, რადგან $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ და $\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$

$\arccos(-1)=\pi$, რადგან $\cos\pi=-1$ და $\pi\in[0;\pi]$.

$[-\pi;0]$ შუალედშიც (1) განტოლებას ერთი ამონახსნი აქვს — $-\arccos m$. მაშასადამე, 2π სიგრძის შუალედში — $[-\pi;\pi]$ შუალედში გვაქვს ამონახსნები:

$$x_1=\arccos m,\ x_2=-\arccos m.$$

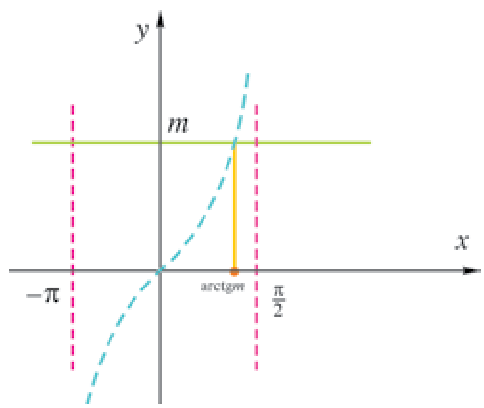
თუ გავითვალისწინებთ კოსინუსის პერიოდულობას, მაშინ შეიძლება დავწეროთ ყველა ამონახსნის ფორმულები:

$$x=\pm\arccos m+2\pi k,\ k\in Z.$$

3) $\mathrm{tg}x=m$ განტოლება. არკტანგენსი

ტანგენსი პერიოდული ფუნქციაა, მისი უმცირესი დადებითი პერიოდი არის π.

ნებისმიერი m რიცხვისთვის $y=tgx$ ფუნქციის გრაფიკს $y=m$ წრფე $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში ერთ წერტილში კვეთს; არსებობს ერთადერთი რიცხვი ამ შუალედიდან, რომლის ტანგენსი არის m, ამ რიცხვს **m რიცხვის არკტანგენსი** ეწოდება — **$\mathrm{arctg}m$.**



მაგალითად,

$\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, რადგან $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$ და $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

$\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, რადგან $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ და $-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

მაშასადამე, π სიგრძის შუალედში $\mathrm{tg}x=m$ განტოლების ამონახსნია $\mathrm{arctg}m$.

თუ გავითვალისწინებთ ტანგენსის პერიოდულობას, მაშინ

$$\mathrm{tg}x=m$$

განტოლების ყველა ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$x=\mathrm{arctg}m+\pi k,\ k\in Z.$$

შევაჯამოთ: ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებებისა და გრაფიკების გამოყენებით მივიღეთ ფორმულები, რომლებითაც $\sin x=m$, $\cos x=m$ და $\mathrm{tg}x=m$ განტოლებების ყველა ამონახსნს წარმოვადგენთ. შესაბამისად გვაქვს ფორმულები:

$x=(-1)^k \arcsin m+\pi k,\ k\in Z$

arcsin$m$ არის რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედს და რომლის სინუსი არის m. აქ ვგულისხმობთ, რომ $|m|\leq 1$.

$x=\pm\arccos m+2\pi k,\ k\in Z$

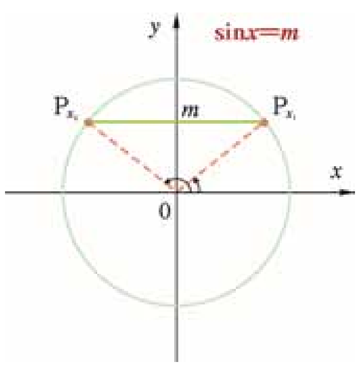
arccos$m$ არის რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის $[0;\ \pi]$ შუალედს და რომლის კოსინუსი არის m. აქ ვგულისხმობთ, რომ $|m|\leq 1$.

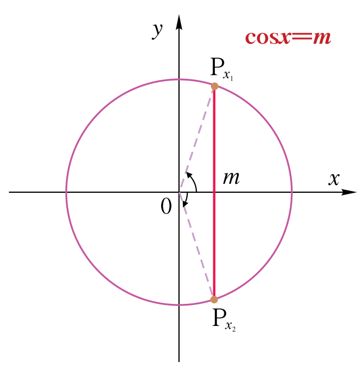
$x=\mathrm{arctg}\, m+\pi k,\ k\in Z$

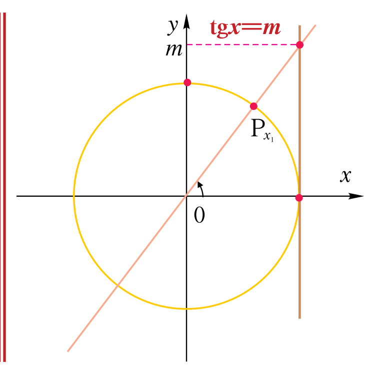
arctg$m$ არის რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედს და რომლის ტანგენსი არის m.

?

1. რა რიცხვია arcsin$m$?
2. რა რიცხვია arccos$m$?
3. რა რიცხვია arctg$m$?
4. m-ის რა მნიშვნელობებისთვის არა აქვს ამონახსნი sinx=m და cosx=m განტოლებებს?
5. არსებობს თუ არა m-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც tg$x=m$ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი?







ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით აღწერეთ

$$\sin x=m,\ \cos x=m,\ \mathrm{tg}\, x=m$$

განტოლებების ამონახსნების პოვნის პროცესი. გაინაწილეთ სამუშაო, განიხილეთ შესაძლო შემთხვევები.

ა

შეარჩიეთ სწორი პასუხი

1 თუ $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, მაშინ $x=$

1) $\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{2}$.

2 თუ $\sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, მაშინ $x=$

1) $-\frac{\pi}{4}$ 2) $-\frac{\pi}{6}$ 3) $-\frac{\pi}{2}$ 4) $-\frac{\pi}{3}$.

3 თუ $\sin x=-\frac{1}{2}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, მაშინ $x=$

1) $-\frac{\pi}{6}$ 2) $-\frac{\pi}{3}$ 3) $-\frac{\pi}{4}$ 4) $-\frac{\pi}{2}$.

4 თუ $\sin x=1$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, მაშინ $x=$

1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{2}$.

5 თუ $\cos x=\frac{1}{2}$, $x\in[0;\pi]$, მაშინ $x=$

1) $\frac{2\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{3\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{6}$.

6 თუ $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in[0;\pi]$, მაშინ $x=$

1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{5\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) $-\frac{\pi}{6}$.

7 თუ $\cos x=0$, $x\in[0;\pi]$, მაშინ x არის

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\frac{3\pi}{2}$ 3) $\frac{5\pi}{2}$ 4) $\frac{\pi}{6}$.

8 თუ $\mathrm{tg}x=-1$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, მაშინ x არის

1) $-\frac{\pi}{6}$ 2) $-\frac{\pi}{4}$ 3) $-\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{5\pi}{4}$.

9 თუ $\mathrm{tg}x=\sqrt{3}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, მაშინ x არის

1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{3\pi}{4}$.

ამოხსენით ამოცანები

10 იპოვეთ:

ა) $\arcsin 1$; ბ) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

გ) $\arcsin 0$; დ) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

11 იპოვეთ:

ა) $\arccos\frac{1}{2}$; ბ) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

გ) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; დ) $\arccos 1$.

12 იპოვეთ:

ა) $\mathrm{arctg}(-1)$; ბ) $\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

გ) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})$; დ) $\mathrm{arctg}1$.

13 აქვს თუ არა აზრი გამოსახულებას:

ა) $\arcsin\pi$; ბ) $\arcsin\frac{\pi}{3}$; გ) $\arcsin\sqrt{5}$;

დ) $\mathrm{arctg}\sqrt{5}$; ე) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$; ვ) $\arcsin 1{,}6$;

ზ) $\arccos\pi$; თ) $\arccos(-\sqrt{3})$; ი) $\arcsin\frac{3}{7}$?

14 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\arcsin 0+\arccos 0$;

გ) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}$; დ) $\arcsin(-1)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ე) $\mathrm{arctg}1-\mathrm{arctg}\sqrt{3}$; ვ) $\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\mathrm{arctg}1$;

ზ) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ამოხსენით განტოლება (15-21)

15 ა) $\cos x=\frac{1}{2}$; ბ) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16 ა) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; ბ) $\sqrt{2}\cos x-1=0$;
გ) $2\cos x+\sqrt{2}=0$; დ) $2\cos x-1=0$.

17 ა) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\sin x=\frac{1}{2}$; გ) $\sin x=-\frac{1}{2}$; დ) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18 ა) $2\sin x-\sqrt{3}=0$; ბ) $2\sin x+\sqrt{3}=0$; გ) $2\sin x-1=0$; დ) $2\sin x+\sqrt{2}=0$.

19 ა) $\mathrm{tg}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; ბ) $\mathrm{tg}x=1$; გ) $\mathrm{tg}x=-1$; დ) $\mathrm{tg}x=\sqrt{3}$.

20 ა) $\mathrm{tg}x+\sqrt{3}=0$; ბ) $\mathrm{tg}x-\sqrt{3}=0$; გ) $3\mathrm{tg}x-3=0$; დ) $4\mathrm{tg}x+4=0$.

21 ა) $\sin x=-0{,}6$; ბ) $\cos x=0{,}3$; გ) $\mathrm{tg}x=2{,}5$; დ) $\mathrm{tg}x=-3{,}5$.

22 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-1$; ბ) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$;
გ) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-1$; დ) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$.

23 a-ს რა მნიშვნელობებისთვის აქვს ამონახსნი განტოლებას?
ა) $2\cos x-a^2+1=0$; ბ) $\sin x=2a+1$;
გ) $3\mathrm{tg}x=a$; დ) $3\sin x=a^2-1$.

24 ამოხსენით განტოლება და იპოვეთ მისი ამონახსნი მითითებულ შუალედში:

ა) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-1,\quad \pi<x<\frac{3\pi}{2}$; ბ) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x\in\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$;
გ) $2\sin^2x=1,\ x\in\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$; დ) $\sin^2x-\cos^2x=0,\quad x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

25 მოცემულია განტოლებები:

I. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}$; II. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$.
იპოვეთ თითოეული განტოლებისთვის:
ა) უმცირესი დადებითი ამონახსნი;
ბ) ამონახსნები, რომლებიც ეკუთვნის $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედს;
გ) ამონახსნები, რომლებიც ეკუთვნის $\left(-\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედს.