გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე
ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი

მათემატიკა

მასწავლებლის წიგნი

X კლასი

I სემესტრი

გრიფმინიჭებულია საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს მიერ 2022 წელს

გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი 2022

გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე,
ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი

მათემატიკა

X კლასი

I სემესტრი

მასწავლებლის წიგნი

გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი 2022
I გამოცემა

რედაქტორი **თეიმურაზ ვეფხვაძე**

დამკაბადონებელი **ვიოლა ტუღუში**

ტექსტის ამკრეფი **მართა წიკლაური**

ISBN 978-9941-31-471-1

გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი, ილია ჭავჭავაძის გამზ. 5. ტელ.: 2-25 05 22

www.intelekti.ge info@intelekti.ge

INTELEKTI PUBLISHING
5 Ilia Chavchavadze Ave., Tbilisi, Georgia. Tel.: (995 32) 2-25 05 22

სარჩევი

III თავი. ფარდობა, პროპორცია, პროცენტი

IV თავი. სტატისტიკა და ალბათობა

მე-10 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოს კონცეფცია

მოსწავლის სახელმძღვანელო აგებულია საშუალო საფეხურის მათემატიკის ახალი სტანდარტის მოთხოვნათა სრული შესაბამისობით. იგი ეყრდნობა საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს მიერ შემუშავებულ დოკუმენტს („საშუალო საფეხურის პოლიტიკური ხედვის დოკუმენტი“, დამტკიცებულია მინისტრის მიერ 2021 წელს 17 დეკემბერის ბრძანებით). ვითვალისწინებთ, რომ სტანდარტით შემოთავაზებული კონცეფციის მთავარი ელემენტი დიფერენცირებული სწავლებაა; მან უნდა გადაჭრას ყველა ის პრობლემა, რომელიც საშუალო საფეხურის მისიისა და მიზნების აღსრულებასთან არის დაკავშირებული. ანუ, ის მოსწავლეს უნდა დაეხმაროს:

- გააკეთოს ინფორმირებული არჩევანი
- მოემზადოს უმაღლესი განათლებისთვის, ან შრომით ბაზარზე გასასვლელად
- განივითაროს XXI საუკუნისთვის საჭირო „კომპეტენციები“

„საშუალო საფეხურის პოლიტიკური ხედვის დოკუმენტი“, შემუშავებულია საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს მიერ პროგრამის „Promoting quality education for all children. Although improving the National Curriculum for grades 11-12“ ფარგლებში გაეროს ბავშვთა ფონდისა და ესტონეთის განათლებისა და ახალგაზრდობის საბჭოსთან თანამშრომლობით.

ჩვენი შემოქმედებითი თავისუფლება მორგებულია ახალი სტანდარტის მოთხოვნებზე, რომლებიც მათემატიკის სწავლა-სწავლების მიზნებთან, მეთოდიკურ ორიენტირებთან და შეფასებებთან არის დაკავშირებული. მნიშვნელოვანია მე-10 კლასის I სემესტრში შემოთავაზებული სამიზნე ცნებების შესაბამისი შინააარსის შერჩევა და საშუალო საფეხურის მისიისა და მიზნების ხელშეწყობა. ამ სემესტრში რეკომენდებული მასალით გრძელვადიანი მიზნებიცაა განსაზღვრული.

ახალი ეროვნული სასწავლო გეგმის მთავარი სამიზნე სასწავლო გეგმის შინაარსობრივი მხარე გახდა.

შემოთავაზებული კონცეფციის მთავარი ელემენტი — დიფერენცირებული სწავლება — ჩვენი სახელმძღვანელოს შინაარსის განსაზღვრის მთავარ ელემენტად იქცა; წარმოდგენილია სავარჯიშოთა მრავალფეროვანი სისტემა; ყველა მოსწავლეს საკუთარი შესაძლებლობების სრული გამოვლენის საშუალება ეძლევა; სახელმძღვანელო განკუთვნილია აკადემიური მზაობის ყველა დონისთვის; ბევრია მარტივი მაგალითები, მაგალითად, მოქმედებები მთელ და წილად რიცხვებზე, ამოცანები პროპორციულ სიდიდეებზე, პროცენტებზე; ახლის შემოტანის პროცესი შესწავლილი მასალის ხანგრძლივ გამეორებას ეყრდნობა; მიმდინარეობს ცოდნის გამეორების, გაღრმავებისა და გამყარების პროცესი, რომელშიც ყველა მოსწავლე მონაწილეობს. სხვადასხვა სირთულის ამოცანები საშუალებას აძლევს მასწავლებელს, ყველა მოსწავლე ჩართოს სწავლის პროცესში, მიაწოდოს მათ შესაბამისი სირთულის ამოცანები — გაითვალისწინოს დიფერენცირებული მიდგომის მოთხოვნები.

ამასთანავე, მათემატიკის სწავლებამ თავისი წვლილი უნდა შეიტანოს შემოქმედებითი უნარებისა და ღირებულებების განვითარებასა და ჩამოყალიბებაში; სახელმძღვანელო უნდა ეხმარებოდეს მასწავლებელს სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული, სტანდარტით განსაზღვრული საკითხების გადაცემაში; მათი უკეთ გააზრების საქმესა და დიფერენცირებული სწავლების მოთხოვნებს ემსახურება კომპლექსური დავალებების მრავალფეროვანი სისტემა, რომელიც სახელმძღვანელოშია შემოთავაზებული.

ამ დავალებებზე მუშაობისას თითოეული მოსწავლე, თავისი შესაძლებლობების ფარგლებში, ქმნის შემოქმედებით პროდუქტს და ადასტურებს საკუთარ ცოდნას საგნობრივ საკითხებთან მიმართებით. მასწავლებელს საშუალება ეძლევა ინდივიდუალურად მიუდგეს მოსწავლეს. მთელი კლასი შეიძლება ერთსა და იმავე საგნობრივ საკითხზე მუშაობდეს, მაგრამ ასრულებდეს სხვადასხვა კომპლექსურ დავალებას, მოსწავლეები ქმნიდნენ საყურადღებო კომპონენტებს ინდივიდუალური საჭიროებების მიხედვით. მაგალითად, უკვე I თავში, როცა ვიმეორებთ მარტივ რიცხვებს, მოსწავლეებს ვთავაზობთ კომპლექსურ დავალებას მარტივ რიცხვთა ცხრილების შედგენის შესახებ. აქ დასაბუთების ჩატარება ყველა მოსწავლეს არ შეუძლია, მაგრამ მთელ რიცხვებთან დაკავშირებული კომპლექსური დავალების შესრულებას, რომელიც სასაათო ზოლებს უკავშირდება, დაბალი მზაობის მოსწავლეებიც შეძლებენ. აქვე აღსანიშნავია, რომ დავალება პასუხობს კომპლექსური დავალების არსს — წარმოადგენს შინაარსიან, ცხოვრებისეულ სიტუაციებთან დაკავშირებულ დავალებას, რომლის შესრულება უნდა მოითხოვდეს ფუნქციურ კონტექსტში სხვადასხვა ცოდნათა ინტეგრირებულ გამოყენებას.

მაგალითად, კომპლექსური დავალება — „დასაბუთების ხერხები“ — ეხება მათემატიკის სხვადასხვა ნაწილში, ყოველდღიურ ცხოვრებაში დასაბუთების სხვადასხვა ხერხის გამოყენებას, მოთხოვნილია გეომეტრიული და ალგებრული დასაბუთებების ინტეგრირებული შესწავლა (ირაციონალურობა და მონაკვეთების არათანაზომადობა). ახალია ლოგიკის ელემენტების გადმოცემა.

X კლასის I სემეტრის მასალა, ძირითადად, გავლილი მასალის გამეორებასთან ერთად შეიცავს ახალ თემებს. მოსწავლეები ემზადებიან უმაღლესი განათლების მისაღებად, ან შრომით ბაზარზე გასასვლელად არჩევანის გასაკეთებლად; თუმცა, მნიშვნელოვანია უნივერსალურად საჭირო კომპეტენციების დაუფლებაზეც მუშაობა. ამას ემსახურება სპეციალური თავი, რომელიც გამონათქვამთა ლოგიკის სახითაა წარმოდგენილი. ამ ნაწილის გადმოცემისას, გავითვალისწინეთ ჩვენი საზოგადოების გამოცდილება ზოგადი უნარების ტესტებთან დაკავშირებით. ვიზიარებთ ამ ტესტებში წარმოდგენილ კონცეფციას, როცა ლოგიკაში აბსტრაქციის შეტანა ლოგიკური ცვლადების შემოტანის ნაცვლად ისეთი გამონათქვამების ხარჯზე ხდება, რომელთა ჭეშმარიტება ან მცდარობა ჩვენ დაშვებაზეა დამოკიდებული (შინაარსისგან აბსტრაქციის დროს, ზოგჯერ, წარმოიშვება წინადადებები, რომლებიც არსებული ობიექტების მოგონილ თვისებებს ეხება. მაგალითად, „ყველა ვეფხვი ჭრელია“, „ყველა ძაღლი ავია“ და ა.შ.)

ფართოდ გამოიყენება ცნებებს შორის მიმართებების თვალსაჩინო წარმოდგენა და მათი საშუალებით სილოგიზმების განხილვა. სხვა თემების გავლა — ალბათობა, სტატისტიკა, რიცხვები, სიმრავლეები, პროპორცია, პროცენტი — ცოდნის გამეორებით, გამყარებითა და გაღრმავებით მიმდინარეობს. მაგალითად, რიცხვების გამეორებისას ამ ცნების გაფართოების ალგებრული თვალსაზრისით ვსარგებლობთ: ნატურალური რიცხვები → მთელი რიცხვები → რაციონალური რიცხვები → ნამდვილი რიცხვები. ყოველი სიმრავლის განხილვას თან ახლავს ამოცანები სხვადასხვა შესაძლებლობის მქონე ყველა მოსწავლისთვის. თუმცა, ვიზრუნეთ ზოგიერთი საკითხი უფრო ღრმად განვიხილოთ, მაგალითად, შევეხოთ არითმეტიკის ძირითად თეორემას ნატურალურ რიცხვთა

კანონიკური დაშლის შესახებ. შეიძლება ვთქვათ, რომ გვაქვს „ბევრი ძველი“ საკითხი და დამატებით — „არცთუ ბევრი ახალიც“. ვითვალისწინებთ, რომ მე-10 კლასი საშუალო სკოლის სწავლების მესამე საფეხურის პირველი ეტაპია და ამ ეტაპის დასაწყისის (I სემესტრი) შემდეგ ხდება არჩევითი საგნების არჩევა და მომავლის კონტურების განსაზღვრა; მოსწავლეებმა უნდა მიიღონ გამოცდილება, რომელიც ხელს შეუწყობს უკეთ გაერკვნენ თავიანთ ორიენტირებსა და ინტერესებში.

პირველი სემესტრის შინაარსიც მათემატიკის ერთიანობის სულისკვეთებითა და პრაქტიკული გამოყენებების წამოწევით ხასიათდება; გეომეტრიული მასალა ინტეგრირებულია ლოგიკის ელემენტებში (დამტკიცებული სასწავლო პროგრამის მიხედვით I სემესტრში გეომეტრია ცალკე არ არის წარმოდგენილი); მაგალითები გეომეტრიიდან გვეხმარება ავხსნათ ცნებებს შორის მიმართებები, ლოგიკური კავშირები. მნიშვნელოვანია ფინანსური მათემატიკის ელემენტების ჩართვა — წარმოდგენილია ამოცანათა მრავალფეროვანი სისტემა მარტივი და რთული პროცენტის დარიცხვის წესის გამოყენებაზე.

მათემატიკას წარმოვადგენთ, როგორც ზოგადსაკაცობრიო კულტურის ნაწილს. ამას ხელს უწყობს შინაარსში ორგანულად ჩართული, ემოციურად მდიდარი ეპიზოდები მეცნიერების ისტორიიდან, რომლებიც მოსწავლეებს იმ ადამიანთა სახელებს აცნობს, რომლებიც მეცნიერებას ქმნიდნენ. ეს უკავშირდება მათემატიკის სწავლების ერთ-ერთ პრინციპს — სწავლისადმი ინტერესის გაღვივების პრინციპს. ეს ინტერესი, სხვა სტიმულებთან ერთად, მკვეთრად ზრდის მეცადინეობების ნაყოფიერებას. მათემატიკით დაინტერესებას აძლიერებს მოსწავლეებთან ერთად მათემატიკის იდეებისა და მეთოდების სილამაზის აღმოჩენა; მით უმეტეს, როცა კომპლექსური დავალებების ნაწილი მოსწავლეებისგან მათემატიკური ცნებების წარმოშობისა და განვითარების ისტორიული მიმოხილვის მოძიებასა და წარმოდგენას მოითხოვს. მოსწავლეები თავად არიან მათემატიკურ აღმოჩენათა მოძიებისა და წარმოდგენის ავტორები. ევკლიდეს ალგორითმი, მარტივ რიცხვთა თვისებები ევკლიდეს „საწყისებში“ (13 წიგნისგან შედგენილი მათემატიკური თხზულება, რომელიც ძველი წელთაღრიცხვის მე-4 საუკუნეში შეიქმნა) იყო გადმოცემული და მათი შესწავლა დღესაც აქტუალურია. ალგორითმის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი სახე ციკლური ალგორითმია და იგი ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით კარგად აიხსნება.

უნდა აღინიშნოს, რომ ყოველი ახალი საკითხის ახსნა ინტუიციურ დონეზე, პრაქტიკასთან მიმართებით და თვალსაჩინოების გამოყენებით იწყება. თუმცა შემდეგში ვცდილობთ, სიმკაცრის გარკვეული დონის შენარჩუნებით, ისინი ფორმალური დასაბუთებებითაც გავამაგროთ. თვალსაჩინოება, ხშირად, მეტ ინფორმაციას შეიცავს, ვიდრე სიტყვები, თვალსაჩინო წარმოდგენებით მიღებული ინფორმაცია საშუალებას გვაძლევს უფრო სრულად აღვიქვათ საკითხი, ვიფიქროთ, გამოვთქვათ ვარაუდი, დასკვნები გავაკეთოთ. ყველა მსჯელობა, დასაბუთება, თვალსაჩინოება **სამიზნე ცნებების** უკეთ გააზრებისკენ არის მიმართული. ამ პროცესის წარმართვის საქმეში **საკვანძო შეკითხვების** სისტემა გვეხმარება.

მოსწავლეთა მათემატიკური განსწავლულობის შეფასებისას, ჩამოყალიბებული მოთხოვნების (იხ. მაგ., [43]) შესაბამისად ვცდილობთ სახელმძღვანელოს საშუალებით იმ უნარების განვითარებას, რომლებიც მათემატიკური ცოდნის მრავალფეროვან ცხოვრებისეულ სიტუაციებში გამოყენებებთანაა დაკავშირებული. ამ მოთხოვნების შესაბამისად, გვხვდება სავარჯიშოები, რომელთა პასუხები ე.წ. „ორობითი ლოგიკის“ ჩარჩოებში არ თავსდება. დიდი ყურადღება ეთმობა ე.წ. „სტრუქტურირებულ სავარჯიშოებს“, როცა ამოცანას მოსდევს კითხვათა სისტემა, რომელშიც ყოველი შემდეგი კითხვა წინა კითხვების ანალიზს ეფუძნება. ამოცანების ნაწილი არ არის ჩვენი ტრადიციული სკოლისთვის ტიპური. მაგალითად, ლოგიკური ამოცანები, ამოცანები სილოგიზმების გარჩევაზე,

რომლებიც დიაგრამებით შეიძლება ვაწარმოოთ. თუმცა, ზოგადი უნარების გამოცდებზე გამოყენებულ მასალას მასწავლებლების ნაწილი კარგად იცნობს და არ გაუჭირდებათ შესაბამისი მასალის მოსწავლეებთან ერთად დამუშავება.

ზოგიერთი ცნება, ხშირად, ფორმალური განსაზღვრებების გარეშე (მით უმეტეს, აქსიომური განსაზღვრებების გამოყენების გარეშე) აღწერით შემოგვაქვს; ცნებათა ათვისების პროცესს კონკრეტული ამოცანების ამოხსნით წარვმართავთ. ხშირია მიმართვა მოსწავლეებისადმი: „გავიხსენოთ, რომ...“ მე-10 კლასის I სემესტრის დანიშნულების შესაბამისად, ვიმეორებთ დაწყებით და საბაზო საფეხურზე შესწავლილ საკითხებს, მაგალითად, რიცხვებს, რიცხვებზე მოქმედებებს, პროპორციას, პროცენტს. ვიწყებთ შესწავლილის გახსენებით და ოდნავ გადავაადგილდებით მათემატიკის სიღრმეებისკენ. რიცხვების გარდა სიმრავლეებზე მოქმედებებიც უნდა აღვნიშნოთ. აქ „სიღრმისეული სვლა“ **სიმრავლის კლასიფიკაციის** შემოტანასთან არის დაკავშირებული. აქ ინტეგრირებულად არის ჩართული გეომეტრიული მასალა — გეომეტრიულ ფიგურათა კლასიფიკაციის მაგალითების განხილვა.

სახელმძღვანელოს ტექსტი საშუალებას აძლევს მასწავლებელს სწავლება კონსტრუქტივისტული მეთოდით წარმართოს; კომუნიკაცია მოსწავლეებთან დიალოგის ფორმით აწარმოოს; წინარე ცოდნის გახსნებითა და გამეორებით, მასზე დაყრდნობით, მასწავლებელი ცდილობს გაიგოს რა ახსოვს, რა იცის მოსწავლემ და შემდეგ ამ ცოდნაზე დაყრდნობით ააგოს სწავლების პროცესი. მოსწავლეები ცოდნის კონსტრუირებას, ძირითადად, საკუთარ გამოცდილებაზე და მიგნებებზე დაყრდნობით ახდენენ და არა მასწავლებლის მიერ მიწოდებული მზა ინფორმაციის საფუძველზე. სახელმძღვანელო საშუალებას იძლევა დიფერენცირებული სწავლება განვახორციელოთ — სხვადასხვა სირთულის ამოცანები, მათ შორის, შედარებით მარტივი და სწრაფად შესასრულებელი დავალებები, ტესტური ამოცანები (ე.წ. დახურულბოლოიანი ამოცანები) საშუალებას გვაძლევს მოსწავლეებზე ორიენტირებული სწავლების ხელშეწმყობი გარემო შევქმნათ. მთავარი სასწავლო საშუალება მოსწავლის საქმიანობაა. მოსწავლე სწავლობს მუშაობის პროცესში, როგორც დამოუკიდებლად, ასევე თანაკლასელებთან ერთად, სწავლება მიმდინარეობს მასწავლებლის ხელმძღვანელობით.

სახელმძღვანელოს ტექსტის აგება კონსტრუქტივისტული მეთოდით სწავლების წარმართვისთვის მასწავლებელს ეხმარება განმავითარებელი შეფასების განხორციელებაში. მასწავლებელი აკვირდება მოსწავლეთა ჩართულობას ძველის გახსნებასა და გამეორებაში, „ტესტურ“ დავალებათა ამოხსნებში და ინიშნავს მოსწავლეთა მიღწევებს.

აქვე აღვნიშნავთ სახელმძღვანელოს მაღალ მეცნიერულ დონეს, გადმოცემის მისაწვდომობას, ენის სიზუსტესა და სიმარტივეს. მათემატიკური სიზუსტის ის დონე, რომლითაც გამოირჩევა მე-10 კლასის პირველ სემესტრში რეკომენდებული საკითხების გადმოცემა, უმაღლესი სკოლის მასწავლებლებსაც აძლევს შესაძლებლობას მასზე დაყრდნობით ააგონ კალკულუსის, პრეკალკულუსისა და სხვა კურსები.

მასწავლებლის წიგნის მოკლე მიმოხილვა

მასწავლებელის წიგნის დანიშნულებაა, მათემატიკის ახალი სტანდარტის შესაბამისად, მე-10 კლასის I სემეტრში რეკომენდებული სამიზნე ცნებების შესაბამისი მასალის სწავლებისთვის საჭირო მეთოდიკური რეკომენდაციები მიაწოდოს მასწავლებელს. წიგნი დაეხმარება მასწავლებლებს სასწავლო პროცესის დაგეგმვასა და წარმართვაში. მიწოდებულია დამატებითი მასალა შემაჯამებელი დავალებების ჩასატარებლად და მათ შესაფასებლად.

მასწავლებლის წიგნში წარმოდგენილია სასწავლო თემები, რომელთა ფარგლებში გამოიყოფა შესასწავლი საკითხები. მიწოდებული მასალა მოსწავლეს საშუალებას მისცემს კარგად გაიაზროს სამიზნე ცნებები, რომლებიც რეკომენდებულია მე-10 კლასის I სემეტრში, შედეგზე ორიენტირებული სწავლა-სწავლების უზრუნველყოფისთვის. იმავე ფუნქციის მატარებელია საკვანძო შეკითხვებზე პასუხების მოძიება, პროექტული დავალებების-კომპლექსური დავალებების შესრულება; ყოველი საკვანძო შეკითხვა მაორგანიზებელი ელემენტია, რომელიც, შეიძლება ითქვას, გაკვეთილის მიზნის როლს ასრულებს. ყოველი თემის მიხედვით განსაზღვრულია მკვიდრი წარმოდგენები, რომლებიც თემის შესწავლისას უნდა ჩამოყალიბდეს მოსწავლის ხანგრძლივ მეხსიერებაში, რათა მთელი სასწავლო კურსის შესწავლისას დასახული მიზნების მიღწევა იყოს შესაძლებელი.

მასწავლებლის წიგნი ეხმარება მასწავლებელს შეფასების ინდიკატორების განსაზღვრაში, აქტივობების დაგეგმვასა და დამატებითი კომპლექსური დავალებების შემუშავებაში.

მასწავლებლის სარეკომენდაციო წიგნში თავებისა და პარაგრაფების ნუმერაცია და დასახელება ემთხვევა მოსწავლის სახელმძღვანელოში არსებულ ნუმერაციასა და დასახელებას.

წიგნი ეხმარება მასწავლებელს დიფერენცირებული სწავლების განხორციელების საქმეში. რეკომენდებულია სხვადასხვა დონის დავალებების განაწილების სქემა და დიფერენცირებული სწავლების ჩატარების ფორმები სხვადასხვა მზაობის მოსწავლეებში. ძირითადი მუშაობა იწყება ყველა მოსწავლესთან ერთად წინარე მასალის ერთობლივი გახსენებით; ამის შემდეგ მასწავლებლის ხელმძღვანელობით, მოსწავლეები თავად უნდა „აშენებდნენ მათემატიკის შენობას“. მასწავლებელი შეიძლება დირიჟორსაც შევადაროთ. იგი წარმართავს პროცესს, ანაწილებს სამუშაოს, რომელიც ერთნაირია ყველასთვის, ან დიფერენცირებულია. ამასთანავე, ზოგიერთმა მასწავლებელმა შეიძლება სწავლების ჩვენ მიერ რეკომენდებული ფორმებისგან განსხვავებული ფორმებიც გამოიყენოს. „სწავლება ხელოვნებაა. სწავლება მასწავლებლის ინდივიდუალურ თვისებებზეა დამოკიდებული. სწავლების კარგი მეთოდი, შეიძლება ითქვას, იმდენია, რამდენიც კარგი მასწავლებელი არსებობს“ [28].

საათების განაწილება მასალის მიხედვით, გაკვეთილების წარმართვისთვის საჭირო რეკომენდაციები, დამხმარე სასწავლო მასალა, მასწავლებლის წიგნში მოცემული მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად, დავალებათა მოცულობა — მხოლოდ რეკომენდაციის ხასიათს ატარებს. არც მოსწავლის სახელმძღვანელოა საგანმანათლებლო სტანდარტი. ის მხოლოდ ქმედითი ინსტრუმენტია სტანდარტით დასახული მიზნების მისაღწევად. მასწავლებელს, მოსწავლეთა ინდივიდუალური თვისებების, კლასის აკადემიური დონის გათვალისწინებითა და საკუთარი შეხედულებების მიხედვით, შეუძლია ცვლილებები შეიტანოს შემოთავაზებულ სისტემაში. მაგალითად, მასწავლებლის წიგნში ამოხსნილია თითქმის ყველა ამოცანა, ამასთანავე, ხშირად ამოხსნის რამდენიმე ვარიანტია წარმოდგენილი, თუმცა, მასწავლებელმა (ან მოსწავლემ) შეიძლება ამონახსნის განსხვავებულ

ვარიანტსაც მიაგნოს და ეს გზა, ცხადია, კლასში უნდა განიხილებოდეს. ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ მასწავლებელს არ სჭირდება დამატებითი კრებულების (ხშირად მოძველებულ იდეებსა და სტანდარტებზე შედგენილი) გამოყენება. სახელმძღვანელოში მრავლად არის რეკომენდებული სამიზნე ცნებების გააზრებისთვის საჭირო სხვადასხვა დონის დავალება. ამასთანავე, მასწავლებელს დავალებების შერჩევაშიც ვეხმარებით — ცალკეა გამოყოფილი კლასში შესასრულებელი ამოცანები და საშინაო დავალებები. თუმცა, ეს დაყოფაც სარეკომენდაციო ხასიათისაა და ეხმარება მოსწავლეს კლასში შესრულებული სამუშაოს ანალოგიურად ამოხსნას საშინაო დავალების ამოცანები. უნდა აღინიშნოს, რომ მხოლოდ ანალოგიურ ამოცანებზე მუშაობა მოსწავლეთა შემოქმედებითი პოტენციალის ზრდას ხელს ვერ უწყობს — ესეც გავითვალისწინეთ და გვაქვს ამოხსნის განსხვავებულ მეთოდებზე დამყარებული ამოცანები; კომპლექსური დავალებები, რომლებსაც მოსწავლე დამოუკიდებლად ამზადებს.

სარეკომენდაციო წიგნში მასწავლებელი გაეცნობა ჩვენს თვალსაზრისს სიმბოლოებისა და ცნებათა შემოტანის შესახებ. როგორც წესი, გამოყენებულია კონსტრუქციული და ინდუქციური მეთოდები, უფრო იშვიათად — ცნების შემოტანის აქსიომური მეთოდი.

მასწავლებლის წიგნი შეიცავს რეკომენდაციებს შეფასების სქემების გამოყენების შესახებაც. განსაკუთრებული მნიშვნელობა განმავითარებელი შეფასების განხორციელებას ენიჭება — როგორ დავაკვირდეთ მოსწავლეების მუშაობას, როგორ მოვახერხოთ მათი აქტივობების დაფიქსირება ყოველ გაკვეთილზე, როგორ გამოვიყენოთ ეს შეფასება მიღწეული შედეგების გასაუმჯობესებელი აქტივობის დასაგეგმად.

განმავითარებელი შეფასებისას მასწავლებელი მოსწავლეთა საქმიანობას არა მათი მიღწევის დონის განსასჯელად და ქულების დასაწერად ამოწმებს, არამედ მათ დასახმარებლად. მასწავლებელი სწავლის პროცესში თითოეულ მოსწავლეს აკვირდება, სწავლობს მათ საჭიროებებს, რათა თითოეულ მათგანს მაქსიმალურად შეუწყოს ხელი წინსვლაში. ასეთ კონსტრუქციულ სასწავლო გარემოში მოსწავლეებს არ აფერხებთ წარუმატებლობის შიში და მასწავლებლის რჩევისა და მხარდაჭერის იმედი აქვთ. მოსწავლეები იძენენ ახალ ცოდნას, იძენენ გამოცდილებას და იუმჯობესებენ უნარებს.

განმავითარებელი შეფასება უნდა განვიხილოთ როგორც პროცესი, რომელიც გულისხმობს სხვადასხვა აქტივობით (ე.წ. განმავითარებელ შეფასების ინსტრუმენტებით) ინფორმაციის შეგროვებას მოსწავლის მიერ საკითხების გაგებისა და გააზრების შესახებ.

განმსაზღვრელი შეფასების ინსტრუმენტიც, რომელიც, როგორც წესი, შემაჯამებელი ტესტია, ზოგჯერ შეიძლება განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტადაც ვაქციოთ, თუ, მაგალითად, მოსწავლეებს დავყოფთ ჯგუფებად და დავავალებთ მიღებული პასუხებისა და ამოხსნის გზების შედარებას.

განმავითარებელი შეფასება უწყვეტად უნდა მიმდინარეობდეს, ის უნდა იწყებოდეს საშინაო დავალების განხილვისას, რაც, ფაქტობრივად, ყოველი გაკვეთილის დაწყებისას უნდა ჩატარდეს. ამ პროცესის განხორციელებაში პედაგოგს მასწავლებლის წიგნი ეხმარება, რომელშიც წარმოდგენილია საშინაო დავალებების შესრულების ხერხები. განმავითარებელი შეფასება ახალ მასალაზე გადასვლისა და მასალის გარჩევის პროცესშიც მიმდინარეობს. მასწავლებლის წიგნში წარმოდგენილია ამ პროცესის ჩატარების დაწვრილებითი აღწერაც.

მათემატიკის სწავლების მიზნები. მიზნების, სტანდარტის შედეგების მიღწევისა და შინაარსის ურთიერთკავშირის მატრიცა

უმაღლეს სკოლაში მათემატიკის სწავლების ზოგადი მეთოდიკის კურსებიდან მასწავლებლებისთვის შეიძლება ცნობილი იყოს სკოლაში მათემატიკის სწავლების მიზნები. ამ კურსებში, როგორც წესი, სამ კომპონენტზე კეთდება აქცენტი.

1) ზოგადსაგანმანათლებლო — ცოდნის, ჩვევებისა და უნარების გარკვეული სისტემის დაუფლება, მათემატიკური ცოდნის იმ მოცულობით დაუფლება, რომელიც აუცილებელია მისი გამოყენების პროცესში; აქტიური შემეცნებითი საქმიანობისა და სასწავლო ლიტერატურასთან დამოუკიდებელი მუშაობის ჩვევების დაუფლება.

2) აღმზრდელობითი — მათემატიკის შესწავლისადმი ინტერესის აღძვრა, მათემატიკური (ფართო გაგებით — ზოგადმეცნიერული) აზროვნების განვითარება, ზნეობრივი, ესთეტიკური, სოციალურ-ემოციური აღზრდა.

3) პრაქტიკული — სხვა დისციპლინების შესწავლისა და პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას მათემატიკური ცოდნის გამოყენების უნარის განვითარება; მოვლენის, ან პროცესის მათემატიკური მოდელის შესახებ წარმოდგენის ჩამოყალიბების უნარის განვითარება.

ახალ დოკუმენტებში (საშუალო საფეხურის სტანდარტი, საშუალო საფეხურის პოლიტიკის ხედვის დოკუმენტი), რომლებიც შემუშავებულია საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროში, ჩამოყალიბებულია შემდეგი მახასიათებლები საშუალო საფეხურის მისიისა და მიღწევის თვალსაზრისით:

- მოსწავლემ გააკეთოს ინფორმირებული არჩევანი,
- მოემზადოს უმაღლესი განათლებისთვის ან შრომით ბაზარზე გასასვლელად,
- გამოიმუშავოს მაღალაკადემიური და XXI საუკუნის უნარები (საჭირო კომპონენტები).

მესამე თაობის ეროვნულ სასწავლო გეგმაში საშუალო საფეხურის მისიად მითითებულია:

- საგანთა გაღრმავებული სწავლების გზით სისტემური ცოდნის კონსტრუირება;
- მოაზროვნე, მაძიებელი, ახლის შემოქმედი, წიგნიერი, ინფორმირებული და პასუხისმგებლობის გრძნობის მქონე მოქალაქის ჩამოყალიბება, რომელსაც შეუძლია გადაწყვეტილებების დამოუკიდებლად მიღება, საკუთარი მიღწევების გამოყენება ახალი მატერიალური, ინტელექტუალური თუ სულიერი ღირებულებების შესაქმნელად.

საშუალო საფეხურის მისიის განხორციელების გზაზე X კლასის I სემეტრი საწყისი ეტაპია. იწყება მზადება ინფორმირებული არჩევანის გასაკეთებლად (არჩევითი საგნების შერჩევა), უმაღლესი განათლების მისაღებად ან შრომით ბაზარზე გასასვლელად. ამიტომ, ამ ეტაპზე მეტი ადგილი აქვს დათმობილი გავლილი მასალის გამეორებას და ისეთი თემების შესწავლას, რომლებიც დაეხმარება მოსწავლეებს არჩევითი საგნების შერჩევის საკითხში. აქ უნდა გამოვყოთ X კლასის კურსში გამონათქვამთა ლოგიკის შეტანა. ჩვენ ვეთანხმებით მოსაზრებას, რომ ეს თემა I სემესტრში უნდა განიხილებოდეს, როგორც განტოლებების, ასახვების, გეომეტრიული დებულებების სრულყოფილი შესწავლის საფუძველი.

სტანდარტის შედეგების მიღწევისა და შინაარსის ურთიერთკავშირის მატრიცა

თემების ჩამონათვალი	სტანდარტის შედეგები მოსწავლემ უნდა შეძლოს:	საމიზნე ცნებები
ნატურალური რიცხვე-ბი, მთელი რიცხვები, რაციონალური და ირა-ციონალური რიცხვები, ნამდვილი რიცხვები	ნატურალური რიცხვების უდიდესი საერ-თო გამყოფისა და უმცირესი საერთო ჯერადის პოვნა და მათი გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას (მათ. საშ. 1). მთელი რიცხვების გამოყენება პრაქტი-კული ამოცანების ამოხსნისას (სასაათო ზოლების ახსნა, ტემპერატურის ცვლი-ლება); მთელ რიცხვებზე მოქმედებების შედეგების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმებით (მათ. საშ. 1). რაციონალური რიცხვების ჩაწერა სხვა-დასხვა ეკვივალენტური ფორმით, მათ შო-რის პროცენტით (მათ. საშ. 1). ნამდვილი რიცხვების წარმოდგენა სხვა-დასხვა ეკვივალენტური ფორმით, გამო-სახვა რიცხვით წრფეზე, ნამდვილი რიცხ-ვების გამოყენება სიდიდეების (სიგრძე, ფართობი) გამოსახვისას (მათ. საშ. 1). რიცხვითი გამოსახულებების მნიშვნელო-ბების გამოთვლა სხვადასხვა ხერხით, მო-ქმედებათა თვისებების გამოყენება (მათ. საშ. 1).	რიცხვები და სიდიდეები, რიცხვების თვისებები
რიცხვის მოდული. რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა. მიახ-ლოების აბსოლუტური ცდომილება, ფარდობი-თი ცდომილება. ფესვი. რიცხვის წარმოდგენის სტანდარტული ფორმა. წილადმაჩვენებლიანი ხარისხი.	მათემატიკური მეთოდების ან/და ტე-ქნოლოგიების გამოყენებით ზუსტი ან მიახლოებითი გამოთვლების შესრულება; ფარდობითი ცდომილების გამოთვლა; მი-ახლოებით გამოთვლათა და შეფასებათა ხერხების გამოყენება (მათ. საშ. 1). სიდიდეების წარმოდგენა რიცხვებით; რიცხვის ჩაწერის სხავადასხვა ხერხის შერჩევა და გამოყენება (მათ. საშ. 1).	რიცხვები, რიცხვითი გა-მოთვლები

სიმრავლე. ოპერაციები სიმრავლეებზე. სიმრავლეთა კლასიფიკაცია. ვენის დიაგრამა.	სიმრავლეებზე ოპერაციების, სიმრავლეებს შორის მიმართებების წარმოდგენა ვენის დიაგრამების გამოყენებით; სიმრავლეთა კლასიფიკაციის გამოყენება გეომეტრიული ობიექტების დახასიათებისას. სიმრავლეთა თეორიაზე დაყრდნობით, ლოგიკური მსჯელობითა და დასაბუთებით ამოცანის ფორმულირება ან/და პრობლემის გადაჭრა (მათ. საშ. 1; მათ. საშ. 8).	სიმრავლე. ოპერაციები სიმრავლეებზე
ცნება, მსჯელობა; მიმართებები ცნებებს შორის. გამონათქვამი, ოპერაციები გამონათქვამებზე; ალგორითმი, ალგორითმის ჩაწერა ბლოკ-სქემით	ცნების განსაზღვრების სხვადასხვა ხერხის გამოყენება; ცნებათა შორის 4 შესაძლო ლოგიკური მიმართების განსაზღვრა და წარმოდგენა ვენის დიაგრამების გამოყენებით; გამონათქვამთა ლოგიკით, მსჯელობით, ლოგიკური კავშირებით, რთული გამანათქვამების აგება და შესაბამისი ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილების წარმოდგენა (მათ. საშ. 8). პრობლემის გადაჭრისას გამონათქვამებისა და მათზე ოპერაციების გამოყენებით, დებულების დასაბუთების პირდაპირი და არაპირდაპირი მეთოდების ფლობით ლოგიკური დასკვნების გამოტანა (მათ. საშ. 9).	გამონათქვამი; ლოგიკური ოპერაციები
ფარდობა. ერთეულოვანი ფარდობა. პროპორცია; პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული დამოკიდებულებები; მარტივი და რთული პროცენტი.	ფარდობის, ერთეულოვანი ფარდობის გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას; პროპორციის, პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული დამოკიდებულებების გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას; ცხოვრებისეული მოვლენის მათემატიკური მოდელირება და წარმოდგენა ცვლადის, ცვლადებს შორის სხვადასხვა დამოკიდებულებების თვისებების გამოყენებით. პროცენტის მნიშვნელობის გააზრება სხვადასხვა სიტუაციიდან გამომდინარე მონაცემების დამუშავებისას; პროცენტის გამოყენება რეალურ ცხოვრებაში; გამოთვლები ექსელის მეშვეობით და მათი წარმოდგენა. (მათ. საშ. 1, მათ. საშ. 2, მათ. საშ. 3). მარტივი და რთული პროცენტის ფორმულები (მათ. საშ. 3).	რიცხვები, რიცხვითი გამოთვლები; სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებები, ალგებრული გამოსახულება.

სტატისტიკური კვლევის დაგეგმვა. მონაცემთა მოპოვებისა და წარმოდგენის ხერხები; ცენტრალური ტენდენციის საზომები; დაწყვილებული მონაცემები. კორელაცია. კლასტერი	საკვლევი თემის განსაზღვრა, კვლევის დაგეგმვა, მონაცემების შეგროვება, მოწესრიგება; ანალიზი — ცენტრალური ტენდენციის საზომების გამოყენება, დიაგრამების გამოყენება (ცხრილი, დიაგრამა, კერძოდ, ჰისტოგრამა); მონაცემთა ორი ერთობლიობის (დაწყვილებული მონაცემები) შედარება, კავშირის დამყარება და ამ კავშირში კანონზომიერებების აღმოჩენა; კავშირების აღწერა და დახასიათება სხვადასხვა მახასიათებლით (მაგალითად, კორელაციის კოეფიციენტით) (მათ. საშ. 6).	მონაცემები
ალბათობის ფორმულა. ხდომილობათა სივრცე. ფარდობითი სიხშირე და ალბათობა	ხდომილობის სტატისტიკური ალბათობისა და თეორიული ალბათობის შეფასება და ამ გზით პროცესის შედეგების პროგნოზირება (მათ. საშ. 7).	ხდომილობა, ალბათობა

მესამე თაობის ეროვნული სასწავლო გეგმის მიხედვით — შეფასება, ისევე, როგორც სწავლა-სწავლება, ეფუძნება კონსტრუქტივისტულ საგანმანათლებლო პრინციპებს. სწავლება და შეფასება ერთი და იმავე მედლის ორი მხარეა. მნიშვნელოვანი აქცენტი კომპლექსურ დავალებებზე კეთდება. კომპლექსური დავალებების შესრულების ხარისხი აისახება განმსაზღვრელ და განმავითარებელ შეფასებებზე. სასწავლო პროცესში, შეფასებისთვის გამოიყენება სოლო (SOLO) ტაქსონომიის პრინციპების საფუძველზე შექმნილი შეფასების რუბრიკა, რომელიც ამოწმებს მოსწავლის მხრიდან სამიზნე ცნებების გააზრების ხარისხს.

მასწავლებლებს შევახსენებთ, რომ სწავლის „ტაქსონომია“ ნიშნავს სწავლის კლასიფიკაციას; მათთვის ცნობილი უნდა იყოს ბლუმის ტაქსონომია, რომელიც ექვსი კოგნიტური დონის მიხედვით ახდენს კლასიფიკაციას (ცოდნა, გაგება, გამოყენება, ანალიზი, სინთეზი და შეფასება), როცა კატეგორიები დალაგებულია მარტივიდან რთულისკენ, კონკრეტულიდან აბსტრაქტულამდე. ამ ტაქსონომიის მიხედვით, საჭიროა თითოეული დონის ათვისება, რათა შემდეგ მაღალ დონეზე გადახვიდე; რაც უფრო მაღლა მიიწევს, უფრო რთული ხდება დონეებიც. მნიშვნელოვანი ადგილი თანამედროვე სისტემაში მოიპოვა SOLO ტაქსონომიამ, რომელიც მოსწავლეთა მიღწევების შეფასების მრავალ კვლევას დაედო საფუძვლად; იგი მარტივ გზას გვთავაზობს იმის აღმოსაჩენად, თუ როგორ იზრდება სწავლის შედეგები — ზედაპირულიდან სიღრმისეულ გაგებამდე.

სოლო ტაქსონომია ზომავს მოსწავლეთა მიღწევებს 5 დონის მიხედვით. ეს დონეებია:

SOLO 1: პრესტრუქტურული დონე. მოსწავლეს საერთოდ ვერ გაუაზრებია საკითხი, იყენებს შეუსაბამო, არარელევანტურ ინფორმაციას ან/და საერთოდ აცდენილია საკითხს.
SOLO 2: უნისტრუქტურული დონე. მოსწავლეს შეუძლია მხოლოდ ერთი ასპექტის განხილვა და მარტივი, აშკარა/ცხადი კავშირების დამყარება. მოსწავლეს შეუძლია ტერმინოლოგიის გამოყენება, ზეპირად გადმოცემა (გახსენება), მარტივი ინსტრუქციების/ალგორითმების შესრულება; პარაფრაზირება, ამოცნობა, დასახელება ან დათვლა.
SOLO 3: მულტისტრუქტურული დონე. მოსწავლეს შეუძლია რამდენიმე ასპექტის განხილვა განცალკევებულად, ერთმანეთთან კავშირის გარეშე. მას შეუძლია ჩამოთვლა, აღწერა, კლასიფიცირება, კომბინირება; მეთოდების, სტრუქტურის გამოყენება; პროცედრების შესრულება, სხვ.
SOLO 4: მიმართებითი დონე. მოსწავლეს შეუძლია გაიაზროს კავშირი რამდენიმე ასპექტს შორის, აგრეთვე ისიც, თუ როგორ ერგება/შეეხამება ეს ასპექტები ერთმანეთს და ქმნის მთელს, მთლიანობას. მისი ნააზრევი დასტრუქტურებულია და ამგვარად, მოსწავლეს აქვს იმის უნარი, რომ შეადაროს, დააკავშიროს, გააანალიზოს, გამოიყენოს თეორია, ახსნას საკითხი მიზეზებისა და შედეგების კუთხით.
SOLO 5: გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მოსწავლეს შეუძლია სტრუქტურის განზოგადება მოცემულის/შეთავაზებულის მიღმა, სტრუქტურის აღქმა მარვალი სხვადასხვა კუთხიდან/თვალთახედვით და იდეების გადატანა ახალ სფეროში. მას შეუძლია განზოგადება, ჰიპოთეზის წამოყენება, კრიტიკა ან თეორიის ჩამოყალიბება.

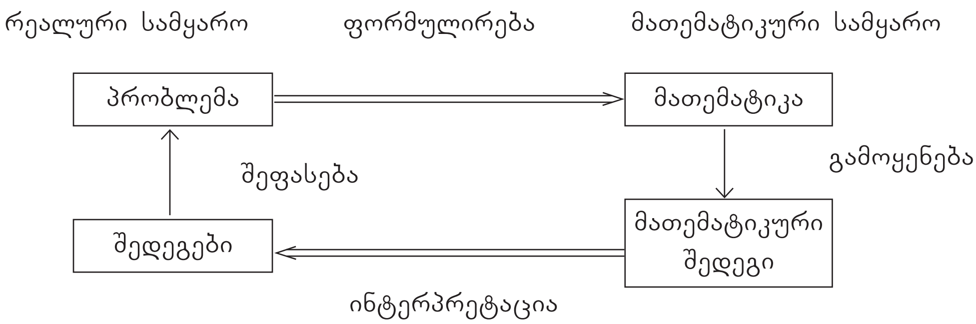
ამ დონეების შესაბამისად ჩამოყალიბდება შეფასების კრიტერიუმი ყოველი სამიზნე ცნების გააზრების ხარისხის შესამოწმებლად; შესაბამისად ჩამოყალიბდება განმავითარებელი შეფასების კომენტარი. იგივე ტაქსონომია შეიძლება გამოვიყენოთ ეროვნული სასწავლო გეგმების შედეგების მიღწევის დონის განსასაზღვრადაც. საშუალო საფეხურზე ორი ტიპის განმსაზღვრელი შეფასება გამოიყენება: ქულით და ჩათვლით.

ამასთანავე, სოლო ტაქსონომიის დონეები მხოლოდ და მხოლოდ მასწავლებლის ინსტრუქციაა, ისინი ეხმარება მასწავლებელს მიღებული შედეგების გაანალიზებაში. გაკეთებული ანალიზის გამოყენებით, მასწავლებელი მოსწავლეს აწვდის კომენტარს იმასთან დაკავშირებით, თუ რაში აქვს წინსვლა, რა აქვს გასაუმჯობესებელი და როგორ გააუმჯობესოს.

მოსწავლეთა ცოდნის შეფასების საქმეში მასწავლებელმა შეიძლება გამოიყენოს შეფასების ინსტრუმენტები, რომლებიც ითვალისწინებს საერთაშორისო შემფასებლების სტრატეგიებს (TIMSS, PISA და სხვა). მოსწავლეთა მიღწევების საერთაშორისო კვლევების

ამსახველ დოკუმენტებში მითითებულია შეფასების ექვსი დონე, რომელთა მიხედვითაც ხდება მოსწავლეთა მიღწევების წარმოდგენა სხვადასხვა საგნის მიხედვით. ეს დონეები მოკლედ შეიძლება ასე დავახასიათოთ: 1) მოსწავლეს არ შეუძლია საბაზო დავალების შესრულება; 2) შეუძლია ნაცნობ კონტექსტში დასმულ კითხვაზე პასუხის გაცემა, მარტივი მოქმედებების ჩატარება; 3) შეუძლია საჭირო ფორმულის წარმოდგენა, შედეგის ინტერპრეტაცია; 4) მოდელების გამოყენება, ვარაუდების გამოთქმა; 5) მოდელების მოფიქრება; 6) ინფორმაციის გამოყენება რთული სიტუაციების კვლევისას; კვლევის საფუძველზე არგუმენტების აღწერა და მათი შედარება საწყის სიტუაციასთან.

მათემატიკური განსწავლულობა ამ კვლევების მიხედვით მოვლენის მათემატიკურ ენაზე ფორმულირების, გამოყენებისა და ინტერპრეტაციის უნარის გამოვლენით ფასდება. იგი მოიცავს მათემატიკური მსჯელობის ჩატარების, მათემატიკური ცნებების, პროცედურების, ფაქტებისა და ინსტრუმენტების გამოყენების უნარებს; იმ უნარებს, რომლებიც გვეხმარება, რომ აღიწეროს და აიხსნას მოვლენა. რეალური მოვლენის მათემატიკური აღწერა და ინტერპრეტაცია შეიძლება სქემატურად ასე აღიწეროს:



შეფასების პროცესი შეიძლება სამი ზმნით აღვწეროთ: ფორმულირება, გამოყენება, ინტერპრეტირება.

ინფორმაცია მოსწავლის სახელმძღვანელოს შესახებ

წარმოდგენილი სახელმძღვანელო შეიცავს მასალას, რომელიც მე-10 კლასის პირველ სემესტრში რეკომენდებული სამიზნე ცნებების გააზრებას ემსახურება. მიუხედავად იმისა, რომ თავმოყრილია საკითხები, რომლებიც მხოლოდ I სემესტრში ისწავლება, წარმოდგენილი მასალა ისეა სტრუქტურირებული, რომ მოსწავლის წიგნისადმი წაყენებულ ყველა მოთხოვნას აკმაყოფილებს; სარჩევი და რჩევები წიგნით სარგებლობისთვის წიგნის დასაწყისშია მოცემული, მათემატიკური ტერმინების ლექსიკონი, მათემატიკური ნიშნები და მათი გამოყენების მაგალითები, საგნობრივი საძიებელი — წიგნის ბოლოში. აქვეა კვადრატებისა და კვადრატული ფესვების ცხრილები და ძირითადი ფორმულების ცნობარი.

კარგად გვესმის, რომ წიგნის შინაარსი, აგების სტილი, მის ელემენტებს შორის ლოგიკური კავშირები განსაზღვრავს მოსწავლეთა შემეცნებითი საქმიანობის პროცესს. ცოდნისა და მისი გამოყენების უნარის შეძენის პროცესში სახელმძღვანელოს მნიშვნელოვანი ფუნქცია აკისრია. ამ ფუნქციის განხორციელებაში არსებითია წიგნის სტრუქტურაც. თავები დასათაურებულია და მასალის მოკლე ანოტაციით იწყება; თავები პარაგრაფებისგან შედგება; თეორიულ ნაწილს, რომლებიც, ძირითადად, სამოტივაციო საკითხების განხილვით იწყება, მოსდევს ამოცანები კლასში მუშაობისთვის და საშინაო დავალებები, რომელთა ნაწილი კლასში შესასრულებელი სავარჯიშოების ანალოგიურია. თუმცა, გვაქვს სავარჯიშოები, რომლებიც მოსწავლეთა ინდივიდუალურ შემოქმედებით აქტივობებსაც მოითხოვს. ამავე დანიშნულებისაა კომპლესური დავალებები, რომლებიც ზოგჯერ წინ უსწრებს მასალას, რომელსაც ისინი ეხება. მოსწავლე მასალის შესწავლის პარალელურად, მუშაობს კომპლექსური დავალების შესრულებაზე, მოიძიებს წყაროებს, ყურადღებას ამახვილებს შესაბამის თეორიულ ასპექტებზე და ამზადებს რეფერატს კლასში წარმოსადგენად.

შეიძლება შეგვხვდეს დამატებითი საინფორმაციო მასალის მაუწყებელი სიმბოლო — „ს“ (სხვადასხვა) — ტერმინების წარმოშობა, ისტორიული ტექსტები და სხვა. ანალოგიურად, სავარჯიშოების დანიშნულების მიხედვით, ვიყენებთ რუბრიკებს — „კლასში“, „საშინაო“, „შემაჯამებელი დავალებები“, „ამოცანები თვითშეფასებისთვის“, „დამატებითი ამოცანები“.

წარმოდგენილი სახელმძღვანელო 4 თავისგან შედგება. ყოველ თავში გადმოცემული მასალა, ძირითადად, რეკომენდებულ სამიზნე ცნებებს პასუხობს. I თავი — რიცხვები და მოქმედებები; II თავი — სიმრავლე, ლოგიკის საწყისები; III თავი — გრძელდება წინა ორ თავში განხილულ სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული მასალის შესახებ ცოდნის გამეორება და გაღრმავება — ფარდობა, პროპორცია, პროცენტი (მარტივი და რთული), სამომხმარებლო არითმეტიკა, სიდიდეების გაზომვა. IV თავი — სტატისტიკა და ალბათობა. მნიშვნელოვანი მახასიათებელი გამეორების მუდმივი პროცესია. ეს განსაკუთრებით I და III თავებს ეხება და პასუხობს X კლასის I სემესტრის მისიას — მოამზადოს მოსწავლეები შემდგომი არჩევანის გასაკეთებლად. გამეორების პროცესი ცოდნის შემდგომი გაღრმავებით მიმდინარეობს; მაგალითად, I თავში ნატურალური რიცხვების განხილვისას, ვიმეორებთ უმცირესი საერთო ჯერადის, უდიდესი საერთო გამყოფის პოვნის წესებს, ამასთანავე, მიმდინარეობს ცოდნის გაღრმავება ნატურალურ რიცხვთა სისტემაში მარტივი რიცხვების მნიშვნელობისა და კანონიკური დაშლის შესახებ. II თავში, სიმრავლეთა თეორიის შესახებ ცოდნის „აშენება“, წინარე ცოდნაზე დაყრდნობით ხორციელდება. ამ თავის ერთი ნაწილი, რომელიც ლოგიკის საწყისებს ეხება, ახალია ჩვენი სკოლისთვის, მაგრამ მნიშვნელოვანია მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების განვითარებისთვის; ვცდილობთ ეს მასალა, სიმრავლეების თვალსაჩინო წარმოდგენებზე დაყრდნობით, მოსწავლეებისთვის

გასაგები ფორმით წარმოვადგინოთ. აქ მათემატიკური კვლევის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მეთოდს — აბსტრაქციას ვიყენებთ, აბსტრაქცია ხდება წინადადებებში შინაარსის „უგულებელყოფით"; ჭეშმარიტობისა და მცდარობის მინიჭების გზით და, შესაბამისად, გამონათქვამის ცნების შემოტანით; მათზე მოქმედებების განსაზღვრით მიიღება რთული გამონათქვამები, რომლებიც შეიძლება „ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა" ცხრილებით დავახასიათოთ.

ახალია მე-4 თავის შინაარსის ნაწილიც — „დაწყვილებული მონაცემების" განხილვა და შესაბამისი მახასიათებლების შემოღება (კორელაცია, კლასტერი); თუმცა, ისინი მარტივი მაგალითების გამოყენებითაა ახსნილი.

სავარჯიშოთა სისტემა — „ტესტები", ამოცანები, კომპლექსური დავალებები — თეორიული მასალის შესწავლის სტიმულის მომცემია და, როგორც წესი, სტანდარტში მითითებული შედეგების სისტემას უკავშირდება.

შინაარსში ჩართულია საკითხები, რომლებიც მდგრადი განვითარების პრინციპების განხორციელებას ეხება (მაგალითად, საცხოვრებელ უბნებში მწვანე ნარგავების მნიშვნელობა); დაცულია გენდერული ბალანსი ამოცანებში პერსონაჟების წარმოდგენისას.

მოსწავლის სახელმძღვანელო სასწავლო პროცესის დაგეგმვისა და წარმართვის ერთ-ერთი საშუალებაა. მოსწავლეებთან საუბარი შეიძლება წიგნის ტექსტისგან განსხვავებულადაც აიგოს. სახელმძღვანელო ეხმარება მასწავლებელს — მასში დაფიქსირებულია შემეცნებითი საქმიანობა, რომელიც მასწავლებელმა უნდა წარმართოს. შევეცადეთ, არ შექმნილიყო სავარჯიშოთა სხვა კრებულების გამოყენების საჭიროება, მასწავლებელმა უნდა გაითვალისწინოს, რომ ამ კრებულების უმეტესობა სასწავლო გეგმის და სტანდარტის შესაბამისად არ არის ორგანიზებული; არ არის გამოკვეთილი სამიზნე ცნებების ასათვისებლად საჭირო მასალა და შეუძლებელია საკვანძო შეკითხვებზე პასუხების მოძიება, მკვიდრი წარმოდგენების ჩამოყალიბება, დიფერენცირებული სწავლების განხორციელება. წიგნის საშუალებით, შეიძლება საშუალო საფეხურის ერთ-ერთ მიზანზეც მუშაობა — დავიწყოთ საბაზო და დაწყებით საფეხურზე შესწავლილის გამეორებით მზადება უმაღლეს სკოლაში სწავლის გასაგრძელებლად, გამოცდების ჩასაბარებლად. ამასთანავე, წიგნში წარმოდგენილი მასალა (ტექსტები, შეკითხვები) ხელს უწყობს მოსწავლეთა ეტაპობრივ მიყვანას ახალ ცოდნამდე, ცნებათა გააზრებას, მკვიდრი წარმოდგენების ჩამოყალიბებას, გამოყენებითი ასპექტების წარმოჩენას, ტექნოლოგიების გამოყენებას. შემაჯამებელი დავალებები, რომლებიც ყოველ თემატურ ბლოკს ახლავს, მოითხოვს შეძენილ ცოდნათა ინტეგრირებულ გამოყენებას. დიდ ყურადღებას ვუთმობთ წარმოდგენილი მასალის სანდოობას, ობიექტურობას. ბევრი ამოცანა ისეა შერჩეული, რომ მათი ამოხსნის სხვადასხვა ხერხის გამოყენება იყოს შესაძლებელი, რაც ხელს უწყობს კრიტიკული აზროვნების განვითარებას.

I თავი

გამეორება. რიცხვები. მოქმედებები რიცხვებზე

თემა: რიცხვები. მოქმედებები რიცხვებზე. **საათების სავარაუდო რაოდენობა:** 22 სთ			
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ნატურალური, მთელი, რაციონალური და ირაციონალური რიცხვები. წილადმაჩვენებლინი ხარისხი			
სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**კომპლექსური დავალება**
რიცხვები, მათი თვისებები, სიდიდეები, რიცხვითი გამოთვლები. რიცხვები შეიძლება გამოვიყენოთ სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნისას, სიდიდეების გამოსასახავად; რიცხვები შეიძლება ჩაიწეროს სხვადასხვა ეკვივალენტური სახით; რაციონალური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს წილადის, ათწილადის ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით, ირაციონალური რიცხვი ჩაიწერება უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით	ნატურალური რიცხვები, მთელი რიცხვები, რაციონალუი რიცხვები, ირაციონალური რიცხვები, ფესვი, წილადმაჩვენებლიანი ხარისხი. რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა	რა შემთხვევაში ჩაიწერება უკვეცი წილადი სასრული ათწილადის სახით? უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით? რა გამოყენება აქვს ნამდვილ რიცხვებს? რა სიდიდეებით ვახასიათებთ რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობას?	მარტივი რიცხვები — დაშიფრვის სისტემა.

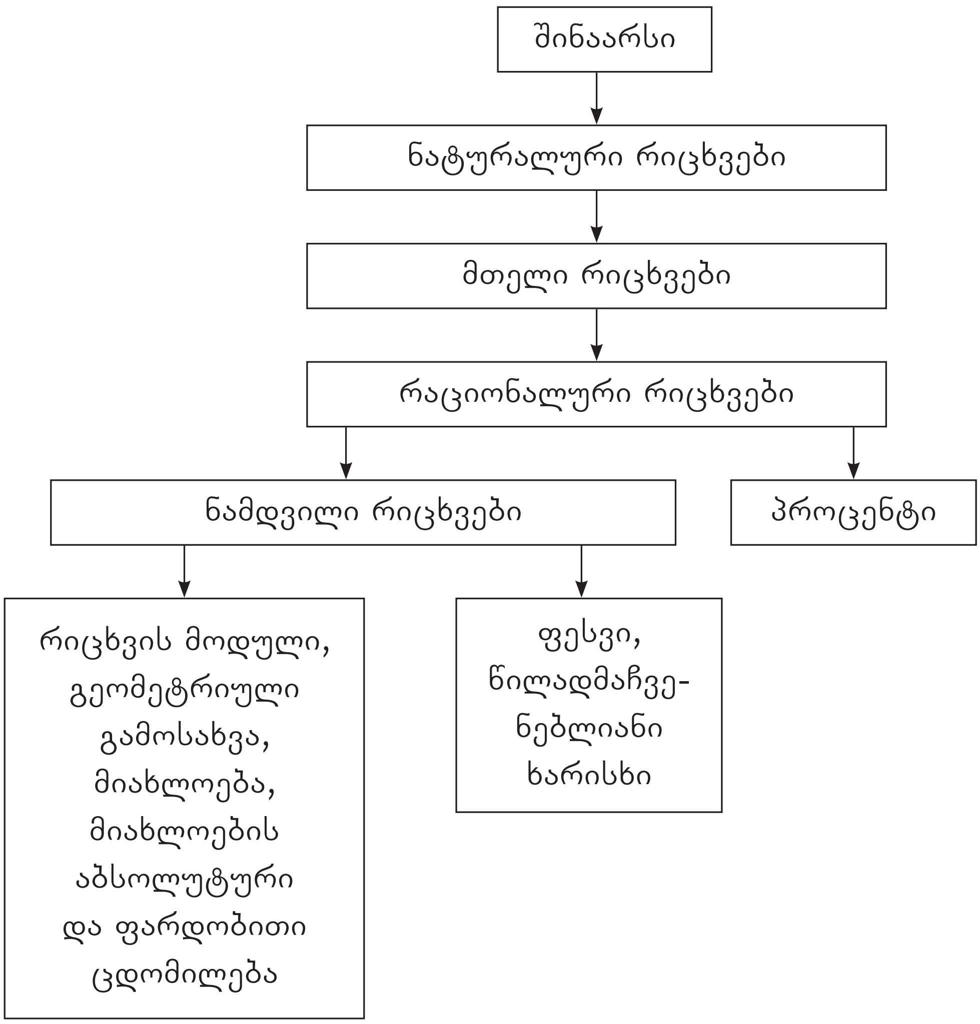
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით; სიდიდეებსა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდობის გამოთვლა; რიცხვების წარმოდგენა ექვივალენტური ფორმით; ზუსტი ან მიახლოებითი გამოთვლების შესრულება; ფარდობითი ცდომილების გარკვევა; მიახლოებით გამოთვლათა და შეფასებათა ხერხების გამოყენება (მათ. საბ. 1).

პირველი თავი, ძირითადად, მათემატიკის ისეთ მნიშვნელოვან სამიზნე ცნებებს ეხება, როგორიც არის: რიცხვები, რიცხვებზე მოქმედებები, რიცხვითი გამოთვლები.

რიცხვითი სიმრავლეების განხილვა ამ ცნების გაფართოების ალგებრული თვალსაზრისით მიმდინარეობს. ეს სქემა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: ნატურალური რიცხვები $\rightarrow$ მთელი რიცხვები $\rightarrow$ რაციონალური რიცხვები $\rightarrow$ ნამდვილი რიცხვები; უკანასკნელი პუნქტი უკავშირდება რიცხვების წარმოდგენას საკოორდინატო ღერძზე, რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობასა და ამ მნიშვნელობის აბსოლუტურ და ფარდობით ცდომილებებს. სკოლაში რიცხვის ცნების გაფართოების სქემა, როგორც ცნობილია, ისტორიული განვითარების პროცესს უკავშირდება და იგი ასე წარმოიდგინება: ნატურალური რიცხვები $\rightarrow$ დადებითი რაციონალური რიცხვები $\rightarrow$ რაციონალური რიცხვები $\rightarrow$ ნამდვილი რიცხვები. ადამიანმა უფრო ადრე დაიწყო დადებითი რაციონალური რიცხვების გამოყენება სიდიდეების გამოსახვისას, ვიდრე უარყოფითი რიცხვების გამოყენება. უფრო ადვილია გაიაზროს მოსწავლემ, მაგალითად, ვაშლის 4 ნაწილად დაყოფა და 3 დანაყოფის აღება ($\frac{3}{4}$-ის გააზრება), ვიდრე ვალისა და ქონების შეფასება დადებითი და უარყოფითი რიცხვებით (ტემპერატურის აღრიცხვა და ა. შ.).

დიდი ყურადღება ეთმობა რიცხვების ჩაწერის სხვადასხვა ფორმის გამოყენებას; იმის გააზრებას, რომ რიცხვი სხვადასხვა სახით შეიძლება ჩაიწეროს, რომ, მაგალითად, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{10}$, 60%, 0,6 — ერთი და იმავე, ერთი რაციონალური რიცხვის სხვადასხვა ჩანაწერია; ეს ასპექტი რიცხვების შესახებ მკვიდრი წარმოდგენებია; მოსწავლეები ეჩვევიან, რომ რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს გამოსახულების სახით — გამოსახულების მნიშვნელობა არის რიცხვი; მნიშვნელოვანია მიახლოებითი გამოთვლების ჩართვა — მოსწავლემ უნდა გაიაზროს, რომ სიდიდეები, როგორც წესი მიახლოებით წარმოიდგინება რიცხვების საშუალებით. ამასთანავე, მნიშვნელოვანია მიახლოების აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებების გარკვევა.

I თავში წარმოდგენილი საკითხები, მკვიდრ წარმოდგენებთან და საკვანძო შეკითხვებთან მათი კავშირების გათვალისწინებით, შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:


შინაარსი
ნატურალური რიცხვები
მთელი რიცხვები
რაციონალური რიცხვები
ნამდვილი რიცხვები
პროცენტი
რიცხვის მოდული, გეომეტრიული გამოსახვა, მიახლოება, მიახლოების აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება
ფესვი, წილადმაჩვე-ნებლიანი ხარისხი

1.1. ნატურალური რიცხვები

<table>
<tr><td colspan="4">თემა: რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში
სავარაუდო დრო: 4 სთ</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნება და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვები</th><th>დავალებები</th></tr>
<tr><td>რიცხვები და მათი თვისებები; რიცხვითი გამოთვლები; რიცხვები შეიძლება გამოვიყენოთ სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნისას, სიდიდეების გამოსახვისას; რიცხვების კანონიკური დაშლა შეიძლება გამოვიყენოთ უმცირესი საერთო ჯერადისა (უსჯ) და უდიდესი საერთო გამყოფის (უსგ) პოვნისას; ნატურალური რიცხვების უსგ და უსჯ შეიძლება გამოვიყენოთ პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად; ნატურალური რიცხვები იყოფა მარტივ, შედგენილ რიცხვებად და გამოიყოფა რიცხვი 1, რომელიც არც მარტივი რიცხვია და არც შედგენილი; ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიმართება ნატურალურ რიცხვებში არის „მომდევნო“-ს მიმართება.</td><td>ნატურალური რიცხვები, მარტივი და შედგენილი რიცხვები; მარტივ მამრავლებად დაშლა; უმცირესი საერთო ჯერადი და უდიდესი საერთო გამყოფი.</td><td>რა გამოყენება აქვს ნატურალურ რიცხვებს? რა გამოყენება აქვს მარტივ მამრავლებად დაშლას?</td><td>კლასში: 1-14
საშინაო:
1 - 9</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს: ყოფითი მოვლენების განხილვისას, სიდიდეები წარმოადგინოს შესაბამისი რიცხვებით; რაოდენობის ჩაწერა, რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით (მათ. საშ. 1).</td></tr>
</table>

აქტივობები: საწყისი გაკვეთილები შესწავლილი საკითხების გამეორებას ეთმობა. სირთულის დონეების მიხედვით წარმოდგენილი ამოცანების მრავალფეროვნება საშუალებას გვაძლევს, სასწავლო პროცესი კონსტრუქტივისტული მეთოდითა და დიფერენცირებული სწავლების გამოყენებით წარვმართოთ. მასწავლებელს შეუძლია გამოიყენოს ტექსტში წარმოდგენილი კითხვები და გაახსენოს მოსწავლეებს გამყოფის, ჯერადის, მარტივი და შედგენილი რიცხვების ცნებები. ყურადღება გავამახვილოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სწორ კლასიფიკაციაზე (ამ ტერმინს არ ვიყენებთ), რიცხვი 1 არც მარტივი რიცხვია და არც შედგენილი. ძალიან მნიშვნელოვანია კომპლექსური დავალებების შესრულება და შემდეგ გაკვეთილებზე მოსწავლეების მოხსენებების მოსმენა მარტივი რიცხვების ცხრილების შედგენისა და გაყოფადობის ნიშნების შესახებ. აქ დაბალი მზაობის მოსწავლეებსაც ეძლევა საშუალება წარმოადგინონ, მაგალითად, გაყოფადობის ნიშნები, ისაუბრონ მარტივი რიცხვების მნიშვნელობის შესახებ. მაღალი მზაობის მოსწავლეები შეძლებენ 7-ზე და 11-ზე გაყოფადობის ნიშნების დასაბუთებას. მასწავლებელს შეუძლია, კლასის შესაძლებლობების გათვალისწინებით, დააკორექტიროს კომპლექსური დავალება. კომპლექსური დავალების შესრულება დამოუკიდებელი მუშაობის მნიშვნელოვანი ფორმაა, მოსწავლეები განიხილავენ საკითხის მეცნიერულ და ისტორიულ ასპექტებს, რაც ზრდის მათ მოტივაციას მათემატიკის შესწავლაში.

მნიშვნელოვანია უმცირესი საერთო ჯერადისა და უდიდესი საერთო გამყოფის პოვნის სხვადასხვა ხერხების გამოყენება; ეს პროცესი ავითარებს მოსწავლეთა კრიტიკული და ანალიზური აზროვნების უნარს; მნიშვნელოვანია იმის გააზრება, რომ მიმდინარეობს ახალი საკითხების შესწავლაც (მაგალითად, კანონიკური დაშლის) და მათი გამოყენებების ილუსტრაცია. მასწავლებელი შეახსენებს მოსწავლეებს, რომ საშუალო საფეხურზე მოსწავლეები იწყებენ უმაღლეს სასწავლებლებში ჩასაბარებლად მომზადებას და აღნიშნული ცნებები (უმცირესი საერთო ჯერადი, უდიდესი საერთო გამყოფი) შედის მათემატიკაში ერთიანი ეროვნული გამოცდების პროგრამებში. ამ ცნებების გააზრებას ხელს უწყობს ამოცანათა სისტემაში ჩართული პრაქტიკული (ცხოვრებისეული) ამოცანები ამ ცნებების გამოყენებაზე (კლასში 9, 11, საშინაო 7, 8, 9).

პირველი საათი შეიძლება დავუთმოთ ტექსტში წარმოდგენილი თეორიული მასალის ერთობლივ განხილვას (ინტერაქტიულ რეჟიმში); უდიდესი საერთო გამყოფისა და უმცირესი საერთო ჯერადის პოვნის ახალი ხერხების ათვისებას და ამ ხერხებით 3-5 ამოცანების ამოხსნას. ამოცანების ამოხსნა შეიძლება გაკვეთილზე დამოუკიდებელი წერის სახითაც ჩავატაროთ. ამასთანვე, შედარებით მაღალი მზაობის მოსწავლეებს შევთავაზოთ 1, 2 და 7 ამოცანები. პირველი საშინაო დავალებაც ანალოგიურია — 1-6 ამოცანები. ამოცანების დარჩენილი ნაწილი მეორე საათზე განიხილება.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

(1) აქ მოსწავლეები იხსენებენ რიცხვის 3-ზე გაყოფადობის ნიშანს. ნიშანი ორ დებულებაზე მიუთითებს — 1) თუ ნატურალური რიცხვი იყოფა 3-ზე, მაშინ ამ რიცხვის ციფრების ჯამიც იყოფა 3-ზე (არ არის აუცილებელი თითოეული ციფრი იყოფოდეს 3-ზე); 2) თუ რიცხვის ციფრების ჯამი იყოფა 3-ზე, რიცხვიც იყოფა 3-ზე. ამ ამოცანაში, ძირითადად, 1) დებულებას ვიყენებთ (ციფრების ქვეშ ვგულისხმობთ რიცხვებს, რომლებსაც ისინი წარმოადგენს).

(2) საკმარისია შევარჩიოთ რაიმე რიცხვი, რომელიც იყოფა 9-ზე, 4-ზე და 5-ზე.

(6) მოსწავლეები, კითხვებზე პასუხების მოძიებით, თანდათანობით პოულობენ ამოცანის ამოხსნის გზას — უნდა წარმოადგინოთ 224-ის კანონიკური დაშლა: $224=2^5\cdot 7$; ორივე მამრავლის გამყოფი არ შეიძლება იყოს 7, რადგან რიცხვი 49-ზე არ იყოფა. ამასთანავე, თუ უმცირესი იყოფა 7-ზე, მაშინ უდიდესი იყოფა 14-ზე; რაც შეუძლებელია. ე. ი. უმცირესი არ იყოფა 7-ზე, უდიდესიც არ იყოფა 7-ზე. მაშასადამე, უმცირესი და უდიდესის კანონიკური დაშლები მხოლოდ ორიანებს შეიცავს; მაშასადამე, უმცირესი არის 4, უდიდესი — 8. მესამე რიცხვი 7-ის ტოლია.

(7) ბ) აქ სასარგებლოა კონტრმაგალითის მითითება — 25 არ იყოფა 10-ზე, მაგრამ იყოფა 5-ზე.

(8) მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ შესაბამისი მაგალითების მოფიქრება: $3-2=1$, $5-3=2$. მათემატიკით დაინტერესებულ მოსწავლეებს შეიძლება შევთავაზოთ „ტყუპი“ მარტივი რიცხვების შესახებ ცნობების მოძიება.

(9) ერთობლივად განვიხილავთ პრაქტიკულ ამოცანას ნატურალურ რიცხვთა გაყოფადობაზე — თუ კომისიებში წევრების რაოდენობები ერთი და იგივეა, მაშინ ამ რაოდენობის გამომსახველი რიცხვი 100-ის გამყოფებს შორის უნდა ვეძებოთ; რადგან ამ რაოდენობის გამომსახველი უმცირესი რიცხვი 4-ია, ამიტომ კომისიების მაქსიმალური რაოდენობა იქნება 25. კომისიები წევრების რაოდენობის მიხედვით შეიძლება იყოს 5 სახის: 4-წევრიანი, 5-წევრიანი, 10-წევრიანი, 20-წევრიანი და 25-წევრიანი (100-ის გამყოფები, რომლებიც მეტია 2-ზე და ნაკლებია 50-ზე).

(10) ამოცანა სხვადასხვა ხერხით შეიძლება ამოხსნან მოსწავლეებმა; მაგალითად, ჩაწერონ ტოლობები: $a=9x$, $b=9y$ (მოცემული რიცხვებია a და b, x და y ურთიერთმარტივი რიცხვებია); მაშინ $9xy=162$, $xy=18$, აქედან ვიპოვით: $x=1$, $y=18$, $x=2$, $y=9$. თუმცა, ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება ზეპირი მსჯელობით მიაგნოს რიცხვებს, გაითვალისწინოს, რომ რიცხვების კანონიკური დაშლები არ შეიძლება შეიცავდეს 2-ისა და 3-სგან განსხვავებულ მარტივ გამყოფებს ($162=2\cdot 3^4$; $9=3^2$); თითოეულის 9-ზე გაყოფით მიღებული რიცხვების ნამრავლი კი არის 18.

(11) ეს ამოცანა უდიდესი საერთო გამყოფის პრაქტიკულ გამოყენებაზეა — ამანათების უდიდესი რაოდენობა გამოისახება რიცხვით, რომელიც არის 644-ისა და 960-ის უდიდესი საერთო გამყოფი, რიცხვი — 4. მეორე კითხვაზე პასუხის გასაცემად, უნდა ვიპოვოთ რიცხვები: 960:4 და 644:4.

(12) კლასის მოსწავლეთა შესაძლებლობის გათვალისწინებით, შეიძლება ჩავატაროთ ზოგადი მსჯელობა და შევამოწმოთ ჰიპოთეზა: თუ რიცხვი მარტივია, ის 6-ზე გაყოფისას გვაძლევს ნაშთს 1-ს, ან 5-ს.

6-ზე გაყოფის მიხედვით რიცხვები ექვსი სახისაა: $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$; აქ $k\geq 0$. თუ $k>0$, მაშინ მარტივი რიცხვი შეიძლება იყოს მხოლოდ $6k+1$, $6k+5$ სახის რიცხვები ($6k+2$ და $6k+4$ რიცხვები იყოფა 2-ზე, $6k+3$ — 3-ზე). რიცხვები $6k+2$ და $6k+3$ მარტივია, როცა $k=0$. $6k+5$ მარტივია $k=0$-თვისაც.

პირობაში მითითებულია 3-ზე მეტი ნატურალური რიცხვები — მაშასადამე, 3-ზე მეტი ნატურალური რიცხვებიდან მარტივი შეიძლება იყოს მხოლოდ $6k+1$ ან $6k+5$ სახის რიცხვები.

13 მათემატიკით დაინტერესებულ მოსწავლეებთან შეიძლება უფრო მეტი ვისაუბროთ სრულყოფილი რიცხვების, მათ შორის ლუწი სრულყოფილი რიცხვების წარმოდგენაზე. ზოგიერთმა მასწავლებელმა შეიძლება ეს საკითხიც ცალკე განსახილველ თემად გამოყოს; მასწავლებლებს შევახსენებთ, რომ ლუწი ნატურალური რიცხვი სრულყოფილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას აქვს სახე: $2^{p-1}(2^p-1)$, სადაც p და 2^p-1 მარტივი რიცხვები უნდა იყოს. თუ $p=2$, მივიღებთ პირველ სრულყოფილ რიცხვს 6-ს $(1+2+3+6=2\cdot6)$.

თუ $p=3$, მივიღებთ მეორე სრულყოფი რიცხვს: $4\cdot(8-1)=28$.

თუ $p=5$, მივიღებთ შემდეგ სრულყოფილ რიცხვს; $16\cdot31=496$.

მოსწავლეები კი ამოწმებენ, მაგალითად, 48-ის გამყოფებია: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

$1+2+3+4+6+8+12+16+24+48=124\neq2\cdot48$, 48 არ არის სრულყოფილი რიცხვი. მასწავლებელმა ისიც უნდა იცოდეს, რომ 48-ის გამყოფების რაოდენობა არის რიცხვი: $5\cdot2=10$ (რადგან $48=3\cdot2^4$); შესაბამისად, ყურადღებას მიაქცევს, ხომ არ გამოტოვა მოსწავლემ რომელიმე გამყოფი.

ამ თემის განხილვისას მოსწავლეებს დააინტერესებს ზოგიერთი ცნობა სრულყოფილი რიცხვების ძიების შესახებ. სახელდობრ, ამ რიცხვების ძიება ამჟამად ზემძლავრი კომპიუტერების გამოყენებით მიმდინარეობს. 2019 წლისთვის აღმოჩენილია მოლოდ 51-ე სრულყოფილი რიცხვი.

საშინაო დავალების ამოცანების ნაწილი კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია. მოსწავლეებმა მე-8 კლასში ისწავლეს და კლასში გაიხსენეს კონტრმაგალითის მეთოდით დებულების დასაბუთება — 1 ამოცანის ე) დავალებაში კონტრმაგალითია, მაგალითად, 20. 20 იყოფა 2-ზე და 4-ზე, მაგრამ არ იყოფა 8-ზე.

7 ეს ამოცანა უმცირესი საერთო ჯერადის პრაქტიკულ გამოყენებაზეა — შემდეგი ერთდროული დასვენების დღე 20 დღის შემდეგ იქნება; 20=უსჯ(4;5); 20 დღის შემდეგ ორივეს მოუწევს დასვენება.

8 ეს ამოცანა საერთო გამყოფების პრაქტიკულ გამოყენებაზეა — ამანათების რაოდენობის გამომსახველი რიცხვი 84-ის, 56-ისა და 112-ის საერთო გამყოფია. მაშასადამე, ეს რიცხვი შეიძლება იყოს 2, 4, 7, 14 ან 28.

9 I სასტუმროში თითო ოთახში საწოლების რაოდენობის გამომსახველი რიცხვი 108-ის გამყოფია, სავარძლების — 72-ის; ოთახების მაქსიმალური რაოდენობა არის უსგ(72; 108)=36 (თითოეულ ოთახში — 2 სავარძელი, 3 საწოლი). მეორე სასტუმროში ოთახების რაოდენობის გამომსახველი რიცხვი არის უსგ(96; 128)=32. თითოეულ ოთახში 3 სავარძელი და 4 საწოლია. ცხადია, 4-სულიან ოჯახს მეორე სასტუმროში ვურჩევდით გაჩერებას.

სახელმძღვანელოში კომპლექსური დავალებები თემის მიხედვითაა შერჩეული და წარმოადგენს შინაარსიან, მათემატიკის მეცნიერულ და ისტორიულ ასპექტებთან დაკავშირებულ დავალებებს. მათი შესრულება მოითხოვს სხვადასხვა ცოდნათა (მათემატიკის ისტორია და მეთოდოლოგია, მათემატიკური თეორიის შიგა კანონზომიერებები) ინტეგრირებულ გამოყენებას; კომპლექსური დავალებების შესრულება ხელს უწყობს დიფერენცირებული სწავლების უზრუნველყოფას, მოსწავლეთა ინდივიდუალური, შემოქმედებითი უნარების გამოვლენას; ეხმარება მოსწავლეებს სამიზნე ცნებებთან

დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენების უკეთ გააზრებაში, საშუალო საფეხურის მოსწავლეებს — გააზრებული არჩევანის გაკეთებაში, აირჩიონ ის მიმართულება, რომელიც უფრო ახლოს დგას მათ ინტერესებთან.

დიფერენცირებული მიდგომის გათვალისწინებით, მოსწავლეების ნაწილმა შეიძლება წარმოადგინოს ისტორიული მიმოხილვა (მაგალითად, მარტივი რიცხვებისა და მათი თვისებების შესახებ — ამ თეორიის შესწავლა და განვითარება ძველ საბერძნეთში, ძველი წელთაღრიცხვის VII-III საუკუნეებში დაიწყო). ზოგიერთი მოსწავლე შეძლებს დაასაბუთოს ისტორიულად ცნობილი, ჯერ კიდევ ძველ საბერძნეთში შექმნილი მარტივ რიცხვთა ცხრილების შედგენის მათემატიკური საფუძვლები — ყოველი ნატურალური რიცხვის უმცირესი გამყოფი, რომელიც 1-ზე მეტია, მარტივი რიცხვია. აქედან გამომდინარე, თუ მოცემულ რიცხვზე ნაკლები რიცხვების მწკრივში ამოშლილია ყველა შედგენილი რიცხვი, რომელიც იყოფა იმ მარტივ რიცხვზე, რომლის კვადრატი არ აღემატება ამ მოცემულ რიცხვს, მაშინ ამოშლილი იქნება ყველა შედგენილი რიცხვი, რომელიც ნაკლებია ამ რიცხვზე — რიცხვი თუ შედგენილია, მას აუცილებლად აქვს მარტივი გამყოფი, რომლის კვადრატი არ აღემატება ამ რიცხვს. ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება კონკრეტული მაგალითის მიხედვით იმსჯელოს. მაგალითად, პირველი 100 ნატურალური რიცხვი განიხილოს. შეიძლება სხვა საინტერესო საკითხების მოძიებაც; მაგალითად, ყოველთვის არსებობს მოცემულ ნატურალურ რიცხვზე მეტი მარტივი რიცხვი.

გაყოფადობის ნიშნების წარმოდგენა სწავლების დიფერენცირებული მიდგომის განხორციელებას უკავშირდება. მასწავლებელმა ყურადღება გაამახვილოს იმაზე, რომ ყოველი ნიშანი გაყოფადობის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოგვიდგენს. შეიძლება ვისაუბროთ გაყოფადობის ნიშნების მნიშვნელობაზე — კანონიკური დაშლისა და მისი გამოყენებების შესახებ.

ამ ნიშნის ილუსტრაცია რიცხვების ათობით ჩანაწერთან არის დაკავშირებული; „მოსწავლემ უნდა შეძლოს რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებებისა და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით..." (მათ. საშ. 1).

ყოველი რიცხვი შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $10a+x$, სადაც x ერთეულების თანრიგის ციფრია. თუ $a-2\cdot x$ იყოფა 7-ზე, მაშინ მოცემული $10a+x$ რიცხვიც იყოფა 7-ზე. მართლაც, თუ $a-2x$ იყოფა 7-ზე, მაშინ თუ გავითვალისწინებთ, რომ $10a+x=10a-20x+21x$, მივიღებთ: $10a+x$, ანუ მოცემული რიცხვი იყოფა 7-ზე.

ამრიგად, 7-ზე გაყოფადობის ნიშანი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: რიცხვი იყოფა 7-ზე, თუ მოცემული რიცხვის ჩანაწერში ერთეულების ჩამოცილებით მიღებული რიცხვისა და ერთეულების გაორკეცებით მიღებული რიცხვის სხვაობა იყოფა 7-ზე.

11-ზე გაყოფადობის ნიშანიც, მოსწავლეებმა შეიძლება ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისთვის დაასაბუთონ. გაყოფადობის ნიშნები გვეხმარება, რომ რიცხვი დავშალოთ მარტივ მამრავლებად, ვიპოვოთ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი, ამ ცნებებს კი მრავალი პრაქტიკული გამოყენება აქვს.

1.2. მთელი რიცხვები

თემა: რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში **სავარაუდო დრო:** 2 სთ			
სამიზნე ცნება და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები, კომპლექსური დავალება**
რიცხვები და მათი თვისებები; რიცხვებზე მოქმედებები; მთელი რიცხვებით შეიძლება გამოვსახოთ სხვადასხვა სიდიდე და ამოვხსნათ პრაქტიკული ამოცანები	მთელი რიცხვები; მოქმედებები მთელ რიცხვებზე, მოქმედებების ჩატარებისას ნიშნის განსაზღვრის წესი; ნაშთიანი გაყოფა	რა გამოყენება აქვს მთელ რიცხვებს; შეიძლება თუ არა მთელი რიცხვი სხვადასხვა სახით ჩავწეროთ?	**კლასში:** 1-17 **საშინაო:** 1 - 17
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რეალურ ცხოვრებაში, თუ ყოფითი მოვლენის განხილვისას სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით, რაოდენობის ჩაწერა, რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებებისა და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით (მათ. საშ. 1).			

აქტივობები: ნატურალური რიცხვებიდან მთელ რიცხვებზე გადასვლა რიცხვის ცნების გაფართოების ალგებრულ კონცეფციას უკავშირდება — ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ჩაკეტილია შეკრების მიმართ, გაფართოება საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილი იქნება გამოკლების ოპერაციის მიმართაც და შევძლებთ $a+x=b$ განტოლების ამოხსნას x-ის მიმართ.

ცხადია, ახალ რიცხვებზე გადასვლას ძველი მასალის გამეორებითა და განმტკიცებით ვიწყებთ. სწავლების პროცესი შეიძლება კონსტრუქტივისტული პრინციპების გამოყენებით წარიმართოს — მოსწავლეები იხსენებენ და თავად აგებენ ახალი მასალის შენობას — მთელი რიცხვების გამოსახვას რიცხვით წრფეზე, მთელ რიცხვებზე მოქმედებების ჩატარებას და მოქმედებების ჩატარებისას ნიშნის განსაზღვრის წესს. მნიშვნელოვანია ნაშთიანი გაყოფის განზოგადება და ილუსტრაცია რიცხვით წრფეზე. ამოცანები ისეა დალაგებული, რომ მოსწავლეებს ადვილიდან უფრო რთულზე გადასვლა არ გაუჭირდეთ. საწყისი „ტესტები“ წინა პარაგრაფში გავლილი მასალის გამეორებას ეთმობა. 1-4 ამოცანებით ვიმეორებთ ნატურალურ რიცხვებთან დაკავშირებულ საკითხებს. საკონტროლო კითხვებით კი აგებულ სიმრავლესა და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს შორის მიმართება გაიაზრება — ყოველი ნატურალური რიცხვი მთელი რიცხვია, მაგრამ არსებობს მთელი რიცხვი (მაგალითად, მთელი უარყოფითი რიცხვი), რომელიც არ არის ნატურალური რიცხვი. შემდეგი კითხვები ნიშნების განსაზღვრის წესების გამეორებას ემსახურება.

5-10 „ტესტები“ ნაშთიან გაყოფას უკავშირდება. უარყოფითი რიცხვების შემთხვევაში, სასარგებლოა მოდულის ჯერადის მიმატება — ამ დროს ნაშთი არ იცვლება, მაგალითად, -301-ის 31-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთის აღმოსაჩენად, საკმარისია განვიხილოთ რიცხვი: $(-301)+31\cdot10$.

დავალებებში უარყოფითი რიცხვების პრაქტიკულ გამოყენებებზეც არის გამახვილებული ყურადღება — „ბურთების სხვაობა“ შეიძლება უარყოფითი იყოს. სასაათო ზონების აღნიშვნისას უარყოფითი რიცხვები გამოიყენება. დიფერენცირებული სწავლების განხორციელებაში გვეხმარება 11-14 და 15-17* ამოცანები — მათ მოსწავლეთა მზაობის შესაბამისად ვიყენებთ. 16 და 17* ამოცანების განხილვით, მაღალი მზაობის მოსწავლეებისთვის უფრო საინტერესოს გავხდით სასწავლო პროცესს.

17* ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლემ უნდა აღმოაჩინოს ამოხსნის „მეთოდი“ — $17x-12y$ იყოფა 19-ზე, როგორ გადავიდეთ $(10x+3y)$-ზე? რადგან $17x-12y$ იყოფა 19-ზე, 19-ზე იყოფა $10(17x-12y)=17(10x+3y)-171y=17\cdot(10x+3y)-19\cdot9y$. მაშასადამე, $10x+3y$ იყოფა 19-ზე.

ანალოგიურად, ბ) დავალების შესრულებისას, თუ $17x+3y$ იყოფა 61-ზე, მაშინ $8(17x+3y)$ იყოფა 61-ზე. მაგრამ $8(17x+3y)=17(8x+5y)-61y$. მაშასადამე, $8x+5y$ იყოფა 61-ზე. აქ კარგად ჩანს სვლა: $17x+3y \rightarrow 8x+5y$.

ანალოგიურია 17* ამოცანის ამოხსნის გზა: რადგან $19x+5y$ იყოფა 36-ზე, ამიტომ $8(19x+5y)$ იყოფა 36-ზე. ცხადია, $8(19x+5y)=19(8x+4y)-36y$. მაშასადამე, $8x+4y$ იყოფა 36-ზე.

საშინაო დავალების 1-5 „ტესტები“ ნაშთიანი გაყოფის გამეორებას ემსახურება; 5-8 — ნატურალური რიცხვების თვისებების გამეორებას.

9-15 სავარჯიშოებით მოსწავლეები განიმტკიცებენ საკუთარ ცოდნას მთელ რიცხვებზე მოქმედებების ჩატარების შესახებ.

პროექტების განხილვას შეიძლება 1 გაკვეთილი დავუთმოთ და ვისაუბროთ სასაათო დროის მიხედვით სასაათო სარტყლის შესახებ; მოგზაურობისას, სასაათო სარტყლების ცოდნის მნიშვნელობის შესახებ; საქართველოში მოქმედი სისტემის შესახებ; რატომ არის უფრო ადვილი ევროპის ქვეყნების ჩემპიონატებისთვის, ან იქაური სიახლეებისთვის თვალის მიდევნება? რამდენი საათია განსხვავება ჩვენსა და შუაევროპულ დროს შორის? როგორ იცვლება ეს დრო ზამთრის პერიოდში? ამ კითხვებზე პასუხების მოძიება განსაკუთრებით საინტერესო უნდა იყოს სპორტის მოყვარული მოსწავლეებისთვის.

1.3. რაციონალური რიცხვები. რაციონალური რიცხვების ჩაწერის სხვადასხვა ფორმა. პროცენტი

<table>
<tr><td colspan="4">თემა: რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში
სავარაუდო დრო: 3 სთ</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნება და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვები</th><th>დავალებები</th></tr>
<tr><td>რიცხვები და მათი თვისებები; რიცხვებ-ზე მოქმედებები. რა-ციონალური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს წილადის, ათწილადის (სასრული ან უსას-რულო პერიოდული ათწილადის) სახით; პროცენტიც რაციონ-ალური რიცხვის ჩაწ-ერის ერთ-ერთ ფორ-მად მიიჩნევა. რიცხ-ვები შეიძლება გამოვ-იყენოთ სიდიდეებისა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდო-ბის ჩასაწერად.</td><td>რაციონალური რიცხვები; მოქმედე-ბები რაციონალურ რიცხვებზე. პროცენ-ტი, სიდიდის პრო-ცენტის პოვნა, პრო-ცენტით სიდიდის პოვნა, პროცენტული შეფარდება. რაციო-ნალური რიცხვის ჩაწერა სხვადასხვა ფორმით</td><td>შეიძლება თუ არა ყოველი რაციონალური რიცხვი ჩაიწ-ეროს წილადის სახით, ათ-წილადის სახით? რა სახის ათ-წილადით შეი-ძლება ჩაიწეროს რაციონალური რიცხვი? რა შემთხვევა-ში ჩაიწერება უკვეცი წილადი სასრული ათ-წილადის სახ-ით? უსასრულო პერიოდული ათ-წილადის სახით?</td><td>კლასში: 1-23
საშინაო: 1 - 24</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რაოდენობის ჩაწერა რიცხვებით, რიცხვითი გამოსახულებებისა და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით.</td></tr>
</table>

აქტივობები: რიცხვების გამეორებისა და რიცხვებზე ცოდნის გაღრმავების I ეტაპი მთავრდება რაციონალური რიცხვების განხილვითა და მარტივი რიცხვების გამოყენებასთან დაკავშირებული კომპლექსური დავალების შესრულებით. პირველ გაკვეთილზე ვაჯამებთ ცოდნას ნატურალური რიცხვებისა და მთელი რიცხვების შესახებ, ვიწყებთ რაციონალური რიცხვების თვისებების გამეორებას. პირველ 15 წუთში, დავალების შემოწმებასთან ერთად, თვალს გადავავლებთ, როგორ უძლვებიან მოსწავლეები რიცხვების შესახებ მასალის გამეორების პროცესს; ყურადღებას ვამახვილებთ გამოყენებით ასპექტებზე. პროცესი შეიძლება კითხვების დასმითა და მოსწავლეების პასუხების ანალიზით მიმდინარეობდეს.

— რას წარმოვადგენთ ნატურალური რიცხვებით? კიდევ სად ვიყენებთ ნატურალურ რიცხვებს (რაოდენობის გამოსახვისა და რიგის დადგენისას)?

— შემდეგ რა რიცხვების შესწავლა დავიწყეთ (დადებითი რაციონალური რიცხვების)?

— რა პრაქტიკული გამოყენებები აქვს დადებით რაციონალურ რიცხვებს (ვიყენებთ სიდიდეების რიცხვითი მახასიათებლების წარმოსადგენად, სიდიდეების ზომების დადგენისას)?

მოსწავლეებს ვესაუბრებით შესასრულებელი კომპლექსური დავალებისა და მისი შესრულების მნიშვნელობაზე.

შემდეგ გადავდივართ დადებითი რაციონალური რიცხვების გეომეტრიული წარმოდგენების, გეომეტრიული წარმოდგენებით მოქმედებების თვისებების აღწერაზე.

მნიშვნელოვანია რაციონალური რიცხვების სვადასხვა წარმოდგენის აღწერა და გააზრება. მოსწავლეებმა უნდა გაიაზრონ, რომ ერთი და იმავე რიცხვის ჩაწერა შეიძლება სხვადასხვა სახით და ყველა ეს ჩანაწერი ამავე რიცხვს წარმოადგენს; **აუცილებელია გავარჩიოთ რიცხვი ჩანაწერისგან.** რაციონალური რიცხვის ცნების (მათ შორის, დადებითი რაციონალური რიცხვის) ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრება სკოლაში არ განიხილება. მასწავლებელს უნდა ახსოვდეს მოსამზადებელი კურსებიდან და უმაღლესი სკოლიდან, რომ რაციონალური რიცხვების შემოღება შეიძლება წილადების სიმრავლეში ეკვივალენტობის მიმართების შემოღებითა და ეკვივალენტობის კლასების საშუალებით; შეიძლება აქსიომურადაც — თვისებების ჩამოთვლით და მათი აქსიომებად გამოცხადებით. მოსწავლეები უნდა გავაფრთხილოთ, რომ, ხშირად, ინტერნეტში წარმოდგენილი მასალა, რომელიც შეიძლება „საეჭვო სიმკაცრის“ წიგნებიდან იყოს ამოღებული, არ არის ზუსტი. მკიდრი წარმოდგენები რაციონალურ რიცხვებზე შეიძლება მოკლედ მათი ჩაწერის სხვადასხვა ფორმით გამოიხატოს; რაციონალური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს წილადის, ათწილადის (სასრული და უსასრულო პერიოდული ათწილადის) სახით, შეიძლება წარმოვადგინოთ პროცენტით. უსასრულო პერიოდულ ათწილადად ჩაწერის პროცესი დაწვრილებითაა აღწერილი ტექსტში. ამასთანავე, სასრული ათწილადიც უსასრულო პერიოდული ათწილადის ერთ-ერთი სახეა (პერიოდი ნულია). იმაზეც გავამახვილოთ ყურადღება, რომ ჩაწერის ერთადერთობის დასამკვიდრებლად, 9-ს პერიოდად არ ვიყენებთ. მაგალითად, $4{,}(9)=4\frac{9}{9}=5=5{,}(0)$. მაშასადამე, აქ პერიოდად ვიყენებთ ნულს და 5-ს პერიოდული ათწილადის სახით ჩავწერთ ერთადერთი ფორმით: $5=5{,}(0)$.

რაციონალური რიცხვის ჩაწერის სხვადასხვა ფორმის შესაძლებლობის გააზრების განმტკიცებას ხელს უწყობს 2-7, 9-11 და 9-11 ამოცანების ამოხსნა.

პროცენტის გააზრებას ემსახურება 6-7, 17-18 და 7-8, 21 ამოცანები. დანარჩენი ამოცანები რიცხვებზე მოქმედებების შესრულებასა და რიცხვების გეომეტრიულ გამოსახვებს ეხება. 3 „ტესტი“ მოდულის ცნებას გვახსენებს, რაციონალური რიცხვის მოდული საკოორდინატო წრფეზე შესაბამისი წერტილიდან სათავემდე მანძილს გამოსახავს.

პროცენტებზე ამოცანები მოსწავლეებმა შეიძლება სხვადასხვა ხერხით ამოხსნან. 18 25%-იანი ფასდაკლების შემდეგ კაბა 150 ლარი ღირს, მაშასადამე, 150 ლარი შეადგენს ფასის 75%-ს, პროცენტით რიცხვი უნდა ვიპოვოთ: $150:75\%=\frac{150}{70}\cdot 100=200$. მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ სამივე შემთხვევის (პროცენტის პოვნა, პროცენტით სიდიდის პოვნა, პროცენტული შეფარდება) განხილვა. მაგალითად, თუ რიცხვის 3% არის 30, მაშინ ეს რიცხვი რომ ვიპოვოთ, უნდა შევასრულოთ გაყოფა: 30:0,03. ამ რიცხვის საპოვნელად

ზოგიერთებმა შეიძლება განტოლება მოიშველიონ: $x \cdot 0{,}03 = 30$. („ტესტი" 8). რიცხვის 400% რომ ვიპოვოთ, ეს რიცხვი უნდა გავამრავლოთ 4-ზე („ტესტი" 7).

15, 16 ამოცანების ანალოგიური ამოცანებია საშინაო დავალების 15 და 16 ამოცანები. ამიტომ კლასში აღნიშნული ამოცანების განხილვა დაეხმარება მოსწავლეებს დავალების შესრულებაში.

პროექტი „დასაბუთების ხერხები" უშუალოდ უკავშირდება ნამდვილი რიცხვების შემოღების ისტორიულ ასპექტებს, კავშირს მონაკვეთების თანაზომადობასთან და დასაბუთების მნიშვნელოვანი ხერხის — საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხის ისტორიული ნაირსახეობების განხილვას. დებულებათა დასაბუთება და დასაბუთების ხერხების ცოდნა მათემატიკის განუყოფელი ნაწილია; მათემატიკის მეცნიერებად ჩამოყალიბება მაშინ დაიწყო (ძველ საბერძნეთში VII-V საუკუნეებში ძველი წელთაღრიცხვით), როცა გაჩნდა დამტკიცებები. საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხის ნაირსახეობაც — უსასრულო დაშვების ხერხი, რომელიც კვადრატის გვერდისა და დიაგონალის არათანაზომადობის დამტკიცებისას გამოიყენებოდა, იმ პერიოდში ჩამოყალიბდა. თუმცა, ეს ხერხი XVII საუკუნეში ფერმამ განავითარა რიცხვთა თეორიის დებულებების დამტკიცების დროს. მოსწავლემ უნდა შეძლოს რეფერატის სახით წარმოადგინოს დასაბუთების ამ ხერხის გამოყენების მაგალითები, სხვადასხვა ფესვის ირაციონალურობის დამტკიცების მაგალითები და ირაციონალურობის გეომეტრიული ასპექტები. ამ კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა რამდენიმე პარაგრაფის წინ შევთავაზეთ მოსწავლეებს — ნამდვილი რიცხვების შესახებ შემაჯამებელი მეცადინეობის შემდეგ, ისინი შეძლებენ ნაშრომის შესრულებას და წარმოდგენას.

ძალიან მნიშვნელოვანია მეორე პროექტის შესრულება. ეს დავალება უკავშირდება რიცხვების მნიშვნელოვან გამოყენებებს და პასუხობს ცოდნის შეფასების ინდიკატორს: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სხვადასხვა ყოფითი მოვლენის განხილვისას სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით; სიდიდეებსა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდობის გამოთვლა (მათ. საშ. 1).

მოსწავლემ უნდა შეადგინოს სიგრძის, ფართობის, მოცულობის, მასის ერთეულების ცხრილები მეტრულ და არამეტრულ სისტემებში; მაგალითად, წარმოდგენილი უნდა იყოს სიგრძის არამეტრული ერთეულებიც, დიუმი (ინჩი), ფუტი, იარდი და მათი კავშირები მეტრთან, სანტიმეტრთან; მასის ერთეულები — სტოუნი, ფუნტი, უნცია და მათი კავშირები კილოგრამთან; ფართობის ერთეულები აკრი, (იარდი)^2, (ფუტი)^2, (დიუმი)^2 — მათი კავშირები ცნობილ ერთეულებთან და მათი ურთიერთკავშირები შედგენილი ცხრილების გამოყენებით, მოსწავლე შეძლებს კომპლექსურ დავალებაში მითითებული ამოცანების ამოხსნას და ანალოგიური ამოცანების შედგენას.

მოსწავლეებს მოუწევთ ზომის ძველქართული ერთეულების დასახელებათა მოძიება და მათი აღწერა ზომის თანამედროვე ერთეულებით.

1.4. კვადრატული ფესვი. ირაციონალური რიცხვები

თემა: რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში
სავარაუდო დრო: 2 სთ

სამიზნე ცნება და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	დავალებები
სიდიდეები, რიცხვები, მათი თვისებები, რიცხვითი გამოთვლები. რიცხვი შეიძლება სვადასხვა ეკვივალენტური სახით ჩაიწეროს; ყოველი ირაციონალური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით; თუ ნატურალური რიცხვი არ	კვადრატული ფესვი, ირაციონალური რიცხვი, ირაციონალური რიცხვის ჩაწერა უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით; კვადრატული ფესვის შემცველი გამოსახულების ჩაწერა სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმით	არსებობს თუ არა მონაკვეთი, რომლის სიგრძე რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება? შეიძლება თუ არა დავასახელოთ ირაციონალური რიცხვი,	**კლასში:** 1-14 **საშინაო:** 1 - 15
არის რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატი, მაშინ კვადრატული ფესვი ამ ნატურალური რიცხვიდან ირაციონალური რიცხვია; არსებობს ირაციონალური რიცხვი, რომელიც რაიმე რაციონალური რიცხვიდან კვადრატული ფესვი არ არის. ნებისმიერი მონაკვეთის სიგრძის გამოსახვა შეიძლება რაციონალური ან ირაციონალური რიცხვით.		რომელიც კვადრატულ ფესვს არ უკავშირდება?	

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით; სხვადასხვა საკვლევი თუ ყოფითი მოვლენის განხილვისას, რაოდენობის ჩაწერა; რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებების და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით.

აქტივობები: საკლასო აქტივობები საშინაო დავალების შემოწმებითა და ანალიზით იწყება; ამ შემოწმების პარალელურად, მიმდინარეობს რიცხვის ცნების გაფართოების სხვადასხვა ასპექტის გააზრება და „ახალი“ რიცხვების შემოღების ალგებრული და პრაქტიკული საფუძვლების განხილვა. ალგებრული საფუძველი უკავშირდება კვადრატული ფესვის გამოსახვას — შეუძლებელია რაციონალური რიცხვით გამოვსახოთ კვადრატული ფესვი 2-დან, არ არსებობს ნატურალური რიცხვები, რომელთა კვადრატების შეფარდება 2-ის ტოლია. მოსწავლეები იცნობენ ამ დებულების დასაბუთებას საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით, ამჯერად, კანონიკური დაშლის შესაძლებლობას ვიყენებთ. პრაქტიკული ასპექტი უკავშირდება იმის გააზრებას, რომ არსებობს მონაკვეთი, რომლის სიგრძეს ვერ გამოვსახავთ სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადით.

მაგალითად, თუ დავიწყებთ 1-ის ტოლი კათეტის მქონე ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის გაზომვის პროცესს, მაშინ შემდეგი სურათი მიიღება: ამ მონაკვეთზე ერთეულის სიგრძის მონაკვეთი ერთხელ მოთავსდება (გადავდოთ A-დან მარჯვნივ $AA_1=1$; შემდეგ A_1B მონაკვეთზე, რომელიც 1-ზე ნაკლებია, გადავდებთ ერთეულის $\frac{1}{10}$-ს, ის 4-ჯერ მოთავსდება და დაგვრჩება A_2B მონაკვეთი,

რომლის სიგრძე $\frac{1}{10}$-ზე ნაკლებია. აქ გადავდებთ ერთეულის $\frac{1}{100}$ სიგრძის მონაკვეთებს და ა. შ. ეს პროცესი არ დასრულდება. AB-ს სიგრძე ჩაიწერება ათწილადით, 1,41... ყოველი რაციონალური რიცხვი, ვიცით, რომ სასრული ათწილადით, ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით ჩაიწერება. მოცემული მონაკვეთის სიგრძე რაციონალური რიცხვით რომ გამოისახებოდეს, მივიღებდით სასრულ ან უსასრულო პერიოდულ ათწილადს. მაგრამ ჰიპოტენუზის სიგრძე არ გამოისახება რაციონალური რიცხვით, ამიტომ გაზომვის პროცესი მოგვცემს **უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს**. ვხედავთ, რომ პრაქტიკული მიზნის განხორციელებისას (გაზომვის პროცესისას) **რაციონალური რიცხვები** საკმარისი არ არის; ეს ერთ-ერთი ასპექტია — რიცხვის ცნების გაფართოების თვალსაზრისით. მოსწავლეებთან ვაგრძელებთ საუბარს π რიცხვის შესახებ, რომელიც ირაციონალური რიცხვის ერთ-ერთი მაგალითია. π რიცხვის ირაციონალურობისა და არაალგებრულობის (π არ არის ალგებრული ანუ არ არის მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვი) დასაბუთება სკოლაში არ განიხილება.

მოსწავლეებმა კარგად უნდა გააზრონ ირაციონალური რიცხვების შემოღების ალგებრული და გეომეტრიული „მიზეზები“.

კერძოდ, არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია; არ არსებობს მონაკვეთი, რომლის სიგრძე რაციონალური რიცხვით გამოისახება და მთელ რიცხვჯერ განთავსდება ერთის ტოლი კათეტის მქონე ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაში, ანუ ამ სამკუთხედის კათეტი და ჰიპოტენუზა უთანაზომო მონაკვეთებია.

საკონტროლო კითხვებით კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ, რომ ყოველი რაციონალური რიცხვი ჩაიწერება სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით, ყოველი ირაციონალური რიცხვი — უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით. გამოსახვის ფორმები საშუალებას გვაძლევს ავხსნათ 3. ა) კითხვის პასუხი — უსასრულო პერიოდული ან სასრული ათწილადები წილადების სახით ჩაიწერება; წილადების ჯამი, წილადია, წილადი რაციონალურ რიცხვს წარმოგვიდგენს; ბ) კითხვას კონტრმაგალითის გამოყენებით ვპასუხობთ: მაგალითად, ურთიერთმოპირდაპირე ირაციონალური რიცხვების ჯამი არ არის ირაციონალური რიცხვი — $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})$, გ) კითხვაზე პასუხს კი ასე დავასაბუთებთ:

თუ α ირაციონალურია და $\frac{m}{n}+\alpha=\frac{p}{q}$, მაშინ მივიღებთ წინააღმდეგობას — α წილადის სახით ჩაიწერება ($\alpha=\frac{p}{q}-\frac{m}{n}=\frac{pn-mq}{nq}$) (აქ ყველგან წილადების ქვეშ ვგულისხმობთ მთელი რიცხვისა და ნატურალური რიცხვის შეფარდებას).

კლასში შესასრულებელი ამოცანების გამოყენებით, მოსწავლეები განიმტკიცებენ ცოდნას რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების ჩაწერისა და კვადრატული ფესვების შემცველი გამოსახულებების გამარტივების შესახებ (1-9 ამოცანები); საშინაო დავალების 1-11 ამოცანები ანალოგიურია.

მოსწავლეებმა კარგად უნდა გაიაზრონ, რომ, თუ n არ არის ნატურალური რიცხვის კვადრატი, მაშინ $\sqrt{n}$ ირაციონალური რიცხვია; ეს ფაქტი შეიძლება სხვადასხვა ხერხით ვაჩვენოთ; შეიძლება კანონიკური დაშლის გამოყენებაც: თუ $\sqrt{n}=\frac{a}{b}$, $a^2=b^2n$; რადგან n არ არის ნატურალური რიცხვის კვადრატი, ამიტომ მის კანონიკურ დაშლაში აუცილებლად შედის ერთი მაინც მარტივი რიცხვი კენტ ხარისხში. ეს კი ეწინააღმდეგება აღნიშნულ ტოლობას. ამ დებულების შედეგია 10 ამოცანის ა) შემთხვევა. მაგრამ, თუ $n=k^2$ ($n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{N}$), მაშინ $\sqrt{n}$ არ არის ირაციონალური რიცხვი (ამოცანა 10, ბ)).

11 მაგალითად, ა) $\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})=1$;
ბ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{36}=6$.

12 $\sqrt{11}$ ირაციონალური რიცხვია, უსასრულო პერიოდული ათწილადი კი — რაციონალური.

13 π რიცხვი ირაციონალური რიცხვია, ის არ არის ტოლი არც 3,14-ის და არც ($\frac{22}{7}$)-ის — რაციონალური რიცხვების.

14 მოსწავლეები იხსენებენ წრის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულებს, პითაგორას თეორემას, შეადგენენ შესაბამის გამოსახულებებს და ამტკიცებენ დებულებას — კათეტებზე აგებული ნახევარწრეების ფართობების ჯამი ჰიპოტენუზაზე აგებული ნახევარწრის ფართობის ტოლია.

საშინაო დავალების 12-14 ამოცანების ანალოგიური ამოცანები კლასში იყო განხილული.

15* ამოცანაში დასმულ კითხვაზე უარყოფით პასუხს წარმოგვიდგენს უმარტივესი მაგალითი: $\sqrt{2}$ და $-\sqrt{2}$ ირაციონალური რიცხვების არითმეტიკული საშუალო ნულის ტოლია — რაციონალური რიცხვია.

ჯგუფური დავალება აჯამებს მოსწავლეთა მიერ ირაციონალური რიცხვების ჩაწერის შესახებ წარმოდგენების გააზრებას; მასწავლებელს ეძლევა საშუალება შეამოწმოს მოსწავლეთა მიერ დასაბუთების ხერხების გამოყენების ათვისების დონე. ჯგუფური დავალების შესრულება მოითხოვს სხვადასხვა ცოდნათა ინტეგრირებულ გამოყენებას (რიცხვების წარმოდგენა სხვადასხვა ფორმით, რიცხვების პრაქტიკული გამოყენება სიდიდეების ზომების პოვნისას, დასაბუთების ხერხების გამოყენება). მოსწავლეები ცდილობენ ახსნან, რატომ არ შეიძლება იყოს, მაგალითად, 10,10110111011110... პერიოდული ათწილადი; მსჯელობენ — რა ციფრებისგან შეიძლება შედგებოდეს პერიოდი? ნებისმიერი ნატურალური k-სთვის, არსებობს თუ არა ადგილი, სადაც გვექნება k ცალი ერთიანი? აისახება თუ არა ერთიანების სულ უფრო მზარდი რაოდენობა პერიოდის არსებობაზე? მივცეთ საშუალება მოსწავლეთა ჯგუფებს, იმსჯელონ, გააანალიზონ, განიხილონ სხვადასხვა შემთხვევა.

1.5. ნამდვილი რიცხვები და მათი თვისებები

თემა: რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში
სავარაუდო დრო: 2 სთ

სამიზნე ცნება და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	დავალებები
სიდიდეები, რიცხვები, მათი თვისებები, მოქმედებები რიცხვებზე. ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს სხვადასხვა სახით: $\frac{m}{n}$ წილადით (m მთელია, n — ნატურალური), შეიძლება	ნამდვილი რიცხვები, ნამდვილი რიცხვების ჩაწერა; შედარება; მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე; გამოსახვა საკოორდინატო წრფის წერტილებით.	რა სახით შეიძლება ჩაიწეროს რაციონალური რიცხვი, რა სახით შეიძლება ჩაიწეროს ირაციონალური რიცხვი?	**კლასში:** 1-12 **საშინაო:** 1 - 12
ჩაიწეროს პერიოდული უსასრულო ათწილადით (მათ შორის, სასრული ათწილადით); ყოველი ირაციონალური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით. ირაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებებს ვატარებთ მიახლოებითი მნიშვნელობების გამოყენებითაც		რა სიმრავლეა რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანება?	

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით; რაოდენობის ჩაწერა; რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებებისა და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით (მათ. საშ. 1).

აქტივობები: პარაგრაფში შესული ცნებები მოსწავლეებისთვის ცნობილია; პარაგრაფის ძირითადი დანიშნულებაა ნამდვილი რიცხვების შესახებ იმ საკითხების სისტემაში მოყვანა და გამეორება, რომლებიც წინა პარაგრაფებში იყო განხილული.

კიდევ ერთხელ, მოსწავლეებთან ერთად, თვალი გადავავლოთ რიცხვის ცნების განვითარების გზას, რომელიც წინა გაკვეთილებზე, ირაციონალური რიცხვების შემოღების ალგებრული და გეომეტრიული თვალსაჩინოების გამოყენებით აღვწერეთ. ამიტომ გაკვეთილის პირველი 15 წუთი ამ პროცესის ბოლო მონაკვეთის გამეორებას ეთმობა. კითხვები შეიძლება ტექსტიდან შევარჩიოთ; მოსწავლემ კარგად უნდა გაიაზროს ირაციონალური რიცხვების შემოღების პრაქტიკული ასპექტები — ყველა მონაკვეთის

სიგრძის გამოსახვა შეუძლებელია რაციონალური რიცხვით, არსებობს მონაკვეთები, რომელთა სიგრძე გამოისახება ირაციონალური რიცხვით.

— დაასახელეთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძე გამოისახება $\sqrt{2}$-ით.

— როგორ ავაგოთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძე $\sqrt{2}$-ის ტოლია?

— როგორ შეიძლება საკოორდინატო წრფეზე ვიპოვოთ წერტილი, რომელიც $\sqrt{2}$-ით გამოისახება.

— რა სახის ათწილადებით გამოისახება რაციონალური რიცხვები?

— რა სახის ათწილადებით გამოისახება ირაციონალური რიცხვები?

მოსწავლეებთან ერთად ვაჯამებთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის აგების პროცესს: რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს ნამდვილი რიცხვები ეწოდება.

უსასრულო ათწილადების საკოორდინატო წრფის წერტილებით გამოსახვის პროცესი მოსწავლეების დახმარებით წარმოვადგინოთ. ავაგებთ საკოორდინატო წრფეზე წერტილს, რომელიც მოცემულ უსასრულო ათწილადს: $\alpha=1{,}2507....$ რიცხვს შეესაბამება. ეს პროცესი ჩვენ წინა გაკვეთილების ახსნის დროსაც წარმოვადგინეთ: გადავზომავთ 1-ის ტოლ მონაკვეთს და დარჩენილ ნაწილში (1-სა და 2-ს შორის) 1-დან მარჯვნივ — მეათედის ტოლ მონაკვეთს 2-ჯერ გადავდებთ; შემდეგ, 1,2-სა და 1,3-ს შორის მონაკვეთზე, 1,2-დან გადავდებთ მეასედის ტოლ მონაკვეთს 5-ჯერ. ეს პროცესი გრძელდება. თუ უსასრულო ათწილადი პერიოდულია, მაშინ მოიძებნება ერთეულის ნაწილი, რომლის მთელ რიცხვჯერ გადადების შემდეგ მიიღება P წერტილი. მაგალითად, წერტილი, რომელიც 1,(3) უსასრულო პერიოდულ ათწილადს გამოსახავს, მიიღება ერთეულის მესამედის 4-ჯერ გადადების შემდეგ $(1,(3)=\frac{4}{3}=4\cdot\frac{1}{3})$. მაგრამ, არსებობს წერტილები, რომლებიც არ შეესაბამება რაციონალურ რიცხვებს; მაგალითად, $\sqrt{2}$-ის ტოლი სიგრძის მონაკვეთის გადადებით სათავიდან მარჯვნივ, მიიღება წერტილი, რომელიც შეესაბამება ირაციონალურ რიცხვს — $\sqrt{2}$-ს. ანალოგიურად, თუ ჩვენი უსასრულო ათწილადი 1,2507.... არაპერიოდული ათწილადია, მაშინაც არსებობს მონაკვეთი, რომლის სიგრძე ამ რიცხვით გამოისახება (ირაციონალური რიცხვით) და მისი გადადებით სათავიდან მარჯვნივ მიიღება P წერტილი, რომელიც ამ ირაციონალურ რიცხვს შეესაბამება.

ამის შემდეგ გადავდივართ ნამდვილი რიცხვების შედარებისა და ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების ჩატარებაზე. შედარების წესს ათწილადებისთვის მოსწავლეები იცნობენ, ამიტომ არ გაუჭირდებათ ანალოგიური წესის გამოყენება ნამდვილი რიცხვების შედარებისას, როცა ეს რიცხვები ათწილადებითაა წარმოდგენილი.

ნამდვილ რიცხვთა შეკრების წესს მაგალითის განხილვით წარმოვადგენთ. ვთქვათ, გვაქვს ორი ნამდვილი რიცხვი:

$$\alpha=1{,}23001..., \quad \beta=0{,}78044...$$

α რიცხვის ათობითი მიახლოებები ნაკლებობით და მეტობით აღვნიშნოთ: x_n და x_n'-ით; $x_1=1;\ x_2=1{,}2;\ x_3=1{,}23;\ x_4=1{,}230;\ x_5=1{,}2300;\ x_6=1{,}23001.$

$$x_1'=2; \quad x_2'=1{,}3; \quad x_3'=1{,}24; \quad x_4'=1{,}231; \quad x_5'=1{,}2301; \quad x_6'=1{,}23002;$$

β რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობები იყოს: $y_1=0;\ y_2=0{,}7;\ y_3=0{,}78;\ y_4=0{,}780;$ $y_5=0{,}7804;\ y_6=0{,}78044.$

$$y_1'=1; \quad y_2'=0{,}8; \quad y_3'=0{,}79; \quad y_4'=0{,}781; \quad y_5'=0{,}7805; \quad y_6'=0{,}78045.$$

მაშასადამე, იმისგან დამოუკიდებლად, რისი ტოლი იქნება α და β-ს შემდეგი ათობითი ნიშნები, გვექნება:

$$x_6+y_6=2{,}01045\le x+y<x_6'+y_6'=2{,}01047$$

ჯამისთვის შეგვიძლია დავწეროთ ოთხი ნიშანი მძიმის შემდეგ:

$$x+y=2{,}0104....$$

შეიძლება მოსწავლეებმა შეძლონ შეკრების წესის ჩამოყალიბება: α და β ნამდვილი რიცხვების ჯამი არის ისეთი ნამდვილი γ რიცხვი, რომელიც ნებისმიერი მთელი არაურყოფითი n-ისთვის აკმაყოფილებს პირობას:

$$x_n+y_n\leq\gamma<x_n'+y_n',$$

სადაც x_n არის α-ს ათობითი მიახლოებები ნაკლებობით, x_n' — მეტობით; y_n არის β-ს ათობითი მიახლოებები ნაკლებობით, y_n' — მეტობით.

მოსწავლეებმა უნდა გაიაზრონ, რომ, როგორც წესი, შეკრება მიახლოებით მნიშვნელობებზე (სასრულ ათწილადებზე) ხდება და ჯამსაც მიახლოებით გამოვსახავთ (ათწილადის სახით). ანალოგიურად ვასრულებთ გამრავლებასაც.

კლასში ამ მაგალითის განხილვა დაეხმარება მოსწავლეებს 11 ამოცანის ამოხსნაში. ნამდვილი რიცხვების შედარებაზე ვარჯიშს ემსახურება 8, 10 და 8 - 10 ამოცანები.

9 ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლემ უნდა შეძლოს ათწილადი ნიშნების ჯგუფებად დაყოფა (ხუთ-ხუთ ციფრად) და შედარება. აქ იგი იყენებს კარგად ცნობილ ხერხს (ირაციონალური რიცხვების ჩაწერის) ამ ხერხის შეხსენება 2 „ტესტის" განხილვის დროს ხდება. კლასში ეს „ტესტი" დაწვრილებით გავარჩიოთ და ვთხოვოთ მოსწავლეებს დაასახელონ არაპერიოდული უსასრულო ათწილადები, რომლებიც ირაციონალურ რიცხვებს წარმოადგენს; შეიძლება ასეთი რიცხვების შედგენის კანონზომიერებებზე ვისაუბროთ: მძიმის შემდეგ სახელდება რაიმე ციფრი, შემდეგ განსხვავებული ერთი ციფრი, მეორდება პირველი ციფრი, შემდეგ 2-ჯერ ვწერთ მეორე ციფრს, მეორდება პირველი ციფრი, შემდეგ 3-ჯერ ვწერთ მეორე ციფრს და ა. შ.

ამ ხერხს ხშირად ვიყენებთ უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის დასაწერად.

9 ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლემ რიცხვები ასე უნდა ჩაწეროს:

0,00112	00112	00112	|	001120
0,00112	00112	00112	|	112112

ახლა ზემოთ აღნიშნული წესის მიხედვით, ადვილად შევადგენთ ირაციონალურ რიცხვს, რომელიც ამ ორ რიცხვს შორისაა:

0,00112	00112	00112	|	01001000100001...

6 ამოცანა მიუთითებს მთელ რიცხვთა სიმრავლის „ჩაკეტილობაზე" შეკრების, გამრავლებისა და გამოკლების მიმართ; მაგრამ გაყოფის მიმართ არ გვაქვს „ჩაკეტილობა" — შემოდის რაციონალური რიცხვები.

7 ამოცანა მიუთითებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის „ჩაკეტილობაზე" შეკრების, გამრავლების, გამოკლებისა და გაყოფის (ნულისგან განსხვავებულზე) მიმართ. ანალოგიური მსჯელობების ჩატარება მოუწევთ მოსწავლეებს 6, 7 ამოცანების ამოხსნისას.

1.6. რიცხვის მოდული. რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა. მიახლოების აბსოლუტური ცდომილება. ფარდობითი ცდომილება

<table>
<tr><td colspan="4">თემა: რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში
სავარაუდო დრო: 3 სთ</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნება.
სამიზნე ცნებასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვები</th><th>დავალებები</th></tr>
<tr><td>სიდიდეები, რიცხვი, რიცხვითი გამოთვლები.
სიდიდეების გაზომვის შედეგად მიღებული რიცხვები, მიახლოებით, სიზუსტის ამა თუ იმ ხარისხით წარმოადგენს საძიებელ სიდიდეებს; ზუსტი გამოთვლების ჩატარება, როგორც წესი, შეუძლებელია. ზოგიერთი ობიექტი გაზომვის ზუსტი ჩატარების საშუალებას არ იძლევა; სიდიდის მიახლოებითი რიცხვითი მნიშვნელობის წარმოდგენისას, მნიშვნელოვანია ჭეშმარიტი მნიშვნელობისგან განსხვავების შეფასება, ამ განსხვავების შეფასება ხდება მიახლოების აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებების გამოყენებით.</td><td>რიცხვის მოდული, მოდულის თვისებები;
რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება;
რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობის ფარდობითი ცდომილება.</td><td>რა სიდიდეებით ვახასიათებთ რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობებს?
ყოველთვის არის შესაძლებელი აბსოლუტური ცდომილების მოძებნა?</td><td>კლასში:
1-18
საშინაო:
1-17</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებებისა და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით; ზუსტი ან მიახლოებითი გამოთვლების შესრულება; ფარდობითი ცდომილების გარკვევა; მიახლოებით გამოთვლათა და შეფასების ხერხების გამოყენება (მათ. საშ. 1).</td></tr>
</table>

აქტივობები: ახალი მასალა უკავშირდება ნამდვილი რიცხვების გეომეტრიულ წარმოდგენას, ნამდვილი რიცხვების უსასრულო ათწილადებით მიახლოებით წარმოდგენებს. ამიტომ საშინაო დავალების შემოწმებასთან ერთად ვიმეორებთ აღნიშნულ საკითხებს; ყოველ ნამდვილ რიცხვს საკოორდინატო წრფეზე ერთადერთი წერტილი შეესაბამება, ეს რიცხვი აღნიშნული წერტილის კოორდინატია; ვიმეორებთ ირაციონალური რიცხვის (განვიხილავთ $\sqrt{2}$-ს) შესაბამისი წერტილის პოვნის პროცესს. ამასთანავე, ურთიერთმოპირდაპირე ($\sqrt{2}$ და $-\sqrt{2}$) ირაციონალური რიცხვების განხილვით, ვიმეორებთ რიცხვის მოდულის

გეომეტრიულ წარმოდგენას — a რიცხვის მოდული, $|a|$ — არის a რიცხვის შესაბამისი წერტილიდან სათავემდე მანძილი. ამ წარმოდგენას ალგებრულადაც ჩავწერთ და მოსწავლეებთან ერთად განვიხილავთ სხვადასხვა მაგალითს.

ასე, თანდათანობით, წინარე ცოდნაზე დაყრდნობით მიმდინარეობს ახალი ცოდნის „აშენების" პროცესი; განვიხილავთ მოდულის თვისებებს და ვასაბუთებთ მათ (დასაბუთებისას, ვიყენებთ სრული ინდუქციის მეთოდს). მაგალითად, ყველა 4 შემთხვევის განხილვით ვასაბუთებთ:

$$|a+b|\leq|a|+|b|.$$

შემდეგი პროცესი რიცხვების გამოყენებებს უკავშირდება, სიდიდეების გაზომვის პროცესი ამ სიდიდეების რიცხვითი მახასიათებლების პოვნის პროცესია, მაგრამ გაზომვის ზუსტი ჩატარება, სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლის ზუსტი მნიშვნელობის პოვნა, როგორც წესი, შეუძლებელია. მოსწავლეები ასახელებენ მიზეზებს, რატომ არის შეუძლებელი, ხშირად, გაზომვების ზუსტი ჩატარება. შესაბამისად, სიდიდეების ამ გზით მიღებული რიცხვითი მახასიათებლები, როგორც წესი, მიახლოებით არის ხოლმე წარმოდგენილი — მოსწავლეებმა კარგად უნდა გაიაზრონ მკვიდრი წარმოდგენები რიცხვების მიახლოებების შეფასებების აუცილებლობის შესახებ. პირველი სიდიდე, რომლითაც მიახლოების შეფასება ხდება, აბსოლუტური ცდომილებაა — ამ სიდიდის შემოღების საჭიროებაზე შეიძლება მოსწავლეებმა იმსჯელონ. აქ მოსწავლეების წინარე ცოდნის გახსენება შეიძლება დაეხმაროს — $\frac{1}{3}$ უსასრულო ათწილადის სახით ჩაიწერება, ამასთანავე, ეს რიცხვი მიახლოებით შეიძლება სხვადასხვა სასრული ათწილადით წარმოვადგინოთ — რომელი წარმოდგენაა უფრო „ზუსტი?" — 0,3; 0,33; 0,333? მოსწავლეები შეფასებას სხვაობის მოდულის გამოთვლით აკეთებენ და ამ სიდიდის მნიშვნელობაზე საუბრობენ.

სახელმძღვანელოს ტექსტში გამოთვლილია $\frac{1}{3}$-ის მიახლოებით, 0,3-ით წარმოდგენისას მიახლოების აბსოლუტური ცდომილება.

შემდეგი მაგალითი ეხმარება მოსწავლეებს გაიაზრონ, რომ აბსოლუტური ცდომილების პოვნა ხშირად შეუძლებელია, ამიტომ მნიშვნელოვანია მისი „საზღვრის" მითითება. თუ a რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა არის x, აბსოლუტური ცდომილება $|x–a|$ არ აღემატება h-ს, ანუ $|x–a|\leq h$, მაშინ $–h\leq x–a\leq h$, $a–h\leq x\leq a+h$ და ვწერთ $x=a\pm h$.

მოსწავლეებმა კარგად უნდა გაიაზრონ, რომ გასაზომ ხელსაწყოებში, გაზომვის სიზუსტე უმცირესი დანაყოფის სიგრძის ტოლია — ზემოთ წარმოდგენილი „საზღვარი" დანაყოფის სიგრძეა.

მოსწავლეები იხსენებენ ათწილადების დამრგვალების წესს და უკავშირებენ აბსოლუტური ცდომილების „საზღვრის" აღების მიზანშეწონილობას. რიცხვების დამრგვალების წესის მიხედვით, ცდომილება არ აღემატება შენარჩუნებული თანრიგის ერთეულის ნახევარს. მაგალითად, 723,467-ის მეასედებამდე დამრგვალებისას, მივიღებთ:

$$723{,}467\approx723{,}47.$$

აბსოლუტური ცდომილება არის:

$$0{,}003<\frac{1}{2}\cdot0{,}01=0{,}005.$$

რაც შეეხება უსასრულო ათწილადების მეტობითა და ნაკლებობით სასრული ათწილადების მიმდევრობებით წარმოდგენას — აღნიშნული სასრული ათწილადები წარმოადგენს მიახლოებით მნიშვნელობებს და თითოეული ათწილადის აღებისას მიღებული აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება მისი მარჯვნიდან ბოლო ციფრის თანრიგის 1 ერთეულს.

განხილული ამოცანებით მიმდინარეობს ტექსტში მიღებული ცოდნის განმტკიცება.

მაგალითად, (1)-(5) ამოცანებით განვიმტკიცებთ ცოდნას აბსოლუტური ცდომილების გამოთვლაზე. (6)-(8) ამოცანებით აღნიშნულია, როგორ წარმოვადგენთ სიდიდეს, როცა ვიცით მხოლოდ აბსოლუტური ცდომილების საზღვარი; მაშასადამე, მიმდინარეობს ვარჯიში გაზომვის ჩაწერაზე, როცა გაზომვის შედეგად მიღებული რიცხვის ჩანაწერში მითითებულია აბსოლუტური ცდომილების საზღვარი, მაგალითად, თუ 0,5-მდე სიზუსტით გაზომვისას ტემპერატურა არის მიახლოებით 21,5, მაშინ იგი ასე ჩაიწერება: $t=21{,}5\pm0{,}5$.

(6) აქ $a=2{,}4\pm0{,}1$, მაშასადამე, $2{,}3\leq a\leq 2{,}5$.

(7) ა) $7{,}9\leq a\leq 8{,}1$.

(14) ამოცანის გამოყენებით, ვიხსენებთ დამრგვალების წესებს.

ფარდობითი ცდომილების შესახებ ცოდნის განმტკიცება ხდება (15)-(18) ამოცანებით. (18) ამოცანა გათვალისწინებულია მათემატიკით განსაკუთრებულად დაინტერესებული მოსწავლეებისთვის.

(15) და (17) ამოცანების გამოყენებით მიმდინარეობს ფარდობითი ცდომილების შეფასება — ფარდობითი ცდომილების კავშირის დამოკიდებულება გაზომვის სიზუსტესთან. მაგალითად, (17) ამოცანის საშუალებით, ვაფასებთ ფარდობით ცდომილებებს.

მზის მასის შემთხვევაში, ფარდობითი ცდომილების შეფასება (ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება) გამოისახება

$$\frac{0{,}1\cdot 10^{33}}{2\cdot 10^{33}}=\frac{1}{20}=5\%\text{-ით.}$$

ბურთის მასის შემთხვევაში — $\frac{0{,}1}{2{,}5}=4\%$-ია.

(18*) ამ ამოცანის ამოხსნისას, ვიყენებთ მოდულის თვისებებს. ვთქვათ, a და b რიცხვების მიახლოებითი მნიშვნელობები, შესაბამისად, არის x და y, ხოლო აბსოლუტური ცდომილებებია Δx და Δy.

შესაბამისად გვაქვს:

$$\Delta x=|a-x|,\qquad \Delta y=|b-y|$$

$$\Delta(x+y)=|(a+b)-(x+y)|=|(a-x)+(b-y)|\leq|a-x|+|b-y|;$$

მივიღეთ: $|\Delta(x+y)|\leq|\Delta x|+|\Delta y|$.

(გამოვიყენეთ მოდულის თვისება: ჯამის მოდული არ აღემატება შესაკრებთა მოდულების ჯამს).

ამრიგად, დამტკიცდა, რომ მიახლოებით მნიშვნელობათა ჯამის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება შესაკრებთა აბსოლუტური ცდომილებების ჯამს. მაშასადამე, ჯამის აბსოლუტური ცდომილების საზღვრად შეიძლება მივიღოთ შესაკრებთა აბსოლუტური ცდომილებების საზღვართა ჯამი.

ასევე, მოსწავლეებთან ერთად, შეიძლება შესაბამისი მაგალითის განხილვაც. თუ სამკუთხედის გვერდებისთვის გვაქვს მიახლოებითი ტოლობები: $a=(63{,}4\pm0{,}1)$სმ, $b=(47{,}8\pm0{,}1)$ სმ, $c=(73{,}1\pm0{,}1)$სმ, მაშინ პერიმეტრისთვის გვექნება:

$$p\approx a+b+c=63{,}4\pm0{,}1+47{,}8\pm0{,}1+73{,}1\pm0{,}1;$$

$$p=(184{,}3\pm0{,}3)\text{ სმ;}$$

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია: აბსოლუტური ცდომილების გამოთვლა (1 - 5), მიახლოებათა ჩანაწერების წაკითხვა და გამოყენება (6 - 17). 12 ამოცანაში საჭიროა მ/წმ-ში გამოსახული სიჩქარის გამოსახვა კმ/საათებში; ვითვალისწინებთ ერთეულებს შორის კავშირებს:

1 მ$=0{,}001$ კმ; 1 წმ$=\frac{1}{3600}$ სთ; $0{,}001:\frac{1}{3600}=\frac{3600}{1000}=3{,}6.$

1 მ/წმ$=3{,}6$ კმ/სთ.

პროექტზე მუშაობა დაეხმარება მოსწავლეს ცხრილებისა და ინტერნეტის გამოყენებისას მიახლოებითი მნიშვნელობების წესების გააზრებაში. მოსწავლეები გაიაზრებენ დამრგვალების წესების კავშირს მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტურ ცდომილებასთან — ამ დროს ცდომილება არ აღემატება ბოლო ციფრის თანრიგის ნახევარს.

თუ $\sqrt{8}$-ის მიახლოებით მნიშვნელობად კალკულატორში მითითებულია 5,2915026221, მაშინ აქ მეათასედების ციფრი 1 (ისევე როგორც ყველა შემდეგი ციფრი, გარდა ბოლო 1-იანისა) სანდო ციფრია.

ამ ციფრამდე დამრგვალებით არის მითითებული მოცემული ფესვის მნიშვნელობა ჩვენი წიგნის ბოლოს წარმოდგენილ ცხრილში: 5,292. ცხადია, აქ ცდომილება არ აღემატება მეათასედების $\frac{1}{2}$-ს; მოსწავლემ უნდა განიხილოს კავშირები სხვადასხვა ცნობარში მიახლოებით მნიშვნელობებს შორის, იმსჯელოს ცდომილების შეფასებაზე. მაშასადამე, მიახლოებითი მნიშვნელობების წარმოდგენისას მითითებული ყველა ციფრიდან არა უმეტეს ერთი ციფრი (ბოლო) შეიძლება არ იყოს სანდო ციფრი. (როგორც, ჩვენ მიერ განხილულ შემთხვევაში — 5,292-ში ყველა სანდოა, ბოლო ციფრის გარდა).

მოსწავლემ უნდა ახსნას, რომ კვადრატში აყვანისას მიღებული რიცხვის ბოლო ციფრი ნაკლებად შეიძლება იყოს სანდო, ვიდრე ამ ხარისხის ფუძის ბოლო ციფრი.

ახლა ნამრავლიდან ფესვის ამოღების შემთხვევა განვიხილოთ. მაგალითად, $\sqrt{16357\cdot 35371}$ ფესვის მნიშვნელობას ზოგიერთი მოდელის კალკულატორი ასე წარმოგვიდგენს:

$$\sqrt{16357\cdot 35371}\approx 24053{,}34586$$

აქ ყველა ციფრი სანდოა, გარდა ბოლო 6-ისა. თუ შედეგს დავამრგვალებთ მეათასედებამდე, მივიღებთ:

$$\sqrt{16357\cdot 35371}\approx 24053{,}346,$$

აქ პირველი 7 ციფრია სანდო.

ახლა თითოეული თანამამრავლიდან ფესვის მნიშვნელობა (მეათასედამდე დამრგვალებით) და ამ მნიშვნელობათა ნამრავლი მივუთითოთ:

$$\sqrt{16357}\approx 127{,}894;$$
$$\sqrt{35371}\approx 188{,}072;$$
$$\sqrt{16357}\cdot\sqrt{35371}\approx 24053{,}280.$$

ცხადია, 24053,346 უფრო ზუსტია ვიდრე, 24053,280, რადგან პირველ რიცხვში პირველი 7 ციფრია სანდო, მეორეში სანდოა მხოლოდ პირველი 5 ციფრი.

მაღალი აკადემიური მზაობის ზოგიერთმა მოსწავლემ მიახლოებითი რიცხვების შემთხვევაში შეიძლება 1-ზე მეტი რიცხვების კვადრატში აყვანისა და კვადრატული ფესვის ამოღებისას მიახლოებითი მნიშვნელობების განსაზღვრის შესახებაც იმსჯელოს და აღნიშნული სახის რიცხვებისთვის გამოიყენოს ეს წესი. კვადრატული ფესვის ამოღებისას, შედეგში უნდა დავტოვოთ იმდენი ციფრი, რამდენიც აქვს მოცემულ რიცხვს, ამასთანავე, ბოლო ციფრი „უფრო სანდოა“, ვიდრე ფესვქვეშა რიცხვის ბოლო ციფრი. კვადრატში აყვანისას უნდა დავტოვოთ იმდენი ციფრი, რამდენიც აქვს ფუძეს; მიახლოებითი რიცხვების გამრავლებისას, უნდა დავტოვოთ იმდენი ციფრი, რამდენიც აქვს იმ თანამამრავლს, რომლის ციფრების რაოდენობა ნაკლებია.

1.7. ფესვი. რიცხვის წარმოდგენის სტანდარტული ფორმა. წილადმაჩვენებლიანი ხარისხი

თემა: რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიური ცხოვრებისა და მეცნიერების სხვადასახვა დარგში **სავარაუდო ჯამი:** 3 სთ			
სამიზნე ცნება. სამიზნე ცნებასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
სიდიდეები, რიცხვები, რიცხვითი გამოთვლები. რიცხვები შეიძლება გამოვიყენოთ ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში; რიცხვის ჩაწერა სტანდარტული ფორმით ხშირად გამოიყენება საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში დიდი ან მცირე რიცხვების წარმოსადგენად.	ნამდვილი რიცხვის ჩაწერა სხვადასხვა სახით; ფესვი, არითმეტიკული ფესვი, რიცხვის ხარისხი წილადი მაჩვენებლით; წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებები; რიცხვის ჩაწერა სტანდარტული ფორმით	რა შემთხვევაშია განსაზღვრული რიცხვის ხარისხი წილადი მაჩვენებლით? არსებობს თუ არა კენტი ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან? შეიძლება თუ არა კენტი ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან ჩავწეროთ წილადმაჩვენებლიანი ხარისხით?	**კლასში:** 1-28 **საშინაო:** 1-27
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რეალურ ცხოვრებაში სხვადასხვა საკვლევი, სამეცნიერო საკითხისა, თუ ყოფითი მოვლენის განხილვისას სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით; რაოდენობის ჩაწერა; სიდიდეებსა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდობის გამოთვლა; რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით (მათ. საშ. 1)			

აქტივობები: პირველი გაკვეთილის საწყისი 10 წუთი წინარე ცოდნის გააქტიურობას ეთმობა — ვიხსენებთ კვადრატულ ფესვს, არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს; მოსწავლეებმა კარგად უნდა გაიაზრონ — „კვადრატული ფესვი დადებითი რიცხვიდან არის ორი — ურთიერთმოპირდაპირე რიცხვი“. დადებით კვადრატულ ფესვს დადებითი რიცხვიდან არითმეტიკული კვადრატული ფესვი ეწოდება; ნულიდან კვადრატული ფესვი ნულია. მაშასადამე, $\sqrt{a}$ $(a\geq 0)$ აღნიშვნით მოიცემა ერთადერთი რიცხვი, რომლის კვადრატი a-ს ტოლია. ეს ერთადერთი რიცხვი დადებითი რიცხვია, ან 0-ია. წინარე ცოდნის ასეთი გამეორების შემდეგ გადავდივართ n-ური ხარიხის ფესვის განხილვაზე, თუმცა, არც ეს საკითხია მოსწავლეებისთვის უცხო, მოსწავლეებს ჩამოვუწერთ სწორ და არასწორ ტოლობებს,

რომლებითაც წარმოდგენილია ლუწი ხარისხის ფესვი დადებითი რიცხვიდან და ვთხოვთ შეარჩიონ სწორი ტოლობები და ახსნან, რას ეფუძნება მათი გადაწყვეტილება.

გადავდივართ მთელმაჩვენებელიანი ხარისხისა და შესაბამისი თვისებების გახსენებაზე. ამას მოსდევს რიცხვის სტანდარტული ფორმით ჩაწერისა და მისი მნიშვნელობის მითითება. ხაზი უნდა გავუსვათ სტანდარტული ფორმის გამოყენებებს საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში. შესაბამისი ჯგუფური მუშაობა დაეხმარება მოსწავლეებს ამ ფორმის მნიშვნელობის კარგად გააზრებაში.

პარაგრაფში განხილული საკითხებიდან, სიახლე შეიძლება იყოს რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის შემოღება. აქ მნიშვნელოვანია საკვანძო შეკითხვები — რა შემთხვევაშია შემოღებული რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი; სწორია თუ არა, რომ $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$? არის თუ არა სწორი ტოლობა: $(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-8}$. შეიძლება ვიმსჯელოთ — უარყოფითი რიცხვის წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის შემოღებისას რა წინააღმდეგობები შეიძლება შეგვხვდეს. მაგალითად, თუ ჩავთვლით, რომ $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$, მაშინ $(-8)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-8)^2}=2$.

$\dfrac{1}{3}$ და $\dfrac{2}{6}$ ხომ ერთი და იმავე რიცხვის ჩანაწერებია?

კლასის მოსწავლეების შესაძლებლობების გათვალისწინებით, შეიძლება ამ მაგალითით ავხსნათ — რატომ არ არის მიზანშეწონილი უარყოფითი რიცხვის წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის შემოღება.

ამოცანების ამოხსნით მიმდინარეობს ცოდნის განმტკიცება ხარისხის ცნების განზოგადებასა და სტანდარტული ფორმით ჩაწერის შესახებ.

მოსწავლემ უნდა შეძლოს დაასახელოს ნამდვილი რიცხვები, რომელთა მეოთხე ხარისხის არის 11, ერთ-ერთი — დადებითი რიცხვია — $\sqrt[4]{11}$, მეორე — უარყოფითი ($-\sqrt[4]{11}$) („ტესტი“ 1). თუ მოსწავლეს კარგად აქვს გააზრებული კენტი ხარისხის მაჩვენებლის შემთხვევა, მაშინ მას არ გაუჭირდება 2-3 „ტესტებში“ სწორი პასუხების შერჩევა — x დადებითია, თუ უარყოფითი, კენტი n რიცხვისთვის, ვწერთ $\sqrt[n]{x}$ და $(\sqrt[n]{x})^n=x$; თუ $\sqrt[3]{x}=-0{,}2$, მაშინ $x=(-0{,}2)^3=-0{,}008$.

4 ამ ტესტში ყურადღებას ვამახვილებთ იმაზე, რომ, თუ $a<0$, მაშინ $\sqrt[4]{a^2}$-ს აზრი აქვს, $\sqrt{a}$-ს კი აზრი არა აქვს; ამ დროს გვაქვს: $(-a)>0$ და

$$\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt{-a}.$$

7 „ტესტით“ კიდევ ერთხელ ხდება იმის გააზრება, რომ $(-8)^{\frac{1}{3}}$-ს აზრი არა აქვს და $(-8)^{\frac{1}{3}}\neq\sqrt[3]{-8}$.

ფესვებზე მოქმედებების გამეორებასა და ცოდნის განმტკიცებას ემსახურება

11-13 დავალებების შესრულება.

14 ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლე მსჯელობს: თუ $0<a<b$, მაშინ $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში — ე. ი. როცა $\sqrt[n]{a}\geq\sqrt[n]{b}$, ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისების თანახმად, $a\geq b$. მიაქციეთ ყურადღება მოსწავლის მსჯელობას და დასაბუთების ხერხის გამოყენებას. ამ ამოცანის ამოხსნის შემდეგ მოსწავლეები ადვილად ხსნიან 15 ამოცანას: ა) $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<\sqrt{3}$. ფესვებისა და წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებებისა და სტანდარტული ფორმით რიცხვების ჩაწერის შესახებ ცოდნის განმტკიცებას ემსახურება 16-18 ამოცანების ამოხსნა.

მაგალითად, $\dfrac{16\cdot10^{-6}}{8\cdot10^{-3}}=2\cdot10^{-3}=0{,}002$;

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3};$$

თუ $x>0,\ y>0,\ x-y=(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2=(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$,

$7^3>4^4$, ამიტომ $7^{30}>4^{40}$,

$$(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}=3^{-\frac{5}{12}},\qquad \sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}=3^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{12}}=3^{-\frac{5}{12}}.$$

კლასში ორი გაკვეთილის განმავლობაში 1-28 ამოცანების კარგად გარჩევის შემდეგ, მოსწავლეებს არ უნდა გაუჭირდეთ საშინაო დავალების 1-27 ამოცანების ამოხსნა; მაგალითად, კვლავ ყურადღებას ვამახვილებთ იმაზე, რომ $(-16)^{\frac{1}{4}}$ გამოსახულება არ არის განსაზღვრული: თუ $x>0$ და $y>0$, მაშინ $x^{\frac{2}{5}}=(x^{\frac{1}{5}})^2$, $y^{\frac{2}{5}}=(y^{\frac{1}{5}})^2$, ამიტომ $x^{\frac{2}{5}}-y^{\frac{2}{5}}=(x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{5}})(x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}})$.

მოსწავლემ, ხარისხის თვისებების გამოყენებით უნდა შეძლოს, რიცხვების სტანდარტული ფორმით ჩაწერა. მაგალითად,

$$\frac{20000}{0{,}0005}=\frac{2\cdot 10^4}{5\cdot 10^{-4}}=\frac{2}{5}\cdot 10^8=\frac{2}{5}\cdot 10\cdot 10^7=4\cdot 10^7.$$

ამოცანების თვითშეფასებისთვის

მოსწავლე სარგებლობს შეფასების რუბრიკით და აფასებს საკუთარ ცოდნას რიცხვებისა და რიცხვებზე მოქმედებების შესახებ.

მოსწავლეები თავად აღმოაჩენენ ხარვეზებს საკუთარ ცოდნაში და შედეგებს მასწავლებელს უზიარებენ. მასწავლებელი იყენებს შეფასების შედეგებს და ამოცანათა განხილვით, დამატებითი დავალებების შესრულების საშუალებით, ცდილობს ხარვეზების გამოსწორებას. მოსწავლის მიერ ამოცანების ამოხსნების შეფასება მასწავლებელს აძლევს საშუალებას, გაარკვიოს — სტანდარტის რა შედეგების მიღწევის შესრულებასთან გვაქვს შეფერხებები (სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით, რიცხვების წარმოდგენა სხვადასხვა სახით, სხვადასხვა სახით წარმოდგენილი რიცხვების შედარება; რიცხვებისა და რიცხვითი გამოსახულებების ჩაწერა ეკვივალენტური ფორმით).

აღმოჩენილი ხარვეზების გამოსწორების მიზნით, მასწავლებელი იყენებს შესაბამის დავალებებს დამატებითი ამოცანებიდან და დამატებით მუშაობს მოსწავლეებთან.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად

1 ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის, მოსწავლემ უნდა შეძლოს გამოსახულების ჩაწერა ეკვივალენტური ფორმით; გამოსახულება ჩაიწერება $2n$ სახით, რომელიც ლუწი ნატურალური რიცხვია.

2 მოცემული გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა $mn\neq 0$, არის $n-m$; თუ $n>m$, მიიღება ნატურალური რიცხვი, თუ $n=m$, მივიღებთ ნულს.

3 მოსწავლემ უნდა შეარჩიოს, რომელი წარმოდგენა იქნება უფრო მოსახერხებელი რიცხვების შესადარებლად; $\frac{2}{5}=0{,}4$; $0{,}(4)=0{,}44...$; ამრიგად, $0{,}(4)>\frac{2}{5}$; $0{,}(41)=\frac{41}{99}=\frac{287}{99\cdot 7}$; $\frac{3}{7}=\frac{297}{99\cdot 7}$; ამრიგად, $\frac{3}{7}>0{,}41$.

ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება არჩიოს $\frac{3}{7}$-ის უსასრულო ათწილადის სახით ჩაწერა:

$$\frac{3}{7}\approx 0{,}428571... \qquad \frac{3}{7}>0{,}41.$$

4 მოსწავლემ უნდა შეძლოს რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის პოვნა:

$$(-5)^3\cdot(-0{,}2)^4+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{25}\right)^2=-\frac{5^3}{5^4}+\left(\frac{21}{100}\right)^2=$$
$$=-0{,}2+(0{,}21)^2=-0{,}2+0{,}0441=-0{,}1559.$$

5 $a=0{,}8b$; $\frac{b}{a}\cdot 100\%=\frac{5}{4}\cdot 100\%=125\%$ (ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდების პოვნა).

6 $x-0{,}2x=0{,}8x$, ვთქვათ, საახალწლოდ იგეგმება p%-იანი ფასდაკლება, მაშინ

$$0{,}8x-0{,}8x\cdot 0{,}01p=0{,}8x(1-0{,}01p)$$
$$0{,}8x(1-0{,}01p)=0{,}5x$$
$$1-0{,}01p=0{,}625$$
$$0{,}01p=0{,}375,\ \ p=37{,}5.$$

იგეგმება 37,5%-იანი ფასდაკლება.

7 მოსწავლემ უნდა გაიხსენოს, რა შემთხვევაში ჩაიწერება რაციონალური რიცხვი სასრული ათწილადით, რა შემთხვევაში ჩაიწერება უსასრულო პერიოდული ათწილადით.

მოსწავლეს 3-ზე გაყოფადობის ნიშნის გახსენებაც დასჭირდება; თუ □-ის ნაცვლად არის 2, 5 ან 8, მაშინ მრიცხველის ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე, მრიცხველიც იყოფა 3-ზე. ამ შემთხვევაში მიიღება სასრული ათწილადი (რადგან წილადი იკვეცება 3-ზე და მნიშვნელის მამრავლებად დაშლაში 2 და 5-ის გარდა სხვა მარტივი რიცხვი არ მონაწილეობს). სხვა შემთხვევაში მიიღება უსასრულო პერიოდული ათწილადი.

8 ა) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}=\sqrt{2}-\sqrt[15]{243}$; $\qquad \sqrt[4]{4}-\sqrt[5]{5}=\sqrt{2}-\sqrt[15]{125}.$

მეორე რიცხვი მეტია.

ბ) $\sqrt[4]{4}\ \sqrt[3]{3}=\sqrt{2}\ \sqrt[15]{243}$; $\qquad \sqrt{2}\ \sqrt[5]{5}=\sqrt{2}\ \sqrt[15]{125}.$

პირველი რიცხვი მეტია.

9 ვიპოვოთ აბსოლუტური ცდომილება:

$$\Delta x=\left|\frac{13}{7}-1{,}857\right|=\left|\frac{13}{7}-\frac{1857}{1000}\right|=\frac{1}{7000}.$$

ვიპოვოთ ფარდობითი ცდომილება

$$\frac{1}{7000}:1{,}857=\frac{1000}{7000\cdot 1857}=\frac{1}{12999}.$$

10 ა) $\sqrt[3]{(4\cdot 10^9\cdot 1{,}6\cdot 10^{-2})^2}=\sqrt[3]{4^2\cdot\frac{16^2}{10^2}\cdot 10^{14}}=\sqrt[3]{4^6\cdot 10^{12}}=4^2\cdot 10^4=16\cdot 10^{-1}\cdot 10^5=1{,}6\cdot 10^5.$

ბ) $(3{,}6\cdot 10^5+64\cdot 10^4)^{\frac{3}{2}}=(3{,}6\cdot 10^5+6{,}4\cdot 10^5)^{\frac{3}{2}}=(10^5\cdot 10)^{\frac{3}{2}}=(10^6)^{\frac{3}{2}}=10^9.$

I თავის დამატებითი ამოცანები

ამოცანები სასწავლო წლის სხვადასხვა დროს და სხვადასხვა მიზნისთვის შეიძლება გამოვიყენოთ. მასწავლებელი თავად ირჩევს შესაძლო ვარიანტს. ერთ-ერთზე ზემოთ ვისაუბრებთ — თვითშეფასების რუბრიკით შესრულებული დავალებისას აღმოჩენილი ხარვეზების აღმოფხვრა და ცოდნის განმტკიცება.

დამატებითი ამოცანები შეესაბამება I თავის სამიზნე ცნებებს და მათთან დაკავშირებულ მკვიდრ წარმოდგენებს: სიდიდეები, რიცხვები, რიცხვითი გამოთვლები; რიცხვების სხვადასხვა ეკვივალენტური სახით წარმოდგენა; ზუსტი ან მიახლოებითი გამოთვლების შესრულება; აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილების გარკვევა; რაოდენობის ჩაწერა რიცხვითი მახასიათებლით, სიდიდეებსა და მათ ერთეულებს შორის კავშირები.

გთავაზობთ მითითებებს ამოცანების ამოსახსნელად:

1 რადგან $4m+n$ ლუწია და $4m$ ლუწია, ამიტომ n ლუწია; რადგან $3m+4n$ კენტია და $4n$ ლუწია, ამიტომ $3m$ კენტია, m კენტია.

2 ა) $\frac{20-n}{5}=4-\frac{n}{5}$; ბ) $\frac{20-n}{n}=\frac{20}{n}-1$.

ამ ტოლობების გათვალისწინებით გვაქვს:

ა) n არის 5-ის ჯერადი და რადგან $4-\frac{n}{5}$ ნატურალური რიცხვია, n შეიძლება იყოს 5, 10, 15;

ბ) n არის 20-ის გამყოფი, ისეთი, რომ $\frac{20}{n}-1$ ნატურალური რიცხვია; ე. ი. n შეიძლება იყოს 10, 5, 4, 2, 1.

3 ეს რიცხვები ურთიერთმოპირდაპირე მთელი რიცხვებია, მათი ნამრავლი არის ნატურალური რიცხვის კვადრატის მოპირდაპირე რიცხვი — უარყოფითი რიცხვი.

4 სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით ჩაიწერება რაციონალური რიცხვები:

$$-\frac{5}{5,1};\quad \sqrt{3\frac{1}{16}}=\frac{7}{4};\ ;\quad \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}=-\frac{3}{2};\quad \frac{3,2}{9,(7)}.$$

5 აქ მოსწავლემ კიდევ ერთხელ უნდა გაიხსენოს, რომ უარყოფითი რიცხვის რაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხს აზრი არა აქვს: $(-4,1)^{\frac{1}{3}}$ არ არის განსაზღვრული; უარყოფითი რიცხვიდან ლუწი ხარისხის ფესვს ($\sqrt{-4,1}$) აზრი არა აქვს.

6 $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=|\sqrt{3}-2|=2-\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{\sqrt{27}}=3^{\frac{3}{6}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$;

$64^{\frac{1}{6}}-4^{-\frac{1}{2}}=(2^6)^{\frac{1}{6}}-(2^2)^{-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2}=1,5.$

7 4800 შეადგენს მოგების 80%-ს. პროცენტით რიცხვის პოვნის წესის გამოყენებით, მოგება არის: 4800:0,8=6000 (ლარი).

8 150 ლარი შეადგენს: 100%–(40%+20%)-ს=40%. დანაზოგია 150:0,4=375 (ლარი).

9 სპორტსმენები — $64\%\cdot 0{,}05=3{,}2\%$

მოსწავლეთა რაოდენობა: $12:\frac{3{,}2}{100}=375$ (პროცენტით რიცხვის პოვნა).

10 მართკუთხედის მცირე გვერდის კვადრატი არის 32; მცირე გვერდი — $4\sqrt{2}$ (სმ).

11 კვადრატის გვერდი — $2\sqrt{5}$(დმ), პერიმეტრი — $8\sqrt{5}$ (დმ).

12 გ) $\frac{(\sqrt{27}-\sqrt{18})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{6}=\frac{(3\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5.$

13 12მ/წმ$=12\cdot\frac{3600}{1000}=12\cdot 3{,}6=43{,}2$ (კმ/სთ)≈ 43 კმ/სთ.

14 19 მ/წმ$=19\cdot 3{,}6$ კმ/სთ$=68{,}4$ კმ/სთ

$|70-68{,}4|=1{,}6$ — აბსოლუტური ცდომილება.

$\frac{1{,}6}{70}\approx 0{,}02=2\%$ — ფარდობითი ცდომილება.

15 $\sqrt{10}\approx 3{,}162$

$\pi\approx 3{,}1415$; $\sqrt{10}>\pi$.

16 ა)$22{,}5\cdot 10^3\cdot 2{,}04\cdot 10^4=45{,}9\cdot 10^7=4{,}59\cdot 10^8$.

ბ) $1{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 20{,}6\cdot 10^{-2}=28{,}84\cdot 10^{-5}=2{,}884\cdot 10^{-4}$.

17 ა) შეიძლება შევადაროთ რიცხვების მე-12 ხარისხები (მთელი რცხვები); შეიძლება თითოეული რიცხვისთვის ვიპოვოთ ორი მომდევნო მთელი რიცხვი, რომელთა შორისაც არის ეს რიცხვი. მაგალითად,

$5<\sqrt[4]{630}<6$ $(5^4=625)$;

$4<\sqrt[3]{100}<5$ $(4^3=64)$;

$6<\sqrt{40}<7$ $(4{,}5^3<100)$.

მაშასადამე გვაქვს: ა) $4{,}5$; $\sqrt[3]{100}$; $\sqrt[4]{630}$; $\sqrt{40}$.

ბ) აქ გავითვალისწინოთ: $30^{\frac{1}{3}}>3$, $6^{\frac{1}{2}}$ და $15^{\frac{1}{4}}$ კი 3-ზე ნაკლები რიცხვებია;

$6^{\frac{1}{2}}=36^{\frac{1}{4}}>15^{\frac{1}{4}}$;

რიცხვები ასე დალაგდება:

$15^{\frac{1}{4}}$; $6^{\frac{1}{2}}$; 3; $30^{\frac{1}{3}}$.

18 ა) $\frac{\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{32}}{\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt{18}}=\frac{3\sqrt[3]{3}\cdot 4\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{3}\cdot 3\sqrt{2}}=2.$

ბ) $\frac{(25^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{2}})(25^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}})}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}-\left(12\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 0{,}5^{-6}}=\frac{25^{\frac{1}{2}}-3}{2^5-\frac{7}{2}\cdot 2^6}=\frac{2}{32\cdot(1-7)}=\frac{1}{16\cdot(-6)}=-\frac{1}{96}.$

19 ბ) $\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=\frac{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})}{b^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})}=\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}.$

გ) $\frac{x^{\frac{4}{5}}\cdot x^{0{,}2}}{x^{\frac{3}{2}}+xy^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^{0{,}8+0{,}2}}{x(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}.$

20 $5^3=125,\ 6^3=216;$
$5<\sqrt[3]{200}<6$
$5+6=11.$

21 ა) $-2<2<2,3<2,(3)$; ამიტომ გვაქვს:
$5^{-2};\ 5^2;\ 5^{2,3};\ 5^{2,(3)}.$

ბ) $2,4>2,1>0>-2$, ამიტომ გვაქვს:
$0,3^{2,4};\ 0,3^{2,1};\ 0,3^0;\ 0,3^{-2}.$

გ) $\left(6\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{25}{4}\right)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}.\quad 2>-1>-3>-4,$

ამიტომ გვაქვს:
$0,4^2;\ (0,4)^{-1};\ (0,4)^{-3};\ (6^{\frac{1}{4}})^2.$

22 $a=bc,\ abc=a^2=576,\ |a|=24.$

23 $n+2$ და $m+2$ რიცხვები იყოფა 3-ზეც, 5-ზეც და 7-ზეც. ანუ იყოფა 105-ზე. ასეთი სამნიშნა რიცხვებიდან უმცირესია 103, უდიდესი — 943. $m+n=1046$.

24 $\frac{n}{n-432}=\frac{n-432+432}{n-432}=\frac{n-432}{n-432}+\frac{432}{n-432}=1+\frac{n+432}{n-432}.$

მოცემული წილადი იქნება მთელი, როცა $n-432$ გაყოფს 432-ს. 432-ს აქვს 20 ნატურალური და ამდენივე მთელი უარყოფითი გამყოფი. მართლაც, 432-ის გამყოფების რაოდენობის დასადგენად ხელსაყრელია, მოსწავლემ ეს რიცხვი წარმოადგინოს მარტივი მამრავლების ნამრავლის სახით და გაიხსენოს, რომ თუ p მარტივი რიცხვია და n ნატურალური, მაშინ p^n-ს აქვს $n+1$ გამყოფი. ამრიგად, $2^4\cdot3^3$ -ს აქვს $5\cdot4$ ნატურალური გამყოფი. პასუხი 40.

25 ვღებულობთ $\frac{a+2b}{b+2b}=\frac{9a}{5b};\ \frac{a+2b}{3}=\frac{9a}{5};\ 5a+10b=27a,\ 22a=10b,\ 11a=5b.$ ამრიგად, a და b რიცხები არის, შესაბამისად $5k$ და $11k$ სახის, სადაც k რაიმე ნატურალური რიცხვია. შეიძლება შევარჩიოთ, მაგალითად, ასეთი წყვილები:

$a=5,\ b=11;\qquad a=10,\ b=22,\qquad a=15,\ b=33.$

სათანადო წილადები იქნება: $\frac{5}{11};\ \frac{10}{22};\ \frac{15}{33}.$

26 გადავწეროთ პირობა ასე: $p^2-1=2q^2$. რადგან p^2-1 ლუწია, ამიტომ p უნდა იყოს 2-ზე მეტი კენტი მარტივი რიცხვი. მეორე მხრივ, $p^2-1=(p-1)(p+1)$ მომდევნო ლუწი რიცხვების ნამრავლი კი იყოფა 8-ზე. ამრიგად, $2q^2$ იყოფა 8-ზე. ასეთი q მარტივი რიცხვი შეიძლება იყოს მხოლოდ 2. პასუხი: $q=2,\ p=3$.

შემაჯამებელი წერა №1

თემატური ბლოკი: რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში.

სამიზნე ცნებები: სიდიდეები; რიცხვები; რიცხვითი გამოთვლები.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რეალურ ცხოვრებაში სხვადასხვა საკვლევი სამეცნიერო საკითხისა, თუ ყოფითი მოვლენის განხილვისას სიდიდეე-

ბის წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით; რაოდენობის ჩაწერა; სიდიდეებსა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდობის გამოთვლა; რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებების და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით; მათემატიკური მეთოდებისა და ტექნოლოგიების საშუალებით ზუსტი ან მიახლოებითი გამოთვლების შესრულება; აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილების გარკვევა (მათ. საშ. 1).

ამოცანების ნიმუშები.

ამოხსენით ამოცანები:

1 იპოვეთ $\frac{2}{3}$, 0,(5) და $\frac{1}{2}$ რიცხვებიდან უდიდესისა და უმცირესის სხვაობა.

2 ჯგუფში ვაჟების 20% და გოგონების 24% დადის ცეკვაზე. რამდენი მოსწავლეა ჯგუფში, თუ ამ ჯგუფიდან ცეკვაზე დადის 3 ვაჟი და 6 გოგონა?

3 თუ მართკუთხედის სიგრძე გაიზრდება 5%-ით, სიგანე გაიზრდება 3-ჯერ, მიიღება კვადრატი, რომლის ფართობი 441 სმ^2-ია. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

4 შეკვეცეთ: ა) $\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$; ბ) $\frac{a-2b}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}$.

5 რომელ ორ მეზობელ მთელ რიცხვს შორის არის რიცხვი $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{18}}{\sqrt{16}}$?

6 დაასახელეთ 3,(123)-სა და 3,1(23)-ს შორის რაიმე ერთი რაციონალური და ერთი ირაციონალური რიცხვი.

7 ჩაწერეთ $\frac{2}{9}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეასედის სიზუსტით და გამოთვალეთ მისი აბსოლუტური ცდომილება.

8 ქილაში არაჟნის t მასის (გრამებში) აბსოლუტური ცდომილება $|t-400|\leq 10$. რა საზღვრებში შეიძლება იყოს ქილაში არაჟნის მასა? როგორ დავაწეროთ ქილას ინფორმაცია მასში არაჟნის მასის შესახებ?

9 ჩაწერეთ $a=2056\cdot 10^{-8}$ და $b=4800\cdot 10^{-9}$ რიცხვები სტანდარტული ფორმით და შეადარეთ a და b.

10 გამოთვალეთ: $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$; $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; $\sqrt[3]{108\sqrt[6]{64}}$; $\sqrt[4]{8^2\sqrt[3]{8^2}}$.

პასუხები:

1 $\frac{1}{6}$. 2 40. 3 7 სმ და 20 სმ. 4 ა) $\frac{a}{a+b}$; ბ) $\sqrt{a}+\sqrt{2b}$. 5 2-სა და 3-ს შორის. 6 მაგალითად, 3,12313; 3,123130130013000130000... ყოველ 13-ის შემდეგ ნულების რაოდენობა ერთით მატულობს. 7 0,22; $\left|\frac{2}{9}-0,22\right|=\frac{1}{450}$. 8 390 და 410 გრამამდე; წარწერა ქილაზე: 400±10 გრამი. 9 $a=2,056\cdot 10^{-5}$; $b=4,8\cdot 10^{-6}$; $a>b$. 10 $-\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$; 6; 4.

მითითებები:

3 ამოცანაში შეიძლება მოსწავლემ ჯერ გამოთვალოს კვადრატის გვერდი (21სმ) და შემდეგ იპოვოს მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები (21:3; 21:1,05). შესაძლოა შემოიღოს აღნიშვნები მართკუთხედის გვერდებისთვის და შეადგინოს სისტემა.

6 საძიებელი ირაციონალური რიცხვის ჩასაწერად მოსწავლემ შეიძლება გამოიყენოს უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის ჩაწერის ხერხი.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

1 დავალებაში რიცხვების ერთი სახით ჩაწერა (წილადების, ან ათწილადების) და უდიდესის და უმცრესის ამორჩევა შეფასდეს 0,5 ქულით; სხვაობის პოვნა — კიდევ 0,5 ქულით, სულ — 1 ქულა.

2 ამოცანაში კლასში ან ვაჟების, ან გოგონების რაოდენობის დადგენა შეფასდეს 0,5 ქულით. ჯგუფის მოსწავლეთა მთელი რაოდენობის პოვნა შეფასდეს კიდევ 0,5 ქულით. სულ – 1 ქულა.

3 კვადრატის გვერდისა და მისი საშუალებით მართკუთხედის მხოლოდ ერთი გვერდის პოვნა შეფასდეს 0,5 ქულით. მართკუთხედის მეორე გვერდის პოვნა — კიდევ 0,5 ქულით, სულ — 1 ქულა.

თუ მოსწავლემ შემოიღო აღნიშვნები მართკუთხედის გვერდებისთვის და ამოცანის პირობის მიხედვით შეადგინა სისტემა, შეფასდეს 0,5 ქულით. მიღებული სისტემის ამოხსნისთვის შეფასდეს კიდევ 0,5 ქულით.

4 თითოეული გამოსახულების გამარტივებისთვის შეფასდეს 0,5 ქულით, სულ — 1 ქულა.

5 შეფასდეს 0,5 ქულით, თუ მოსწავლემ გაამარტივა გამოსახულება; მიღებული რიცხვის მეზობელი მთელი რიცხვების დასახელებისთვის კიდევ — 0,5 ქულა, სულ — 1 ქულა.

6 შეფასდეს 0,5 ქულით მხოლოდ რაიმე რაციონალური, ან მხოლოდ რაიმე ირაციონალური რიცხვის მიგნება. შეფასდეს 1 ქულით ორივე რიცხვის დასახელების შემთხვევაში.

7 შეფასდეს 0,5 ქულით, თუ ჩაწერა $\frac{2}{9}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა მითითებული სიზუსტით; კიდევ 0,5 ქულით აბსოლუტური ცდომილების გამოთვლისთვის, სულ — 1 ქულა.

8 შეფასდეს 0,5 ქულით ქილაში არაჟნის მასის რაოდენობის საზღვრების მითითებისთვის, კიდევ 0,5 ქულით — ქილაზე წარწერისათვის. სულ — 1 ქულა.

9 შეფასდეს 0,5 ქულით, თუ სტანდარტული სახით ჩაწერა a ან b რიცხვი; კიდევ 0,5 ქულით — ამ რიცხვების შედარებისთვის. სულ — 1 ქულა.

10 შეფასდეს 0,5 ქულით რომელიმე ორი რიცხვის გამოთვლა. ოთხივე რიცხვის გამოთვლა — 1 ქულით.

წარმოდგენილი ამოცანების განმსაზღვრელი შეფასება მასწავლებელმა შეიძლება აქციოს განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტად. დაგისახელებთ ზოგიერთ რეკომენდაციას ამ აქტივობის ჩასატარებლად:

მიუხედავად იმისა, რომ თქვენი მოსწავლეები მეათეკლასელები არიან, შემაჯამებელი ამოცანები კი რთული ამოცანების კატეგორიას არ მიეკუთვნება, მხოლოდ განმსაზღვრელი შეფასებით შემოფარგვლა, შემდგომში შესაძლოა არაერთ კითხვას, პრობლემას გაუჩენს მათ. ეს ვარაუდი არაერთი სერიოზული კვლევითა და ერთიანი ეროვნული გამოცდების შედეგებით დასტურდება. კარგად ნაცნობი საკითხების კიდევ ერთხელ საჯარო განხილვაც კი გააღრმავებს და გაამყარებს მათ ცოდნას. ამ შედეგის მიღწევაში მნიშვნელოვანი როლი განმავითარებელ შეფასებას (ისევე როგორც სხვა შემოქმედებით აქტივობებს) ეკისრება. თვით განმსაზღვრელი შეფასებაც კი შეიძლება გარდავქმნათ განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტად.

განხილვის პერიოდში აქტიურად გამოიყენეთ წინმსწრები და შემდგომი მეტაკოგნიტური პაუზები, ჯგუფურად განიხილეთ, შეაჯამეთ ყოველი ამოცანის ამოხსნის გზები, ამოხსნის შემდეგ კი შეაჯამეთ, აღწერეთ ამოხსნის გზები, რა ხერხები გამოიყენეთ, რა გაუჭირდათ, რა გაუადვილდათ? ეს პაუზები მოსწავლეებს განუვითარებს შემოქმედებით უნარებს და აუმაღლებს განწყობას შემდგომი კვლევებისთვის.

(1) ამოცანის საჯარო განხილვისას, მიმართეთ მოსწავლეებს, რა სირთულეებს შეხვდნენ მისი გადაჭრისას. ყურადღებით მოისმინეთ მათი სავარაუდო მოსაზრებები რიცხვების ჩაწერის ფორმათა შესახებ; აქ კატეგორიული მოთხოვნა ან ათწილადის, ან წილადის სახით წარმოდგენის შესახებ, უადგილოა — მიზანს ისინი იოლად მიაღწევენ ორივე შემთხვევაში. დასვით კითხვა: რა წესს გამოიყენებენ უსასრულო პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევისას.

(2) ამოცანაში უმნიშვნელოვანესია პროცენტის არსის ცოდნა. მოსწავლეთა პასუხები შეიძლება არ იყოს ერთგვაროვანი. ყოველი მოსაზრება კლასმა საჯაროდ უნდა განიხილოს. მისასალმებელია, თუ დაუკავშირებენ პროპორციას, მაგალითად,

$$20\% \;—\; 3$$
$$100\% \;—\; \frac{3\cdot 100}{20}$$

ან, ზოგიერთი, კარგად გაწაფული პროცენტებში, პირდაპირ დაასახელებს ამ გამოსახულებას: 3:0,2. ზოგმა შეიძლება განტოლებაც კი მოიშველიოს: $x\cdot 0{,}2=3$.

ეს მიდგომები შეავსებს მოსწავლეთა წარმოდგენებს პროცენტზე. ანალოგიურად დაადგენენ გოგონათა რაოდენობასაც.

(3) არაა გამორიცხული, რომ ზოგიერთ მოსწავლეს ფართობის ცნება პერიმეტრის ცნებაში ერეოდეს. ამ საკითხის საჯარო განხილვის შემდეგ მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები „ჯერ“ და „ით“ გაზრდის შესახებ.

წინმსწრები მეტაკოგნიტური პაუზა ამოხსნის პირველი ნაბიჯის — კვადრატის გვერდის დადგენაში დაგეხმარებათ.

(4) ა) ამოცანაში კიდევ ერთხელ გავამახვილებთ ყურადღებას იმ ფაქტზე, რომ გამარტივებისას შეკვეცა შეიძლება მხოლოდ თანამამრავლების, და არა შესაკრებების. საინტერესოა ბ) შემთხვევაში მოწავლეთა მოსაზრებების მოსმენა, რადგან ეს არატრივიალური დაშლაა (კვადრატების სხვაობის სახით).

5 საყურადღებოა მოსწავლეთა წინასწარი მოსაზრებების განხილვა და დასკვნა მოცემული გამოსახულების გამარტივების შემდეგ.

6 არაერთი ამოცანა ამოხსნეს მოსწავლეებმა ორ რაციონალურ რიცხვს შორის რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების მოძიების შესახებ. მიმართეთ მოსწავლეებს აღწერონ საძიებელი რიცხვების სახე.

7 მოსწავლეებს მოუწევთ აღწერონ რაიმე რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილების ცნება, $\frac{2}{9}$ წარმოადგინონ ათწილადის სახით და დასახელებული სიზუსტით შერჩეული რიცხვისთვის მიუთითონ აბსოლუტური ცდომილება.

8 მოსწავლეებმა უნდა იმსჯელონ მოცემული უტოლობის შესახებ და ჩანაწერს შეთანხმებული ნიმუშის მიხედვით წარმოადგენენ: $t=400\pm10$ (გ).

9 სანამ ამოცანის განხილვაზე გადახვალთ, წინასწარ, მოსწავლეებს წარუდგინეთ რიცხვითი გამოსახულებები: მაგალითად, $64\cdot10^5$; $0{,}013\cdot10^{-3}$; $1{,}02\cdot10$ და შესთავაზეთ მათი წარმოდგენა სტანდარტული ფორმით (ბოლო რიცხვი უკვე სტანდარტული ფორმითაა ჩაწერილი). მათი განხილვა გააიოლებს **9** ამოცანის ამოხსნას.

10 ამ ამოცანაშიც, გავარჯიშების მიზანით, შესთავაზეთ მოსწავლეებს, მაგალითად, $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$ და $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{64\cdot3^{12}}}$ გამოსახულებათა გამარტივება. ეს განხილვა გააიოლებს მოცემული **10** ამოცანის ამოხსნას.

ამ განხილვის დასასრულს მოისმინეთ მოსწავლეთა მიერ გამოთქმული მოსაზრებები, ჩაინიშნეთ შენიშნული სირთულეები და შეიტანეთ კორექტივები სწავლა-სწავლებასთან დაკავშირებულ დაგეგმილ აქტივობებში.

I თავის შემაჯამებელი წერის მიხედვით შეიძლება დავაკონკრეტოთ სოლო ტაქსონომიის ზოგადი ფორმით წარმოდგენილი მოსწავლეთა მიღწევების დონეები (იხ. გვ. 14):

პრესტრუქტურული დონე. მოსწავლეს უჭირს. რიცხვების ჩაწერა სხვადასხვა ფორმით და მათზე ოპერირება, მათი შედარება. მას არ აქვს მკაფიო წარმოდგენა რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებზე — ვერ ანსხვავებს მათ; უშვებს უხეშ შეცდომებს წილადებზე მოქმედებისას; არ აქვს გააზრებული პროცენტის, მართკუთხედის ფართობისა და აბსოლუტური ცდომილების ცნებები. ვერ წვდება ტექსტური ამოცანის შინაარსს.

უნისტრუქტურული დონე. მოსწავლეს შეუძლია წილადების ჩაწერა ათწილადის სახით, თუმცა მათი შედარება უჭირს; არამკაფიო წარმოდგენა აქვს უსასრულო პერიოდულ და არაპერიოდულ ათწილადებზე; უხეშ შეცდომებს უშვებს ალგებრული წილადებისა და ფესვების გამარტივებისას; იცის პროცენტისა და რიცხვის მოდულის ცნებები, თუმცა ამ ცოდნას ვერ იყენებს ჯეროვნად ამოცანათა ამოხსნისას — უჭირს ამოცანის ამოხსნისას მათემატიკური აპარატის ჩართვა.

მულტისტრუქტურული დონე. ადარებს წილადებს და სასრულ ათწილადებს, თუმცა უსასრულო პერიოდული ათწილადის ჩართვას ამ შედარებაში ვერ ახერხებს; იცის პროცენტის ცნება, თუმცა ვერ პოულობს რიცხვს, რომლის გარკვეული პროცენტი მოცემულია; იცის მართკუთხედის ფართობის ფორმულა, ამოცანა მიყავს განტოლების შედგენამდე, თუმცა უშვებს შეცდომებს — აშკარაა, რომ მისი ცოდნა ფრაგმენტულია.

ეს გამოსჭვივის სხვა ამოცანების ამოხსნისასაც. მაგალითად, აგებს ორ რიცხვს შორის არსებულ რაიმე რაციონალურ რიცხვს, თუმცა ირაციონალურის აგებას ვერ ახერხებს.

იცის მოდულის ცნება, მაგრამ გაუჭირდა მოდულის შემცველი უტოლობის ამოხსნა. დავალებათა შესრულებისას სწორ გამოთვლებთან ერთად გვხვდება არასწორი გამოთვლებიც.

მიმართებითი დონე. ნაშრომის მიხედვით იკვეთება, რომ მოსწავლე კარგად იცნობს წილადის, ათწილადის, პროცენტის, უსასრულო პერიოდული და არაპერიოდული ათწილადის ცნებებს, შეუძლია მათი შედარება, მიახლოებითი გამოთვლების შესრულება, ალგებრულ გამოსახულებათა გარდაქმნა, გამარტივება; გააზრებული აქვს ამოცანების შინაარსი და ქმნის მკაფიო სქემას — გარკვეულ ეტაპებს მათ გადასაჭრელად, თუმცა ზოგჯერ ამ ეტაპების გადალახვისას შეინიშნება მცირეოდენი ხარვეზები.

გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. დავალების ყველა „ტექნიკური" მხარე მოსწავლემ რაციონალური სვლებით — ზედმეტი გამოთვლების გარეშე გადაჭრა. წარმოდგენილია ამოცანათა ამოხსნის მკაფიო გეგმა; ახსნილია შუალედური ეტაპები, რეალიზაცია არის სრულყოფილი; იგრძნობა დასახელებულ ამოცანათა გადაჭრის ფართო ხედვა. მაგალითად, მოცემულია ორ უსასრულო პერიოდულ ათწილადს შორის არსებული ირაციონალური რიცხვების აგების სქემა; სიდიდეთა შეფასებები სრულდება მითითებული სიზუსტით, თუმცა იკვეთება მზაობა აღნიშნული საკითხების უფრო ღრმად გასაანალიზებლად.

II თავი

სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები. გამონათქვამების ალგებრა

თემა: სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები. ლოგიკის საწყისები

საათების სავარაუდო რაოდენობა: 20 სთ

თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: მოქმედებები სიმრავლეებზე, ვენის დიაგრამები; ოპერაციები გამონათქვამებზე; ალგორითმი

სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**კომპლექსური დავალება**
სიმრავლე, ლოგიკური ოპერაციები, გამონათქვამი, ალგორითმი. სიმრავლის მოცემა სხვადასხვა ხერხით შეიძლება; ვენის დიაგრამებით შეიძლება გამოვსახოთ ცნებებს შორის მიმართებები, სწორად ჩავატაროთ მსჯელობა. გამონათქვამებზე ოპერაციების გამოყენებით, შეიძლება სწორი დასკვნების გამოტანა; ალგორითმი შეიძლება სხვადასხვა სახით ჩაიწეროს.	სიმრავლეებზე მოქმედებები, ვენის დიაგრამები; ოპერაციები გამონათქვამებზე; ალგორითმი, ალგორითმის ჩაწერა	რა მიმართებაა ცნებებს შორის? ყველა სიმრავლის მოცემა შეიძლება ყველა ელემენტის ჩამოთვლით? რა არის კლასიფიკაცია? რა სახით შეიძლება ჩაიწეროს ალგორითმი?	კლასიფიკაციის მაგალითები

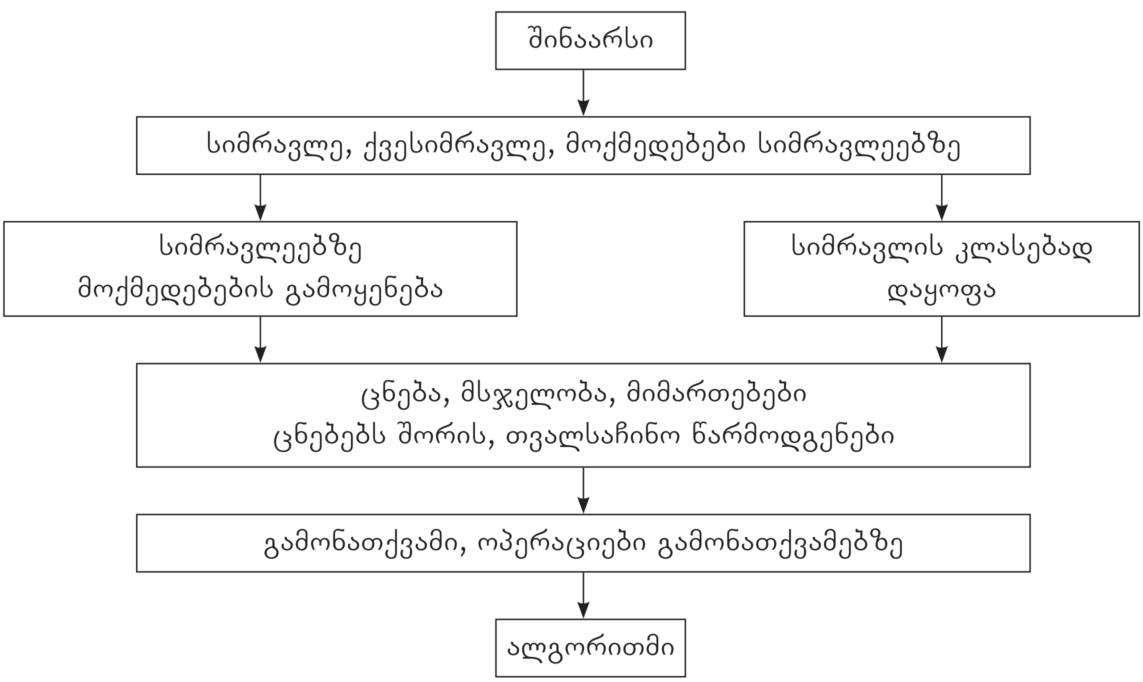
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიმრავლეთა თეორიაზე დაყრდნობით, ლოგიკური მსჯელობითა და დასაბუთებით, ამოცანის ფორმულირება და პრობლემის გადაჭრა (მათ. საბ. 8). პრობლემის გადაჭრისას გამონათქვამების და მათზე ოპერაციების გამოყენებით, დებულების დასაბუთების პირდაპირი და არაპირდაპირი მეთოდების ფლობით ლოგიკური დასკვნების გამოტანა (მათ. საბ. 9).

II თავში წარმოდგენილი მასალა მათემატიკის საშუალო საფეხურის იმ სამიზნე ცნებებსა და შესაბამის მკვიდრ წარმოდგენებზეა დაფუძნებული, რომელთა ნაწილი საბაზო საფეხურის სტანდარტშიც იყო წარმოდგენილი: სიმრავლეები, სიმრავლეთა თეორიის ცნებებისა და ოპერაციების გამოყენებები; სიმრავლეთა თეორიაზე დაყრდნობით, ლოგიკურ მსჯელობათა წარმოდგენა და დასაბუთება ახლა უფრო გაღრმავებული სახით არის მოცემული; სიმრავლეთა კლასიფიკაციის გაცნობა გვეხმარება მათემატიკური (მათ შორის, გეომეტრიული) ობიექტების თვისებების შესწავლაში.

მნიშვნელოვანი სიახლეა გამონათქვამთა თეორიის წარმოდგენა და, გამონათქვამებზე ოპერაციების შემოღების გამოყენებით, დებულებების დასაბუთების ხერხების დაუფლება.

სასკოლო განათლების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ღირებულება მოსწავლეთა ინტელექტუალური განვითარებაა. ეს განვითარება დაკავშირებულია ლოგიკური აზროვნების დახვეწასთან. ლოგიკური ოპერაციები თვალსაჩინოებითა და მისაწვდომი ფორმით არის გადმოცემული; ხშირად ვიყენებთ თეორიულ-სიმრავლურ სიმბოლოებს და სიმრავლეებზე ოპერაციების თვალსაჩინო წარმოდგენებს (ვენის დიაგრამებით). თვალსაჩინო წარმოდგენები ეხმარება მოსწავლეებს, კარგად გაიაზრონ ცნებებს შორის მიმართებები, მოცემული წანამძღვრებიდან სწორი დასკვნების მიღების შემთხვევები.

II თავში წარმოდგენილი საკითხები, მკვიდრ წარმოდგენებთან და საკვანძო შეკითხვებთან მათი კავშირების გათვალისწინებით, შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:



2.1. სიმრავლე. ქვესიმრავლე. სიმრავლის მოცემის ხერხები

თემატური ბლოკი: ლოგიკის საწყისები			
საათების სავარაუდო რაოდენობა: 2 სთ			
სამიზნე ცნებები; სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
სიმრავლე; სიმრავლე შეიძლება შედგებოდეს 1 ელემენტისგან; სიმრავლე შეიძლება არ შეიცავდეს ელემენტს; სიმრავლის მოცემა შეიძლება სხვადასხვა ხერხით: ყველა ელემენტის ჩამოთვლით; მახასიათებელი თვისების მითითებით.	სიმრავლე, ქვესიმრავლე, სიმრავლის მოცემის ხერხები.	შეიძლება თუ არა, რომ სიმრავლე შეიცავდეს მხოლოდ ერთ ელემენტს? ყოველი სიმრავლის მოცემა შეიძლება ყველა ელემენტის ჩამოთვლის საშუალებით? რამდენი ქვესიმრავლე აქვს n-ელემენტიან სიმრავლეს?	**კლასში:** 1-26 **საშინაო:** 1 - 26

აქტივობები. სიმრავლეთა თეორიის საწყისების შესწავლა დაწყებითი და საბაზო საფეხურიდან იწყება; თეორიულ-სიმრავლურ ცნებებსაც ხშირად ვიყენებდით მათემატიკის სხვადასხვა საკითხის გადმოცემისას; ამიტომ პირველ პარაგრაფში წარმოდგენილ საკითხებთან დაკავშირებული წინარე ცოდნის გამეორება მოსწავლეების აქტიური ჩართულობით უნდა მიმდინარეობდეს; მოსწავლის სახელმძღვანელოს ტექსტებიც გვეხმარება შეკითხვების მოძიებასა და მათზე პასუხების გაცემაში.

წინარე ცოდნის გაღრმავება სიმრავლეთა მოცემის ხერხების გააზრებასა და სასრული სიმრავლის ქვესიმრავლეების რაოდენობის ფორმულის მიღებას უკავშირდება. ეს საკითხი მოსწავლეებმა დამოუკიდებლად უნდა შეისწავლონ, უპასუხონ ჯგუფურ დავალებაში დასმულ ამოცანებს, კარგად გაიაზრონ ამ საკითხთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნები (მაგალითი 1, მაგალითი 2, 13, 18, 10, 13, 26, 24, 26).

26 და 26 ამოცანები „მაგალით 1-სა“ და „მაგალით 2-ში“ განხილული ამოცანების ანალოგიურია.

26 4 მოსწავლიდან შეიძლება ვერცერთმა შეძლოს გეგმის განხორციელება, შეიძლება მხოლოდ რომელიმე ერთმა შეძლოს, შეიძლება ორმა შეძლოს, შეიძლება სამმა შეძლოს, შეიძლება ოთხივემ შეძლოს. მაშასადამე, გეგმის განხორციელების იმდენივე ვარიანტი არსებობს, რამდენ ქვესიმრავლესაც შეიცავს 4-ელემენტიანი სიმრავლე — 2^4. (ზოგიერთმა შეიძლება ასეც იმსჯელოს: ოთხი მოსწავლიდან თითოეული ან დარგავს, ან არ დარგავს — ორი შესაძლებლობა აქვს, ოთხივეს — $2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4$).

26 ამ ამოცანაში ყურადღება გამახვილებულია სიტყვაზე — „ერთი მაინც“, რაც ნიშნავს 1-ს, 2-ს, 3-ს, 4-ს, 5-ს ან 6-ს; მაშასადამე, უნდა დავთვალოთ 6-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეების რაოდენობა, ცარიელი ქვესიმრავლის გარდა. ასეთი ქვესიმრავლეების რაოდენობა არის $2^6-1=63$.

ჯგუფური მუშაობისას ყურადღება უნდა გამახვილდეს იმაზე, რომ ქვესიმრავლეების რაოდენობა 2-ის ხარისხია.

სხვა ამოცანები, ძირითადად გავლილი მასალიდანაა. ისინი დაკავშირებულია მკვიდრი წარმოდგენების გააზრებასთან: სიმრავლის მოცემა შეიძლება სხვადასხვა ხერხით — 1, 2, 9, 10, 19, 20, 21, 1, 2, 8, 17, 18, 21, 22.

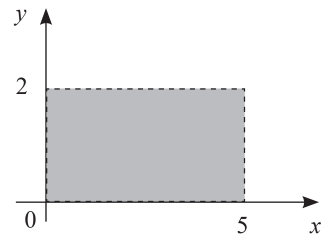
23 მოსწავლეები იხსენებენ, რომ ყოველი ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურა განვსაზღვრეთ, როგორც წერტილთა სიმრავლე სიბრტყეზე. მაგალითად, კუთხის ბისექტრისა ამ კუთხის ყველა იმ წერტილის სიმრავლეა, რომლებიც კუთხის გვერდებიდან ტოლი მანძილებითაა დაშორებული (ამოცანა 3). წრეწირი ყველა იმ წერტილის სიმრავლეა, რომლებიდანაც მანძილი მოცემულ წერტილამდე ერთი და იმავე რიცხვის ტოლია (ამოცანა 10). მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ, სიმრავლეებს შორის მიმართებების გამოსახვის გამოყენებით, გეომეტრიულ ფიგურათა შორის მიმართებების წარმოდგენა. მაგალითად, რომბების სიმრავლე პარალელოგრამების სიმრავლის ქვესიმრავლეა, პარალელოგრამების სიმრავლე ოთხკუთხედების სიმრავლის ქვესიმრავლეა; მნიშვნელოვანია პითაგორას თეორემისა და მისი შებრუნებული თეორემების გააზრება — მართკუთხა სამკუთხედების სიმრავლე ემთხვევა იმ სამკუთხედების სიმრავლეს, რომლის ერთ-ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია (ამოცანა 12). ამიტომ ამ „ტესტის“ პასუხის გარჩევა მოითხოვს შესაბამისი დებულებების ჩამოყალიბებას. სიმრავლურ სიმბოლიკას ვიყენებთ გამყოფებისა და ნაშთების მითითების დროს; აქ მოსწავლემ უნდა გაითვალისწინოს, რომ n ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი შეიძლება იყოს ერთ-ერთი რიცხვი 0-დან $(n-1)$-ის ჩათვლით; 0-ის შემთხვევაში, მოცემული რიცხვი იყოფა ამ n ნატურალურ რიცხვზე.

სასურველია, კლასში გავარჩიოთ 24 ამოცანა და დავუკავშიროთ სიმრავლის ქვესიმრავლეების რაოდენობის ფორმულას. ერთ ჯიბეში შეიძლება მოვათავსოთ რომელიმე 1 მონეტა, 2 მონეტა, 3 მონეტა, 4 მონეტა, 5 მონეტა ან შეიძლება მასში მონეტა არც იყოს. ეს შემთხვევები ამოწურავს ყველა შესაძლებლობას, რადგან ყველა აღნიშნული ვარიანტი აფიქსირებს მეორე ჯიბეში მონეტების რაოდენობასაც. მაშასადამე, გვაქვს 5-ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეების რაოდენობა. შეიძლება იმსჯელონ ასეც: 5 მონეტიდან ყოველ მათგანს აქვს ჯიბეებში განაწილების ორი შესაძლებლობა, სულ —$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^5$ შესაძლებლობაა.

მოსწავლემ უნდა შენიშნოს, რომ ეს ამოცანაც n-ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეების რაოდენობის ფორმულას უკავშირდება; შეიძლება ანალიგიური ამოცანის მოფიქრებაც, მაგალითად ორ ოთახში მოსწავლეების განაწილებაზე, ორ თაროზე 5-ტომეულის წიგნების განაწილებაზე და ა. შ.

ცალკეა გამოსაყოფი ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება მოცემული პირობების მიხედვით სიბრტყეზე წერტილთა სიმრავლეების გამოსახვა. გთავაზობთ მითითებას ერთ-ერთი ამოცანისთვის:

24 ა) $0<x<5$, $0<y<2$ პირობებით მოიცემა იმ მართკუთხედის შიგა ნაწილი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=0$, $x=5$, $y=0$ და $y=2$ წრფეებით;



დ) $x^2+y^2=0$ პირობას აკმაყოფილებს ერთადერთი წერტილი: (0;0).

2.2. მოქმედებები სიმრავლეებზე. ვენის დიაგრამები

თემატური ბლოკი: ლოგიკის საწყისები			
საათების სავარაუდო რაოდენობა: 2 სთ			
სამიზნე ცნებები; სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
სიმრავლე; სიმრავლეებზე მოქმედებები შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვადასხვა ხერხით; შეიძლება წარმოვადგინოთ თვალსაჩინოდ გეომეტრიული ფიგურების გამოყენებით.	სიმრავლეების გაერთიანება და თანაკვეთა; უნივერსალური სიმრავლე; სიმრავლის დამატება.	რა შემთხვევაშია ორი სიმრავლის თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლე? რა შემთხვევაშია ორი სიმრავლის გაერთიანება ამ სიმრავლეთაგან ერთ-ერთის ტოლი?	კლასში: 1-26 საშინაო: 1-24 **ჯგუფური მუშაობა:** სიმრავლეებზე მოქმედებების თვისებები

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიმრავლეთა თეორიაზე დაყრდნობით, ამოცანების ფორმულირება და პრობლემის გადაჭრა, სიმრავლეებზე მოქმედებების აღწერა და თვალსაჩინო წარმოდგენა (მათ. საშ. 8).

აქტივობები: პარაგრაფში წარმოდგენილი საკითხები, შესაძლებელია, მოსწავლეთათვის ნაცნობი იყოს. ეს აძლევს მასწავლებელს საშუალებას, სწავლება ინტერაქტიული მეთოდით კონსტრუქტივიზმის გამოყენებით წარმართოს. ეს მეთოდი გამორიცხავს გაკვეთილის წარმართვის სალექციო ფორმას, არ შემოიფარგლება კითხვა-პასუხის პროცესითაც. კითხვები მოსწავლეებისგანაც უნდა მოდიოდეს (ამის მიღწევა კლასში შემოქმედებითი, მასტიმულირებელი სასწავლო გარემოს შექმნითაა შესაძლებელი და მათი განხილვა, ძირითადად, მოსწავლეთა ერთობლივი ძალისხმევით უნდა მიმდინარეობდეს და გამორიცხავს, ე. წ. „გამოძახებული“ მოსწავლის ხანგრძლივ მონოლოგს ან მასთან მასწავლებლის ხანგრძლივ დიალოგს. სასარგებლოა მოწავლეთა ჩაბმა ახალი ამოცანების შედგენის პროცესშიც.

პირველ გაკვეთილს ვიწყებთ წინარე ცოდნის გააქტიურებით, ახალზე გადასვლის შემზადებით. გაკვეთილის საწყისი ნაწილი, შესაბამისად, შეიძლება ტექსტისგან განსხვავებულიც იყოს; ყურადღებას ვამახვილებთ წინა გაკვეთილის შემაჯამებელ ნაწილზე, კითხვებიც შესაბამისია.

– რა შემთხვევაში ვიტყვით, რომ A და B სიმრავლეები ტოლია?

– თუ A და B სიმრავლეები ტოლი არ არის, არსებობს თუ არა A-ში ელემენტი, რომელიც B-ს არ ეკუთვნის?

– რა შემთხვევაში ვიტყვით, რომ A სიმრავლე B-ს ქვესიმრავლეა? შეიძლება თუ არა A და B ტოლი იყოს, როცა A არის B-ს ქვესიმრავლე?

– როგორ შეიძლება გამოვსახოთ ვენის დიაგრამებით A-სა და B-ს შორის ეს მიმართება $A \subset B$?

ყურადღება მიაქციეთ იმ ფაქტს, რომ ხშირად ცარიელ სიმრავლეზე მოსწავლეები საუბრობენ, როგორც არ არსებულ ობიექტზე – ცარიელი სიმრავლე ისევე არსებობს, როგორც ნებისმიერი სხვა სიმრავლე, „არ არსებობს“ ობიექტები, რომლებიც მისი ელემენტებია.

სავარჯიშოები ისე უნდა შევარჩიოთ (თუ ყველა დავალებას არ შევასრულებთ), რომ ყველა ასპექტი გათვალისწინებული იყოს.

ახალ მასალაზე გადასვლა ვენის დიაგრამებზე საუბრით იწყება და სიმრავლეებს შორის მიმართების ამ დიაგრამებით წარმოდგენით; მნიშვნელოვანია იმ მომენტის გააზრება, რომ $A \subset B$ არ გამორიცხავს A და B სიმრავლეების ტოლობას და გვაქვს ორი სურათი: A არის B-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე და A არ არის B-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე — $A = B$.

სიმრავლეებზე მოქმედებების ახსნისა და სხვადასხვა წარმოდგენის შემდეგ ხაზს ვუსვამთ ნაწილაკების: „ან“, „და“ — გამოყენებას.

ჯგუფური მუშაობის პროექტით წარმოდგენილი სიმრავლეებზე მოქმედებების თვისებების განხილვა მხოლოდ ამავე პროექტის შესრულებით შემოიფარგლება; არ დავავალებთ მოსწავლეებს დაიმახსოვრონ ეს თვისება, მათ უნდა გაიაზრონ დასაბუთების ხერხების არსებობა და მათი გამოყენების შესაძლებლობა.

სხვადასხვა ხერხის გამოყენებით სიმრავლეებზე მოქმედებების წარმოდგენა და მათი დასაბუთება კრიტიკული აზროვნების განვითარებას ემსახურება.

მასწავლებელს შევახსნებთ, რომ კრიტიკული აზროვნება, არის სააზროვნი უნარ-ჩვევა, რომელიც მოიცავს ერთდროულად ორი ან მეტი განსხვავებული მოსაზრების (ამ შემთხვევაში მოსაზრებათა რიცხვი სამია) განხილვას და მათ გაგებას, რაიმე თვისების

დასაბუთებას სხვადასხვა მიდგომის საფუძველზე და იმის გაცნობიერებას, რომ სხვასაც შეიძლება საკუთარი, განსხვავებული მოსაზრება ჰქონდეს. სიმრავლეთა თეორიის შესწავლაში მოსწავლეებს კარგ სამსახურს გაუწევს დამოუკიდებელი მუშაობა — https://www.geogebra.org/m/jbx9dcv8 — ვიდეორესურსით წარმოდგენილი ამოცანების ამოხსნა.

ჯგუფური მუშაობა ითვალისწინებს კომპლექსური დავალებების შესრულებას, რომელიც მიზნად ისახავს მოსწავლეთა ჩართვას თანამშრომლობაში, დავალებების შესასრულებლად ცალკეულ მოსწავლეთა ძალისხმევის მისადაგებას სხვათა ძალისხმევასთან. იქმნება საერთო პროდუქტი, რომელიც იმ ხერხებით დავალებების შესრულებების წარმოდგენაა, რომლებიც სიმრავლეებზე მოქმედებების თვისებების შესწავლისას შეიძლება გამოვიყენოთ. თითოეულ ჯგუფში მოსწავლეები ინაწილებენ დავალებას: ზოგიერთი ცდილობს შეთავაზებული ხერხი გაარჩიოს და გამოიყენოს თვისებების დასაბუთებისას (არ უნდა გამოვრიცხოთ მთელი გუნდის ერთობლივი ძალისხმევა ყველა მიმართულებითაც). მაგალითად, მეორე ხერხით

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

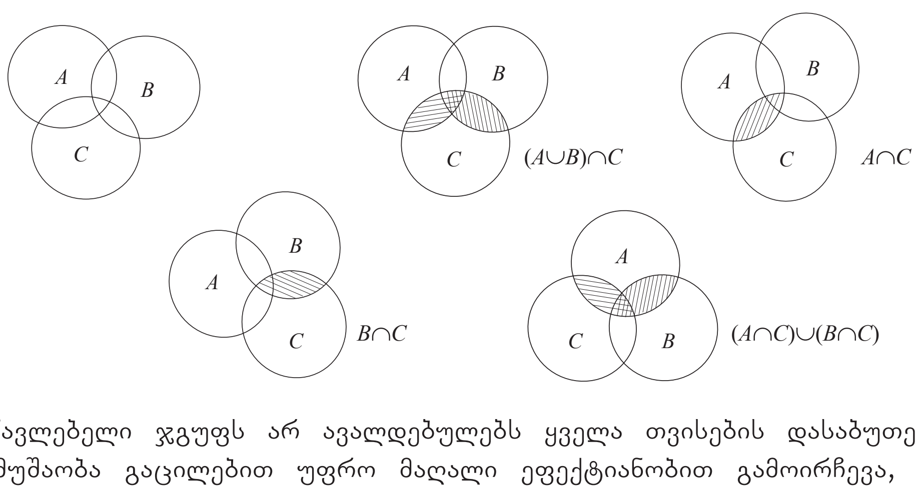
თვისების ჩვენება შემდეგი ცხრილის აგებას გულისხმობს:

A	B	C	$A\cup C$	$B\cup C$	$A\cap B$	$(A\cap B)\cup C$	$(A\cup C)\cap(B\cup C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

ბოლო ორი სვეტი ემთხვევა ერთმანეთს – ეს ასაბუთებს თვისების ჭეშმარიტობას.

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

ტოლობის ვენის დიაგრამით ჩვენების ერთ-ერთი მაგალითი ქვემოთაა მოცემული:



მასწავლებელი ჯგუფს არ ავალდებულებს ყველა თვისების დასაბუთებას. ჯგუფური მუშაობა გაცილებით უფრო მაღალი ეფექტიანობით გამოირჩევა, როცა მას შეჯიბრის ხასიათი აქვს. მოსწავლეებს ეძლევათ გარკვეული დრო და ის ჯგუფი, რომელიც მეტ თვისებას და მეტი ხერხით დასაბუთებას წარმოადგენს, გამარჯვებულად გამოცხადდება. მუშაობის დასასრულს ნაშრომთა პრეზენტაციის ხარისხი ჯგუფების

შეფასების საყურადღებო კომპონენტს უნდა წარმოადგენდეს. მნიშვნელოვანია აგრეთვე წარჩინებულთა გამოყოფა და საჯარო ხაზგასმა მათი წვლილისა.

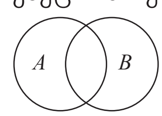
პროექტი სიმრავლეებზე მოქმედებების ძალიან მნიშვნელოვან გამოყენებას ეხება: სასრული სიმრავლეების გაერთიანებაში ელემენტების რაოდენობის გამოსახვა ამ სიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობებით. ეს ფორმულა ხშირად გამოიყენება პრაქტიკულ ამოცანებში. მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ ანალოგიური ამოცანების მოძიება; მაგალითად, შეგვიძლია ვურჩიოთ მოსწავლეებს, მოიძიონ წინა წლებში მისაღებ გამოცდებზე მათემატიკაში მოცემული დავალებები და შეარჩიონ ამოცანები, რომლებიც კომპლექსურ დავალებაში განხილული ფორმულით იხსნება; ეს აქტივობა უკავშირდება საშუალო საფეხურის მე-10 კლასის მიზნებს — მოსწავლეების ნაწილი ემზადება უმაღლეს სასწავლებელში გამოცდების ჩასაბარებლად. თუმცა, მიზანშეწონილია, რომ ყველა მოსწავლე შეეცადოს შეასრულოს კომპლექსური დავალება. მისაღები გამოცდების „ტესტებს" ხშირად ამოხსნების ვარიანტებიც ახლავს — ნუ დავუშლით მოსწავლეებს ამ ამოხსნების გარჩევას და შესწავლას; აქ მთავარია, მოსწავლემ სწორად მიაგნოს იმ პრაქტიკულ ამოცანებს, რომლებიც კომპლექსურ დავალებაში წარმოდგენილი ფორმულით იხსნება.

საშინაო დავალებისთვის მიცემული ამოცანები, ხშირად, კლასში ამოხსნილის ანალოგიურია; ანალოგია — მათემატიკური შემოქმედების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მეთოდია, მისი სრული უგულებელყოფა არ შეიძლება; მთავარია ანალოგიის სწორი გამოყენება. მაგალითად, 15, 16, 20, 21 ამოცანების ანალოგიურია საშინაო დავალების 16, 17 ამოცანები. თუმცა, სრული ანალოგია აქ არ არის. კლასში განვიხილავთ რა $|x-2|\leq 3$ უტოლობას, ყურადღებას ვამახვილებ იმაზე, რომ ეს უტოლობა ტოლფასია ორმაგი უტოლობის $-3\leq x-2\leq 3$, $-1\leq x\leq 5$; აქ შეიძლებოდა ამონახსნთა სიმრავლეების თანაკვეთაზეც გვესაუბრა: $x-2\leq 3$ და $x-2\geq -3$ უტოლობების ამონახსნების სიმრავლეების თანაკვეთა გვაძლევს $|x-2|\leq 3$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეს.

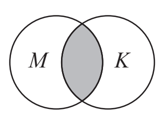
21 ამ ამოცანაში $|2x-1|>5$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე არის $2x-1>5$ და $2x-1<-5$ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეების გაერთიანება.

კლასში დაწვრილებითი მსჯელობის ჩატარების შემდეგ მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ საშინაო დავალების ანალოგიური ამოცანების განხილვა.

ძალიან მნიშვნელოვანია, გეომეტრიულ ფიგურათა სიმრავლეებს შორის მიმართებების წარმოდგენისას, სიმრავლეთა თეორიის გამოყენება.

17 თუ A ტოლფერდა სამკუთხედების სიმრავლეა, B — მართკუთხა სამკუთხედების, C — ბლაგვკუთხა სამკუთხედების, მაშინ $A\cup B$ არის ტოლფერდა ან მართკუთხა სამკუთხედების სიმრავლე. აქვე მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ვენის დიაგრამით ეს სიმრავლე ასე წარმოიდგინება: 

და $A\cap B$ არის ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედების სიმრავლე.

19 ამ ამოცანაშიც სასარგებლოა ვენის დიაგრამის გამოყენება: 

საერთო (დაშტრიხული) ნაწილი არის $M\cap K$ — კვადრატების სიმრავლე.

ნაშთთა არითმეტიკის ცოდნას მოითხოვს 23 ამოცანის ამოხსნა (შედარებით მარტივია საშინაო დავალების ანალოგიური 22 ამოცანა).

სასარგებლოა, რომ თვით A, B და C სიმრავლეებიც აღვწეროთ სიტყვიერად; კლასში ამოვწეროთ ამ სიმრავლეების საწყისი წევრები; ცხადა, A არის იმ ნატურალური რიცხვების სიმრავლე, რომლებიც 3-ზე გაყოფისას ნაშთში 2-ს იძლევა; ეს რიცხვები ასეც შეიძლება ჩავწეროთ: $A=\{x|x=3k+2,\ k=0,\ 1,\ 2...\}$.

ანალოგიურად, ჩავწერთ B და C სიმრავლეებსაც:

$$B=\{x|x=5k+2,\ k=0,\ 1,\ 2...\},$$

$$C=\{x|x=2k+1,\ k=0,\ 1,\ 2...\}.$$

$A\cap B$ სიმრავლის აღწერისას, გავითვალისწინოთ, რომ $3k+2$ რიცხვი 5-ზე გაყოფისას ნაშთს 2-ს იძლევა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა k იყოფა 5-ზე; მაშასადამე:

$$A\cap B=\{x|x=15k+2,\ k=0,\ 1,\ 2...\}.$$

$3k+2$ კენტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა k კენტია ($2k+1$ სახისაა).

ე. ი. $A\cap C=\{x|x=6k+5,\ k=0,\ 1,\ 2...\}$.

$15k+2$ სახის რიცხვი კენტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა k კენტი ($2k+1$ სახისაა)

$$(A\cap B)\cap C=\{x|x=30k+17,\ k=0,\ 1,\ 2...\}.$$

22 ამ ამოცანის ამოხსნისას, გავითვლისწინოთ, რომ ნებისმიერი კენტი რიცხვი 4-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 1-ს ან 3-ს. შესაბამისად,

$$A\backslash B=\{x|x=4k+3,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

კლასში და შინ შესასრულებელი დავალებები გავლილი მასალის გამეორებასაც გულისხმობს, მაგალითად, სიმრავლის ქვესიმრავლეების რაოდენობის ფორმულის გახსენება სჭირდება 9 და 8 ამოცანების პასუხების სწორად მითითებას.

2.3. ამოცანების ამოხსნა ვენის დიაგრამების გამოყენებით

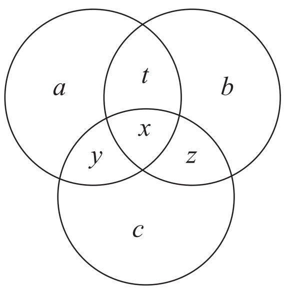
თემატური ბლოკი: ლოგიკის საწყისები **საათების სავარაუდო რაოდენობა:** 3 სთ			
სამიზნე ცნება და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
სიმრავლე, სიმრავლეებზე მოქმედებები. სიმრავლეებზე მოქმედებები შეიძლება თვალსაჩინოდ გამოვსახოთ ვენის დიაგრამებით და გამოვიყენოთ პრაქტიკული (მათ შორის, ლოგიკური) ამოცანების ამოხსნისას.	მოქმედებები სიმრავლეებზე; სიმრავლეებზე მოქმედებების გამოსახვა ვენის დიაგრამებით; ვენის დიაგრამების გამოყენება.	რა გამოყენება აქვს ვენის დიაგრამებს? რაში გვეხმარება სიმრავლეებზე მოქმედებების ვენის დიაგრამებით გამოსახვა?	**კლასში:** 1-12 **საშინაო:** 1 - 12

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს, სიმრავლეებზე მოქმედებების ვენის დიაგრამების გამოყენებით, პრაქტიკული (მათ შორის, ლოგიკური) ამოცანების ფორმულირება და პრობლემის გადაჭრა.

აქტივობები: წინარე ცოდნის გააქტიურება სიმრავლეებზე მოქმედებების გახსენება-სა, ამ მოქმედებების ვენის დიაგრამებით გამოსახვასა და სიმრავლეების მოქმედებებზე ფორმულების დასაბუთებასთან არის დაკავშირებული; ორივე ფორმულის გამოყვანისას, ვსარგებლობთ ვენის დიაგრამებით; ამასთანავე, ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება სიტყ-ვიერი მსჯელობით დაასაბუთოს ფორმულები. სამი სიმრავლის შემთხვევაში კი მსჯელობა შეიძლება ასე ჩავატაროთ:

აქ ასოებით თითოეული ფიგურით წარმოდგენილ სიმრავლეში ელემენტების რაოდე-ნობაა აღნიშნული. თუ წრეებით წარმოდგენილი სიმრავლეებია A, B და C, მაშინ მათ გაერთიანებაში ელემენტების რაოდენობა შეიძლება ასე დავთვალოთ:

$$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+2z+2y+2t+3x-z-y-t-3x+x;$$



ეს კი შეესაბამება კომპლექსური დავალების (2) ფორმუ-ლას. მართლაც, ტოლობის მარჯვენა მხარეს პირველი შვიდი შესაკრები არის $n(A)+n(B)+n(C)$; მომდევნო ოთხი შესაკრებია (აკლდება) $n(A\cap B)$, $n(B\cap C)$ და $n(A\cap C)$; $x=n(A\cap B\cap C)$.

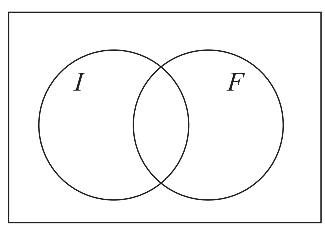
უფრო ადვილია (1) ფორმულის განხილვა, შესაბამისი ვენის დიაგრამის აგება და ამ ფორმულის დასაბუთება. ამ შემთხვევა-შიც, მოსწავლემ შეიძლება სიტყვიერი მსჯელობა გამოიყენოს:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)–n(A\cap B)$; ამ $n(A)+n(B)$ ჯამში A და B სიმრა-ვლეების საერთო ელემენტები ორჯერ არის ჩათვლილი, ამიტომ საჭიროა $n(A\cap B)$ რიცხვის გამოკლება; სამი სიმრავლის შემთხვევაში შეიძლება მოსწავლემ, ცვლადების შემოღები-სა და გამოყენების გარეშე, სიტყვიერი მსჯელობით დაასაბუთოს შესაბამისი ფორმულა. ამოცანების უმრავლესობას შეიძლება პირდაპირ მივუყენოთ აღნიშნული ფორმულები; თუმცა, ეს ყოველთვის არაა გამართლებული. ხშირად იმ შემთხვევებშიც, როცა ფორ-მულების გამოყენებას სწრაფად მივყავართ ამოცანის ამოხსნამდე, სასურველია ვენის დიაგრამების გამოყენება.

თითქმის ყველა „ტესტში" ორი სიმრავლის შემთხვევაა წარმოდგენილი, ამიტომ მოსწავლე სწრაფად პოულობს პასუხს.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად:

1 მოსწავლე სწრაფად პოულობს პასუხს;



თუ I — ინგლისურის მცოდნეთა სიმრავლეა, F — ფრან-გულის, მაშინ, ცხადია, $n(I\cup F)=70+45-23=92$; მაშასადამე, პირველი პასუხი სწორია;

$100-92=8$, მეორე პასუხი სწორია;

პირველი პასუხის ჭეშმარიტება გამორიცხავს მე-3 პა-სუხის ჭეშმარიტებას. შეიძლება შემდეგი პასუხებიც განიხი-ლოთ. მხოლოდ ინგლისური მართლაც იცის $70-23=47$-მა სტუდენტმა.

წინა ამოცანის ანალოგიური სურათისა და მსჯელობის გამოყენებით, მოსწავლე ად-ვილად პოულობს პასუხებს 2-6 ამოცანებზე.

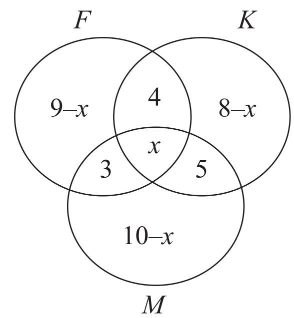
ანალოგიურია საშინაო დავალების ტესტები, სწორი პასუხები შეირჩევა ფორმულისა და შესაბამისი სურათის წარმოდგენის გამოყენებით.

7 ამოცანიდან იწყება სამი სიმრავლის შემთხვევა. ამ შემთხვევაში ზოგჯერ შეიძლება მხოლოდ ფორმულის გამოყენებით დავკმაყოფილდეთ, ზოგჯერ — მხოლოდ დიაგრამის გამოყენებით, ზოგჯერ კი — ფორმულისა და დიაგრამის ერთობლივი გამოყენებით.

მაგალითად, **7** ამოცანაში თუ F ფეხბურთის მოყვარულების სიმრავლეა, K — კალათბურთის, M — მძლეოსნობის, მაშინ ცნობილია, $n(F\cup K\cup M)=38–3$;

მოსწავლეებმა შეიძლება შეცდომით იგულისხმონ:

$n(F\cap K)=4$, $n(F\cap M)=3$ და $n(K\cap M)=5$. ეს საშუალებას მოგვცემდა, რომ გვესარგებლა გამოყვანილი ფორმულით. მაგრამ, ამოცანის პირობის თანახმად, 4 არის არა $n(F\cap K)$, არამედ, $n(F\cap \mathrm{K})–n(F\cap M\cap \mathrm{K})$. უმჯობესია პირობა წარმოვადგინოთ ვენის დიაგრამით:



აღვნიშნოთ: $x=n(F\cap K\cap \mathrm{M})$; შევსებას ვიწყებთ ამ ელემენტით;

სურათის მიხედვით, გვაქვს:

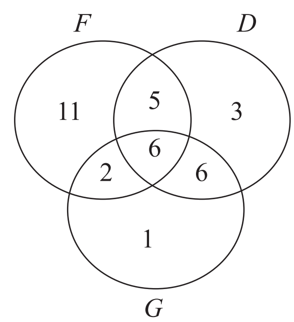
$$38-3=35=n(F)+5+8-x+10\text{-}x$$

$$2x=16+23-35; \quad x=2.$$

მეორე კითხვაზე პასუხის გასაცემად, უნდა ვიპოვოთ: $9-x+10-x+8-x=27-6=21$.

სპორტის მხოლოდ ერთი სახეობით დაკავებულია 21 მოსწავლე.

8 ამ ამოცანის ამოხსნისას შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულით; ვთქვათ, F არის ფერადი ტელევიზორების სიმრავლე, D — 54 სმ დიაგონალის მქონე ტელევიზორების, G — ხმის გამაძლიერებლიანი; მაშინ გვაქვს: $n(F)=24$, $n(D)=20$, $n(G)=15$, $n(F\cap D)=11$, $n(F\cup G)=8$, $n(D\cup G)=12$, $n(F\cup D\cup G)=6$, საიდანაც $n(F\cup D\cup G)=24+20+15-11-8-12+6=34$.



მაგრამ ამ შემთხვევაშიც, ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება ვენის დიაგრამების თვალსაჩინო წარმოდგენა გამოიყენოს; ფიგურების შევსებას რიცხვებით ვიწყებთ სამივე სიმრავლის თანაკვეთიდან:

$$11+3+1+2+5+6+6=34.$$

9 თუ $n(B)=x$, მაშინ $n(A)=x+26$ და შევადგენთ განტოლებას:

$$144=x+(x+26)-22$$

$$2x=140$$

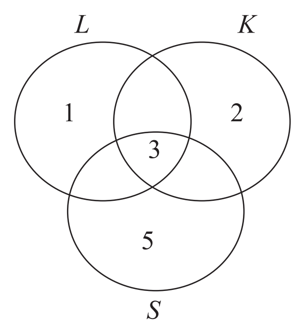
$$x=70;\ n(B)=70;\ n(A)=96.$$

10 აქ შეიძლება ფორმულის გამოყენება (შეიძლება — ვენის დიაგრამისაც).

$$32+12-8=36;$$

$$36+10=46.$$

11 ამ ამოცანის ამოხსნისას, უმჯობესია ვენის დიაგრამით სარგებლობა.



L — მლესავების სიმრავლე,

K — კალატოზების სიმრავლე,

S — შემდუღებელთა სიმრავლე.

ცხადია, შეუვსებელი ფიგურები წარმოგვიდგენს იმ ხელოსნების სიმრავლეებს, რომლებიც ზუსტად ორ პროფესიას ფლობენ. მაშასადამე, საძიებელი რიცხვი არის:

$$30-(1+3+2+5)=19.$$

12 თუ $P\%$ არის იმ პაციენტების პროცენტული წილი, რომლებმაც ორივე სახის მასაჟი გაიკეთეს, მაშინ გვექნება განტოლება P რიცხვის მიმართ:

$$100=82+20-P$$

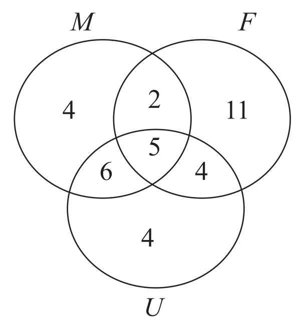
$$P=2,\ P\%=2\%.$$

მაშასადამე, $2\%\ -\ 6,$

$$100\%\ -\ \frac{100\cdot 6}{2}=300.$$

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია. მაგრამ, ცხადია, მხოლოდ ანალოგიური ამოცანებით შემოფარგვლა არ არის მიზანშეწონილი. განვიხილოთ განსხვავებული ამოცანები.

6 აღნიშვნები: U — უცხო ენის შესაბამისი სიმრავლე,
M — მათემატიკის,
F — ფიზიკის.

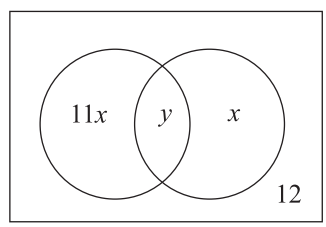


შევსებას ვიწყებთ სამივე სიმრავლის თანაკვეთაში ელემენტების რაოდენობის მითითებით — 5; შემდეგ ჩავწერთ ერთ საგანში „დამაკმაყოფილებლის“ მქონე მოსწავლეების რაოდენობებს: 4, 4 და 11, შემდეგ — ორსაგნიანების რაოდენობებს. შესაბამისად, გვაქვს:

ა) $40-(4+6+5+2+4+11+4)=4;$

ბ) $2+6+4=12.$

9 x — მხოლოდ და ჰყავს;
$11x$ — მხოლოდ ძმა ჰყავს.



პირობით თანახმად,

$$11x+y+x+12=35$$

$$12x+y=23$$

$$23-y=12x$$

მაშასადამე, $23-y$ იყოფა 12-ზე; $y=11.$

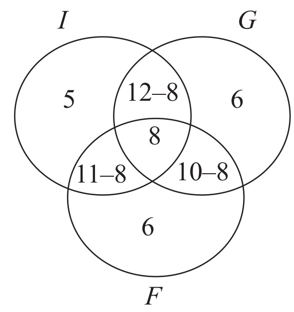
მოსწავლე არ უნდა შეუშინდეს ახალი ცვლადის გამოყენებას. თუმცა, პასუხის მიგნება ზეპირადაც შეიძლებოდა. ამ შემთხვევაში, შემდეგ უნდა დავასაბუთოთ, რომ მიღებული რიცხვი ერთადერთია, რომელიც პირობას აკმაყოფილებს.

10 ამ ამოცანაში მოსწავლეები იხსენებენ მიმართებებს ოთხკუთხედის სახეებს შორის — თუ ოთკუთხედი მართკუთხედიცაა და რომბიც, მაშინ ეს ოთხკუთხედი კვადრატია (თანაკვეთა); ტრაპეცია არ არის პარალელოგრამი.

ოთხკუთხედების ქვესიმრავლეებია პარალელოგრამებისა და ტრაპეციების სიმრავლეები, რომელთაც საერთო ელემენტი არა აქვს. ვენის დიაგრამების გამოყენებით ადვილად იხსნება ეს ამოცანა.

12 შემოვიღოთ აღნიშვნები: I (ინგლისური), G (გერმანული), F (ფრანგული); $n(I)=20$, $n(G)=20$, $n(F)=19.$

დიაგრამის შევსებას ვიწყებთ სამივე სიმრავლის თანაკვეთით.



ა) 5; ბ) 5+6=11;

გ) 5+6+6=17; დ) 5+3+6=14;

ე) 35–(20+12+2)=1.

მდგრადი განვითარების პრინციპების გათვალისწინებით, ჩართულია ამოცანები, რომლებიც ჯანსაღი გარემოს შექმნასთან არის დაკავშირებული. მათემატიკის ამოცანებში შეიძლება ჩავრთოთ ამოცანები, რომლებიც, მაგალითად, მწვანე ნარგავების დარგვის მნიშვნელობას შეახსენებს მოსწავლეებს; ასეთი ამოცანები წინა პარაგრაფშიც იყო და ახლაც არის (მაგალითად, 1); ამასთანავე, პერსონაჟების წარმოდგენისას, დაცულია თანასწორობა სქესისა და სხვა სოციალურ კუთვნილებათა ნიშნით დაყოფის მიმართ.

ტექსტებში, როგორც წესი, ზომიერად არის წარმოდგენილი ახალი ცნებები (შესაბამისი ტერმინები).

2.4. სიმრავლის კლასებად დაყოფა

თემატური ბლოკი: ლოგიკის საწყისები **საათების სავარაუდო რაოდენობა:** 3 სთ			
სამიზნე ცნებები და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
სიმრავლე; სიმრავლის კლასებად დაყოფა. სიმრავლეთა თეორიაზე დაყრდნობით შეიძლება აღვწეროთ ყოფითი მოვლენები და მეცნიერებებში არსებული მრავალი კანონზომიერება.	სიმრავლე, სიმრავლის კლასებად დაყოფა; სწორი და არასწორი კლასიფიკაციის მაგალითები.	რა მნიშვნელობა აქვს ყოფით მოვლენებსა და მეცნიერებებში არსებული კანონზომიერებების კვლევისას კლასიფიკაციას? რით არის გამოწვეული არასწორი კლასიფიკაცია?	**კლასში:** 1-8 **საშინაო:** 1-8
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს, სიმრავლეთა თეორიის ელემენტების გამოყენებით, ამოცანათა ფორმულირება და პრობლემის გადაჭრა.			

აქტივობები: სიმრავლეთა თეორიის ელემენტების გადმოცემას ვამთავრებთ კლასიფიკაციით, რომელიც მათემატიკური კვლევის ერთ-ერთი მეთოდია და გამოიყენება სწავლების პროცესში. წინარე ცოდნა დაკავშირებულია სიმრავლეებზე მოქმედებებისა და მათი

გამოსახვისას ვენის დიაგრამების გამოყენების ამოცანებთან. კლასიფიკაციის კარგად გააზრებისთვის საჭიროა სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთის შესახებ ცოდნის გამეორება და განმტკიცება, შესაბამისი ამოცანების განხილვა. გაკვეთილის პირველი 15 წუთი წინარე ცოდნის გააქტიურებას სჭირდება. ახალ მასალაზე გადასვლა შეიძლება ინტერაქტიულ რეჟიმში ვაწარმოოთ. მაგალითად, ოლიმპიადაზე მონაწილე გუნდების დაყოფას სხვადასხვა ნიშნით მოსწავლეები თავად აღმოაჩენენ; ყურადღება გავამახვილოთ კლასიფიკაციის წესების დაცვაზე — კლასებად დაყოფა ერთი ნიშნით ხდება, მაგალითად, სპორტის სახეობის მიხედვით, სპორტის სახეობაში სქესის მიხედვით. მოვიშველიოთ სწორი კლასიფიკაციის მაგალითები გეომეტრიიდან. გვახსოვდეს, რომ მათემატიკა ერთიანი მეცნიერებაა და სიმრავლური ენა მის ყველა ნაწილში გამოიყენება. მოსწავლეები თავად აღმოაჩენენ არასწორი კლასიფიკაციის მიზეზებს ტექსტში წარმოდგენილ მაგალითებში; მაგალითად, 1. მაგალითში — რიცხვი 0 არ შედის არც ერთ ქვესიმრავლეში. 2. მაგალითში — ტოლფერდა და ტოლგვერდა სამკუთხედების სიმრავლეების თანაკვეთა არ არის ცარიელი, ანუ დარღვეულია ერთ-ერთი პირობა — კლასებს საერთო ელემენტი არ უნდა ჰქონდეს; ქვემდებარე და შემასმენელი წინადადების წევრებია, ზმნა მეტყველების ნაწილია. მოსწავლემ შეიძლება მოიძიოს ინფორმაცია მეტყველების ნაწილების შესახებ, მიუთითოს ლიტერატურაში არსებული კლასიფიკაციის სხვადასხვა მაგალითზე — მეტყველების ნაწილების დაჯგუფებაზე სხვადასხვა ნიშნის მიხედვით; რა საკლასიფიკაციო ნიშანზე აფუძნებენ მეტყველების ნაწილების დაჯგუფებას, მსჯელობენ წინადადებაზე, სიტყვაზე ან სიტყვათა ჯგუფზე, რომელიც დასრულებულ აზრს გამოხატავს. ამ შემთხვევაში კლასიფიკაციის ერთ-ერთი მაგალითი შეიძლება იყოს მთავარი და არამთავარი წევრების გამოყოფა. მოსწავლეები, ამოცანების განხილვის შემდეგ, ერთობლივი მსჯელობის კვალობაზე, სახელმძღვანელოსა და თქვენი დახმარებით, ჩამოაყალიბებენ კლასიფიკაციის წესებს:

1) კლასიფიკაცია ერთი ნიშნით ხორციელდება, მას ერთი საფუძველი აქვს;

2) მიღებული „კლასები“ არათანამკვეთი უნდა იყოს (ზოგიერთები იყენებენ ტერმინს „თანაუკვეთი“);

3) კლასიფიკაცია სრული უნდა იყოს, ე. ი. ყველა კლასის გაერთიანება მოცემულ სიმრავლეს უნდა გვაძლევდეს.

ამ წესების დაცვით, მოსწავლეები ასახელებენ მთელ რიცხვთა სიმრავლის კლასიფიკაციის მაგალითებს (ამოცანა 1):

მაგალითად, დადებითი მთელი რიცხვები, 0, უარყოფითი მთელი რიცხვები. მთელ რიცხვთა დაყოფა 7-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთების მიხედვით (ზოგჯერ მოსწავლეები, ნაშთების მიხედვით კლასიფიკაციისას, ტოვებენ 0 ნაშთის მქონე კლასს — 7-ის ჯერად რიცხვთა სიმრავლეს). ეს დავალება საშუალებას გვაძლევს ყველა მოსწავლე ჩავრთოთ განხილვის პროცესში — მოსწავლეები კლასებად დაყოფის სხვადასხვა შემთხვევას ასახელებენ.

2 ამოცანის ამოხსნისას მოსწავლეებმა შეიძლება გაიხსენონ ხეების კლასიფიკაცია წიწვოვანი და ფოთლოვანი ხეების მიხედვით; ცხოველების სიმრავლე კი შეიძლება დაიყოს შინაურ და გარეულ ცხოველთა კლასებად; თუმცა, შესაძლებელია სხვა კლასიფიკაციაც, მაგალითად, საკვების მიხედვით — ბალახისმჭამელი, მტაცებელი (იკვებებიან სხვა ცხოველებით) და ყოვლისმჭამელი (იკვებებიან მცენარეებითაც და ცხოველებითაც).

კლასიფიკაციის მაგალითების შეგროვება, კლასიფიკაციის წესების ჩამოყალიბება და წესების დარღვევის შემთხვევების ანალიზი მოსწავლეებს კომპლექსური დავალების შესრულებისას მოეთხოვებათ. ანალოგიურად, 3-5 ამოცანებზე პასუხებიც შეიძლება კომპლექსური დავალების რეფერატში წარმოადგინონ. მნიშვნელოვანია მაგალითების მოყვანა გეომეტრიიდან. კლასიფიკაციის სხვადასხვა მაგალითის მოყვანა შეიძლება ოთხკუთხედების შემთხვევაში (მაგალითად, მართკუთხედები და ოთხკუთხედები, რომელთაც ერთი კუთხე მაინც არა აქვს მართი); ან: პარალელოგრამისა და ტრაპეციისგან განსხვავებული ოთხკუთხედები, პარალელოგრამები და ტრაპეციები.

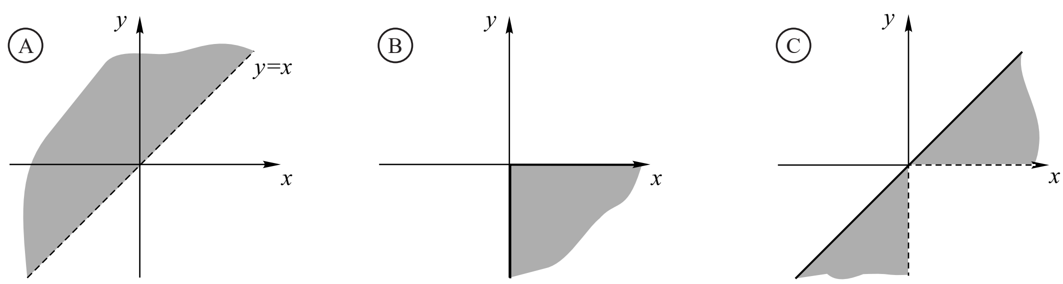
5 ამოცანა მთელ რიცხვთა სიმრავლის კლასიფიკაციის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მაგალითია — ნაშთთა კლასები მოდულით 5 — $5k$; $5k+1$; $5k+2$; $5k+3$; $5k+4$ ($k\in\mathbf{Z}$) სახის ნაშთთა კლასებად იყოფა მთელ რიცხვთა $\mathbf{Z}$ სიმრავლე. A_3 კლასის ნებისმიერი ორი რიცხვის ჯამი ეკუთვნის A_1 კლასს:

$$(5m+3)+(5n+3)=5k+6=5(k+1)+1.$$

6 წყვილების რაოდენობა, ცხადია, არის 100 — პირველი შეიძლება იყოს ერთ-ერთი 10 ციფრიდან, ყოველი დასახელებული პირველი ციფრისთვის, მეორე შეიძლება იყოს ნებისმიერი ციფრი 10-დან. 0, 2, 4, 6, 8 ციფრებს შეიძლება ვუწოდოთ ლუწი ციფრები, 1, 3, 5, 7, 9 ციფრებს — კენტი ციფრები;

წყვილების სიმრავლე შეიძლება, მაგალითად, დავყოთ 2 კლასად — პირველი ციფრი ლუწია, პირველი ციფრი კენტია. ავხსნათ, რას ნიშნავს დალაგებული წყვილი — თუ $a\neq b$, წყვილები (a; b) და (b; a) განსხვავებულად ითვლება. შეიძლება 3 კლასი გამოვყოთ, მაგალითად, პირველი ციფრი 5-ზე ნაკლებია, პირველი ციფრი 5-ია, პირველი ციფრი 5-ზე მეტია. აქ პირველ კლასში 50 ელემენტია, მეორეში — 10, მესამეში — 40. აღსანიშნავია, რომ ციფრთა დალაგებულ წყვილებში ორნიშნა რიცხვები არ მოიაზრება!

8 სიმრავლეები შეიძლება საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოვსახოთ:



სურათის მიხედვით, მოსწავლე ადვილად დაასკვნის: გვაქვს სიბრტყის წერტილთა სიმრავლის კლასებად დაყოფა.

7 აქ მოსწავლემ უნდა შენიშნოს, რომ კლასიფიკაცია არ არის სრული, რადგან, მაგალითად, (4; 0) წერტილი არ ეკუთვნის არც A, არც B სიმრავლეს.

საშინაო დავალების რამდენიმე ამოცანა ნაშთთა კლასებად დაყოფის შესახებ ცოდნის განმტკიცებას ემსახურება; თუ მოდული არის 3, გვაქვს ნაშთთა სამი კლასი, რომელიც გვაძლევს მთელ რიცხვთა სიმრავლის კლასებად დაყოფას (ამოცანა 3).

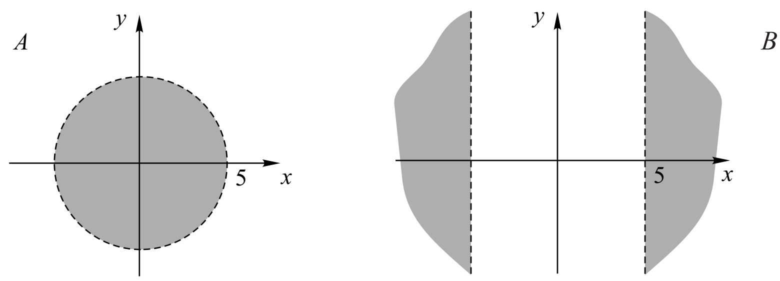
5 ამოცანაში ანალოგიური ნიშნით სამნიშნა რიცხვების სიმრავლის კლასებად დაყოფაა განხილული. მნიშვნელოვანია ვ) დავალების გააზრება — ერთ კლასში მოხვე-

დრილი რიცხვების სხვაობა 3-ზე იყოფა; მაშასადამე, დაყოფა შეიძლება ერთმანეთის ტოლფასი ორი ნიშნით განვახორციელოთ — ყოველ კლასში რიცხვების სხვაობა იყოფა 3-ზე, რიცხვები 3-ზე გაყოფისას ტოლ ნაშთებს იძლევა. მათემატიკით დაინტერესებული მოსწავლეებისთვის შეიძლება ამ საკითხზე დამატებით საუბარიც ჩავატაროთ.

საყურადღებოა 2 ამოცანაზე პასუხის გააზრება — რიცხვი 1 არ არის არც მარტივი და არც შედგენილი.

6 გავითვალისწინოთ, რომ კოორდინატთა სათავე საკოორდინატო მეოთხედებს ეკუთვნის — დარღვეულია კლასიფიკაციის წესი (საკოორდინატო ღერძების წერტილებიც ერთ მეოთხედს არ ეკუთვნის).

7 აქაც დარღვეულია კლასიფიკაციის ერთ-ერთი წესი — სიბრტყის წერტილების ნაწილი არ ეკუთვნის არცერთ კლასს. სიმრავლეების წარმოდგენით საკოორდინატო სიბრტყეზე, ამაში მოსწავლეები ადვილად დარწმუნდებიან.



8 მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ სიმრავლეების გამოსახვა საკოორდინატო სიბრტყეზე; ამის შემდეგ დარწმუნდებიან, რომ გვაქვს სიბრტყის წერტილთა სიმრავლის კლასებად დაყოფა; თუმცა, შეიძლება მსჯელობით დარწმუნდნენ, რომ კლასიფიკაციის წესები, ამ ამოცანის პირობის მიხედვით, დაცულია.

კლასიფიკაციის თემის განხილვაც შეიძლება დავუკავშიროთ მდგრადი განვითარების პრინციპების განხორციელებისთვის ზრუნვას. ამ თემის შესწავლისას აქცენტი გადატანილია დამოუკიდებელ მუშაობაზე, რომელიც კომპლექსური დავალებების შესრულებასთან არის დაკავშირებული. მოსწავლეს შეიძლება მოვთხოვოთ ქართული ენის საკითხებთან დაკავშირებული მასალის მოძიება; კლასიფიკაციის მაგალითების მოძიება მათემატიკაში, ყოფით საკითხებში, ეკონომიკაში, საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში. ერთ-ერთ მაგალითად შეიძლება საგზაო ნიშნების კლასიფიკაცია დავასახელოთ; კლასები აქ განსხვავებული ფიგურებითა და ფერებითაა წარმოდგენილი; მათ თავისი სახელწოდებებიც აქვს („ამკრძალავი ნიშნები“, „გამაფრთხილებელი ნიშნები“...). თუ ეს მაგალითი მოსწავლეთა რეფერატებში არ არის ნახსენები, ჩვენ თვითონ შევახსენოთ მათ და დავაკავშიროთ მდგრადი განვითარების პრინციპებთან (საგზაო ნიშნების როლი უსაფრთხო გარემოს შექმნის საქმეში). ზოგიერთ შემთხვევაში, მოსწავლეს შეიძლება გაუჭირდეს კლასიფიკაციის დასახელება, მაგალითად, სივრცულ გეომეტრიულ ფიგურათა სიმრავლეში; აქ შეიძლება შევახსენოთ მოსწავლეებს „ბინარული კლასიფიკაციის“ შედგენის ერთ-ერთი წესი; მაგალითად, სივრცული ფიგურები შეიძლება დავყოთ მართკუთხა პარალელეპიპედებად და ფიგურებად, რომლებიც მართკუთხა პარალელეპიპედები არ არის. ანალოგიურად შეიძლება დაიყოს პარალელეპიპედების სიმრავლე. მართკუთხა პარალელეპიპედებს მოსწავლეები ყველაზე კარგად იცნობენ; შევნიშნოთ, რომ ბინარულ კლასიფიკაციას **დიქოტომიასაც** უწოდებენ.

ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისთვის
(ამოცანების გამოყენება შეიძლება შემაჯამებელი წერისთვისაც).

თემატური ბლოკი: სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები
საמიზნე ცნებები: სიმრავლე, ქვესიმრავლე; სიმრავლეთა მოცემის ხერხები; ოპერაციები სიმრავლეებზე.
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლეს უნდა შეეძლოს სიმრავლეთა თეორიის ცნებების გამოყენება (მათ. საშ. 8, მათ. საშ. 9).

შეარჩიეთ სწორი პასუხი:

(1) რამდენი ქვესიმრავლე აქვს იმ სამნიშნა რიცხვების სიმრავლეს, რომელთა ციფრთა ჯამია 26?
ა) 1; ბ) 4; გ) 8; დ) 16.

(2) ცნობილია, რომ $\{x \mid (x-2)^2-1=a,\ x\in\mathbf{R}\}$ სიმრავლე ერთელემენტიანია. იპოვეთ a.
ა) -1; ბ) 0; გ) 1; დ) 2.

(3) მაგიდაზე ენციკლოპედიის 6-ტომეული დევს. გვანცა აპირებს ნებისმიერი რაოდენობის წიგნების (არცერთის, მხოლოდ ზოგიერთის ან ყველას) თაროზე გადადებას. გვანცას არჩევანის რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?
ა) 6; ბ) 7; გ) 36; დ) 64.

(4) მოცემულია 1-დან 10-ის ჩათვლით ნატურალური რიცხვებით შედგენილი ყველა შესაძლო დალაგებული წყვილების სიმრავლე: $\{(m;\ n) \mid m\in\mathbf{N};\ n\in\mathbf{N};\ 1\le m\le 10;\ 1\le n\le 10\}$. მიუთითეთ ამ სიმრავლის კლასიფიკაციის მაგალითი
ა) A_1 — „მხოლოდ კენტი რიცხვებისგან შედგენილ რიცხვთა წყვილების სიმრავლე“,
A_2 — „მხოლოდ ლუწი რიცხვებისგან შედგენილ რიცხვთა წყვილების სიმრავლე“;
ბ) A_1 — „იმ რიცხვთა წყვილების სიმრავლე, რომელთა უსგ შედგენილი რიცხვია“;
A_2 — „იმ რიცხვთა წყვილების სიმრავლე, რომელთა უსგ მარტივი რიცხვია“;
გ) A_1 — „იმ რიცხვთა წყვილების სიმრავლე, რომელთა უსგ ლუწი რიცხვია“;
A_2 — „იმ რიცხვთა წყვილების სიმრავლე, რომელთა უსგ კენტი რიცხვია“;
დ) A_1 — „იმ რიცხვთა წყვილების სიმრავლე, რომელთა პირველი წევრი მეტია მეორეზე“;
A_2 — „იმ რიცხვთა წყვილების სიმრავლე, რომელთა მეორე წევრი მეტია პირველზე“.

ამოხსენით ამოცანები:

(5) ვთქვათ, A არის 10-ის ჯერადი ორნიშნა რიცხვების სიმრავლე, B — 15-ის ჯერადი ორნიშნა რიცხვების. იპოვეთ $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$.

(6) A და B სიმრავლეების შესახებ ცნობილია, რომ $n(A\cup B)=n(B)$, $n(B\backslash A)=12$, $n(A\cap B)=10$.
ა) წარმოადგინეთ ამოცანის პირობა ვენის დიაგრამით;
ბ) იპოვეთ $n(A)$ და $n(B)$.

(7) კლასის 40 მოსწავლიდან 21 ცეკვაზე დადის, 15 — სიმღერის წრეზე, 20 — გიტარის წრეზე. მხოლოდ ცეკვის და სიმღერის წრეზე დადის 8 მოსწავლე, მხოლოდ გიტარის

და ცეკვის წრეზე — 12 მოსწავლე. ამ სამი წრიდან მხოლოდ ერთზე დადის 11 მოსწავლე, 7 — არცერთ წრეზე არ დადის.

ა) რამდენი მოსწავლე დადის სამივე წრეზე?

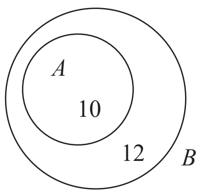
ბ) რამდენი მოსწავლე დადის მხოლოდ ცეკვაზე, მოლოდ სიმღერაზე, მხოლოდ გიტარის წრეზე?

პასუხები

1	2	3	4
გ	ა	დ	გ

(5) $A \cup B = \{10;\ 15;\ 20;\ 30;\ 40;\ 45;\ 50;\ 60;\ 70;\ 75;\ 80;\ 90\}$.

(6) ა)



ბ) $n(A)=10,\ n(B)=22$.

(7) ა) 1, ბ) მხოლოდ ცეკვა — 0, მხოლოდ სიმღერა — 5, მხოლოდ გიტარა — 6.

მითითებები:

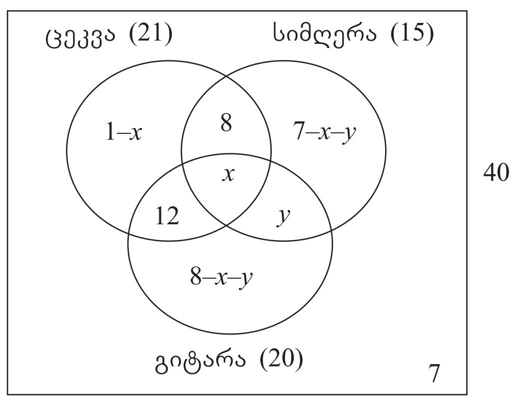
(1) დავალებაში არსებობს ამ თვისების მქონე სამი სამნიშნა რიცხვი.

(2) განტოლებას უნდა ჰქონდეს 1 ამონახსნი, ამიტომ $a+1=0$.

(3) გაიხსენოს მოსწავლემ, რამდენი ქვესიმრავლე აქვს 6-ელემენტიან სიმრავლეს.

(4) სავარაუდო პასუხებიდან ა)-ში გამორჩენილია განსხვავებული ლუწ-კენტოვნების რიცხვებით შედგენილი წყვილები; ბ)-ში — წყვილები, რომელთა უსგ არის 1; დ)-ში წყვილები, რომლებიც ტოლი რიცხვებითაა შედგენილი.

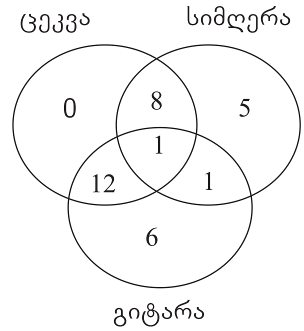
(7) ვენის დიაგრამაზე მივუთითოთ სამი წრის წევრთა განაწილება. თუ სამივე წრეზე მოსიარულეთა რაოდენობას აღვნიშნავთ x-ით, მხოლოდ სიმღერისა და გიტარის წრეზე მოსიარულეთა რაოდენობას — y-ით, მაშინ, ამოცანის პირობის გათვალისწინებით, ასეთი დიაგრამა მიიღება:



თუ გავითვალისწინებთ, რომ მხოლოდ ერთ წრეზე დადის 11 მოსწავლე, ხოლო სულ წრეებში ჩართულია 33 მოსწავლე (40–7=33), მაშინ მივიღებთ შემდეგ სისტემას —

$$\begin{cases}(1-x)+(7-x-y)+(8-x-y)=11\\ 21+7-x+8-x-y=33\end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix}3x+2y=5\\ 2x+y=3\end{matrix} \quad \Bigg| \quad x=1,\ y=1.$$

და საბოლოო განაწილება ასე წარმოდგება:



შეფასების რუბრიკა

(1)-(4) ამოცანებიდან თითოეულის სწორი პასუხი ფასდება 1 ქულით.

(5) ამოცანაში საძიებელი სიმრავლეებიდან თითოეულის წარმოდგენა შეფასდეს 0,5 ქულით, სულ — 2 ქულა.

(6) A და B სიმრავლეების წარმოდგენა პირობის მიხედვით შევსებული ვენის დიაგრამით შეფასდეს 1 ქულით. A და B სიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობების დადგენა — კიდევ 1 ქულით, სულ — 2 ქულა.

(7) ამოცანის პირობის მიხედვით არასრულად, ცვლადების გამოყენებით შევსებული ვენის დიაგრამის წარმოდგენა შეფასდეს 1 ქულით; მხოლოდ ერთ წრეზე მოსიარულე მოსწავლეების რაოდენობისა და სულ ამ წრეებში ჩართულთა რაოდენობის მიხედვით განტოლებათა სისტემის შედგენა — კიდევ 0,5 ქულით; — საბოლოო პასუხების დაფიქსირებისას — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა. ამოცანის სხვა გზით ამოხსნის შემთხვევაშიც რაციონალური ნაბიჯები უნდა შეფასდეს სათანადო ქულებით.

ეს შეფასებები შეიძლება ვაქციოთ განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტად. ამის ნიმუში ერთხელ უკვე წარმოგიდგინეთ. იქვე განვიხილეთ არაერთი ზოგადი რჩევა, რაც განმავითარებელი შეფასების წარმართვას შეეხება, აღვნიშნეთ ამ პროცესში წინმსწრები და შემდგომი მეტაკოგნიტური პაუზების მნიშვნელობა და ამ შეფასების როლი მიმდინარე და სამომავლო აქტივობების დაგეგმვაში.

ამჯერადაც, წარმოდგენილი დამოუკიდებელი მუშაობის დასრულების შემდეგ, კვლავ მივმართავთ განმავითარებელ შეფასებას. ამ პროცესში თვით ელემენტარული საკითხების საჯარო განხილვაც გაამყარებს და გააღრმავებს მოსწავლეთა ცოდნას. მაგალითად, (1) ამოცანაში კიდევ ერთხელ გაიხსენონ მოსწავლეებმა ქვესიმრავლის ცნება. ყურადღება გაამახვილეთ იმ ფაქტზე, რომ ერთი სიმრავლის **ყოველი** ელემენტი უნდა იყოს მეორე სიმრავლის ელემენტიც. მკაფიოდ აღწერეთ მითითებული სამელემენტიანი სიმრავლე. მისი ქვესიმრავლეების რაოდენობის ფორმულის არცოდნის შემთხვევაში, დავასახელებინოთ მოსწავლეებს ეს ქვესიმრავლეები. არ უნდა გამორჩეთ ამ სიმრავლის არასაკუთრივი ქვესიმრავლეები. განხილვის დასასრულს ისაუბრეთ n-ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობის ფორმულის შესახებაც, ჩაინიშნონ მოსწავლეებმა ეს ფორმულა.

(2) ამოცანაში ყურადღება მიაქციეთ სიმრავლის ჩაწერის ფორმას მახასიათებელი თვისების არსებობისას. მიმართეთ მოსწავლეებს: კიდევ რა სახით ჩაწერენ ხოლმე სიმრავლეებს, შეამოწმეთ, თუ $a=0$, ან $a=2$, რამდენი ამონახსნი ექნებოდა მიღებულ განტოლებას x-ის მიმართ.

(3) ამოცანის განხილვისას მიმართეთ მოსწავლეებს: რა შემთხვევები შეიძლება მომხდარიყო — რა გადაადგილება გაეკეთებინა გვანცას? დასმული ამოცანა როგორ „ვთარგმნოთ მათემატიკის ენაზე“? რა ხერხებით შეიძლება ვიპოვოთ საძიებელი რიცხვი? (მაგალითად, ასე: ყოველ ტომს გვანცა ან გადადებს თაროზე, ან — არა, სულ მიიღება $2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2=64$ შემთხვევა. ან დაუკავშირეთ ეს რაოდენობა 6-ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობას).

(4) ყურადღება გაამახვილეთ დალაგებულობის ცნებაზე. სთხოვეთ მოსწავლეებს რამდენიმე ნიმუშის დასახელება. განიხილეთ ამოცანაში წარმოდგენილი სავარაუდო პასუხები და ჩაატარეთ მათი კრიტიკული ანალიზი. საჯარო განხილვით წარმოაჩინეთ სამ მათგანში არსებული ხარვეზები.

(5) ამოცანის განხილვისას კლასმა გაიხსენოს სიმრავლეებზე მოქმედებების განსაზღვრებები და, ამოცანის პირობის გათვალისწინებით, დასახელდეს A და B სიმრავლეების ელემენტები.

(6) ამოცანაში მიმართეთ მოსწავლეებს, აღწერონ მიმართება მოცემულ სიმრავლეთა შორის (მათი გაერთიანება ერთ-ერთი მათგანის ტოლია — ერთი სიმრავლე მეორე სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლეა). ამ შემთხვევაში როგორ წარმოუდგენიათ ამ სიმრავლეთა სხვაობისა და თანაკვეთის მიმართება.

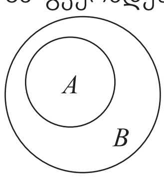
(7) ამოცანის განხილვით მოსწავლეები კიდევ ერთხელ დარწმუნდებიან ვენის დიაგრამის გამოყენების ქმედითობაში. შეახსენეთ მოსწავლეებს, რომ ხშირად, საკითხის კვლევის დაწყებისას, ხელსაყრელია უცნობი სიდიდეების შემოყვანა. მოისმინეთ მათი მოსაზრებები, შეიძლება თქვენც მოგიწიოთ პირველი ნაბიჯის შესახებ მოსაზრების გამოთქმა. ამის შემდეგ ჩართეთ კლასი დიაგრამის წინასწარი მონაცემებით შევსებაში. ერთობლივი განხილვით, ამოცანის პირობის გათვალისწინებით ეს არ გაუჭირდებათ მოსწავლეებს. შემდეგ, ისევ მიუბრუნდით ამოცანის პირობას და მის ამოხსნას დაიყვანთ მარტივი ორუცნობიანი სისტემის ამოხსნამდე. ყველა უცნობის პოვნისა და დიაგრამის სრულად შევსების შემდეგ, კვლავ დაუბრუნდით ამოცანას და იქ დასახელებული ყველა პირობა შეამოწმეთ მიღებული მნიშვნელობებით. ეს მოსწავლეთა კმაყოფილებას გამოიწვევს. შეიძლება ამოხსნის სხვა გზა შემოგთავაზონ მოსწავლეებმა. ყურადღებით, საჯაროდ მიმოიხილეთ ეს მოსაზრებებიც.

დასასრულ, ჩაინიშნეთ ყველა მოსაზრება, რომელიც ამოცანათა განხილვის პროცესში წამოგეჭრათ. მათი ანალიზი და გათვალისწინება დიდ სარგებლობას მოგიტანთ მიმდინარე და სამომავლო აქტივობათა დაგეგმვისა და განხორციელების პროცესში.

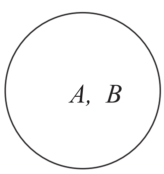
2.5. ცნება. მსჯელობა. მიმართებები ცნებებს შორის

თემატური ბლოკი: ლოგიკის საწყისები **საათების სავარაუდო რაოდენობა:** 2 სთ			
სამიზნე ცნება და მას-თან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
სიმრავლე; ცნება, მსჯე-ლობა, დასკვნა; სიმრავ-ლეთა თეორიის გამოყ-ენებით შეიძლება გამო-ვსახოთ ცნებებს შორის მიმართებები; ვენის დიაგრამები გვეხმარება მსჯელობების სწორად ჩატარებაში	ცნება, მსჯელო-ბა; მიმართებები ცნებებს შორის; წანამძღვრები და დასკვნა; სილოგიზმები.	რა მიმართე-ბები შეიძლება იყოს ცნებებს შორის? რა არის გვარითი ცნება? რა არის ცნების მოცულობა და შინაარსი?	**კლასში:** 1 - 9 **საშინაო:** 1 - 8
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს: სიმრავლეთა თეორიის გამოყენება ცნებებს შორის მიმართებების წარმოდგენისას და აღწერისას; ჭეშმარიტი წანამძღვრებიდან ჭეშმარიტი დასკვნის მიღება; დასკვნის ჭეშმარიტების შემოწმება.			

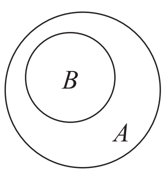
აქტივობები: წინა მასალის გამეორება და ცოდნის განმტკიცება ახალ მასალაზე გადასვლის აუცილებელი პირობაა; ცნება, მსჯელობასა და ცნებებს შორის მიმართებები სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებზე დაყრდნობით განიხილება; ამიტომ მნიშვნელოვანია ისეთი საკითხების ირგვლივ წინარე ცოდნის გააქტიურება, როგორიცაა სიმრავლე და ქვესიმრავლე, სხვადასხვა შემთხვევის გამოსახვა ვენის დიაგრამებით. კიდევ ერთხელ კარგად უნდა გავიაზროთ, რომ A და B სიმრავლეების სამი სხვადასხვა მიმართება შეიძლება გვქონდეს:



$A\subset B$, A არის B-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე — არსებობს B-ს ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის A-ს, იგი B-ში A-ს დამატებითი სიმრავლის ელემენტია.



— A და B ტოლი სიმრავლეებია; $A\subset B$, მაგრამ B-ში არ არის ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის A-ს; ამ დიაგრამით ის შემთხვევაც გამოისახება, როცა $B\subset A$; მაშასადამე, ამ დიაგრამით გამოისახება: $A\subset B$ და $B\subset A$, რაც ნიშნავს: $A=B$.



$B\subset A$, აქ B-ს ყველა ელემენტი შედის A-ში, მაგრამ A-ში არსებობს ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის B-ს (B არის A-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე).

ამ შემთხვევებში „ჩაღრმავება" დაეხმარება მოსწავლეებს ცნებებს შორის მიმართებების ვენის დიაგრამებით გამოსახვის უკეთ გააზრებაში.

რაც შეეხება ცნების „განსაზღვრებას“, აზროვნების ეს კატეგორია აღწერითი ფორმით არის ტექსტში წარმოდგენილი. უფრო დაწვრილებითი აღწერის მოძიება, სათანადო მზაობის არსებობისას, შეიძლება მოსწავლეებს დავავალოთ; მოსწავლემ შეიძლება მოიძიოს მასალა, რომელშიც ნათქვამია, რომ „ცნება არის აზროვნების ფორმა, რომელშიც აისახება საგნების ან მოვლენების საერთო არსებითი და მახასიათებელი თვისებები. ცნების ფორმირების პროცესი აზროვნებაში რთულია და ასე გამოიყურება: შეგრძნება — აღქმა — წარმოდგენა — ცნება — სიტყვა (ტერმინი). ფორმირების პროცესში გონებრივი საქმიანობის ბევრი სახეობა მონაწილეობს — ანალიზი (საგნების ცალკეული თვისებების გამოყოფა), სინთეზი (საგნების გაერთიანება საერთო თვისებების მიხედვით); შედარება (თვისებების შეპირისპირება და შეთანადება); აბსტრაქცია (საერთო არსებითი თვისებების გამოყოფა), დამაგრება ტერმინში, განზოგადება — ცნების შემოტანა, რომელსაც მივუყენებთ ყველა საგანს, რომელთაც გამოყოფილი თვისება აქვს”.

ცნების აღწერა შეიძლება ცალკეული მაგალითების განხილვით მიმდინარეობდეს: „აზროვნების ფორმებია ცნება, მსჯელობა, დასკვნა; რა არის დამახასიათებელი ცნებისთვის? — ცნება აზროვნებაში განზოგადების იარაღია; ცნების ფორმირება ადამიანის გონებაში მჭიდროდ არის დაკავშირებული მის გამოსახვასთან ან ჩაწერასთან. როგორ ხდება ჩვენ გონებაში ცნების ფორმირება? ცნების ფორმირება თანდათანობითი პროცესია; ერთ-ერთი მაგალითი, სიმრავლური კონცეფციით რიცხვის ცნების შემოღებისას, არის ნატურალური რიცხვის ცნების ფორმირების ასეთი აღწერა: როცა ბავშვს იმას კი არ ვეუბნებით რა არის, მაგალითად, რიცხვი 3, არამედ, ამის მაგივრად, ვუჩვენებთ სამ ვაშლს, სამ წიგნს; თანდათან, იგი გამოყოფს თვისებას, რომელიც ყველა ამ მაგალითში საერთოა და თვით შეიმუშავებს წარმოდგენას „რიცხვზე“. როცა დავანახეთ სამი ვაშლი სამი წიგნი, ... თავდაპირველად ყურადღებას აქცევდნენ ამ სიმრავლეების სხვადასხვა კონკრეტულ თვისებებს. ეს აღქმის პროცესია, ცნების ფორმირების საწყისი ეტაპი. აღქმა არსებობს გონებაში იმ დროს, როცა ობიექტი მოქმედებს გრძნობის ორგანოებზე; როცა ობიექტების დანახვის შემდეგ ვამბობთ, გამოყონ ის საერთო, რაც ამ სიმრავლეებს ჰქონდათ, მათ გონებაში აღიბეჭდება საგნების რიცხვი ყოველ სიმრავლეში, ის, რაც ყველგან იყო — „სამი“ — გონებაში იქმნება ახალი ფორმა — წარმოდგენა რიცხვზე „სამი“. შემეცნების შემდეგ საფეხურზე, უნდა შეინიშნოს, რომ თვისება გამოხატული სიტყვაში „სამი“ დამახასიათებელია ნებისმიერი სიმრავლისთვის, რომელიც შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $\{a;\ b;\ c\}$; გამოიყოფა საერთო დამახასიათებელი ამ სიმრავლისთვის: აქვს „სამი ელემენტი“. შეიძლება ითქვას, რომ გონებაში რიცხვი „3“-ის ცნების ფორმირება მოხდა; ამიტომ შეიძლება მითითება:

ცნება არის აზროვნების ფორმა, რომელშიც გამოხატულია ობიექტის დამახასიათებელი თვისებები; ეს დამახასიათებელი თვისებები ქმნის ცნების შინაარსს. ცნების მოცულობა არის ობიექტთა სიმრავლე, რომელსაც ეს ცნება გამოხატავს. მასწავლებლის წიგნში წარმოდგენილი ეს ტექსტი შეიძლება გამოიყენოს მასწავლებელმა, დამატებით, სახელმძღვანელოს ტექსტში მოცემულ მაგალითებთან ერთად, ცნების შესახებ საუბრისას. მოსწავლეებმაც შეიძლება მოიძიონ ანალოგიური დამატებითი მასალა და წარმოადგინონ კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას.

მნიშვნელოვანია „კერძო“ და „გვარითი“ ცნებების შესახებ მაგალითების გარჩევა; ეს საკითხები დაგვეხმარება სხვადასხვა ცნების განსაზღვრების უკეთ გააზრებაში.

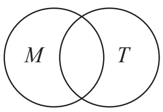
მაგალითად, რომბის ცნება პარალელოგრამის ცნების კერძო შემთხვევაა; პარალელოგრამის ცნება რომბის ცნების გვარითი ცნებაა, ამიტომ ვამჯობინებთ რომბის განსაზღვრებას პარალელოგრამის საშუალებით: „რომბი არის პარალელოგრამი, რომლის ყველა გვერდი ტოლია“ — მითითებულია **უახლოესი** გვარითი ცნება და სახეობით განსხვავებუ-

ლობა — „ყველა გვერდი ტოლია“. თუმცა, შეიძლებოდა ასეც შემოგველო რომბის ცნება — რომბი არის ამოზნექილი ოთხკუთხედი, რომლის ყველა გვერდი ტოლია. ვამჯობინეთ გვარითი ცნების მითითება. ამ საკითხების კარგად გააზრება მნიშვნელოვანია გეომეტრიული ფიგურების თვისებების კარგად გააზრებისთვის. ამ მიმართულებით ცოდნის განმტკიცებას ემსახურება ამოცანები: 1, 2, 7, 1, 3.

ცნებებს შორის 4 მიმართების კარგად გააზრებას ხელს უწყობს ვენის დიაგრამებით თვალსაჩინო წარმოდგენები. ეს მიმართებები არისტოტელეს დროიდან შემოვიდა ლოგიკაში, მათზე აგებულია მსჯელობებისა და მსჯელობებიდან (წანამძღვრებიდან) სწორი დასკვნების მიღებასთან დაკავშირებული საკითხები. აქაც ვენის დიაგრამები გვეხმარება. განსაკუთრებით მარტივია სილოგიზმის მცდარობის დასაბუთება — საკმარისია ერთი კონტრმაგალითის — იმ შემთხვევის მითითება, როცა წანამძღვრების რაიმე წარმოდგენას არ შეესაბამება დასკვნის არცერთი წარმოდგენა. შესაბამისი ცოდნის განმტკიცებას ემსახურება ამოცანები: 3, 4, 5, 8, 9, 6, 7, 8.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

2 ამ ამოცანის ამოხსნას ამარტივებს ვენის დიაგრამების გამოყენება; მაგალითად, ა) შემთხვევაში ცნებების მოცულობებს შორის მიმართება შეიძლება ასე გამოისახოს:

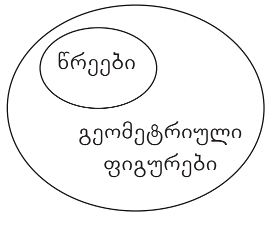


M — მართკუთხა სამკუთხედები;
T — ტოლფერდა სამკუთხედები.

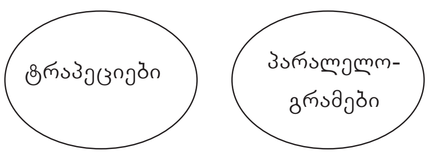
ბ) ტოლგვერდა სამკუთხედების სიმრავლე ტოლფერდა სამკუთხედების სიმრავლის ქვესიმრავლეა — ყოველი ტოლგვერდა სამკუთხედი ტოლფერდა სამკუთხედიცაა.

გ), დ) წინა შემთხვევების ანალოგიურად განიხილება.

ე) ყოველი წრე გეომეტრიული ფიგურაა



ვ)



არცერთი ტრაპეცია არ არის პარალელოგრამი.

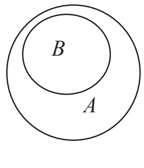
ზ) წინა შემთხვევის ანალოგიურია.

3, 4 და 5 ამოცანებში ის შემთხვევებია განხილული, როცა წანამძღვრების **რაიმე** წარმოდგენას არ შეესაბამება დასკვნის არცერთი წარმოდგენა. ასეთი შემთხვევების მიგნება არ უნდა გაუჭირდეთ მოსწავლეებს.

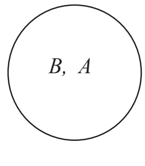
7 თუ ამოვიღებთ „მართკუთხედს“ — ყოველი შემდეგი ცნება იქნება წინას კერძო შემთხვევა; ანალოგიურად — „რომბის“ ამოღების შემთხვევაში.

8 ა) შეიძლება მივაგნოთ წანამძღვრების გამოსახვის იმ შემთხვევას, რომლიდანაც დასკვნის არცერთი გამოსახვა არ გამომდინარეობს. მაგალითად, ადამიანის მიერ დაწერილი განცხადება, წერილი შეიძლება არ შეიცავდეს შეცდომას.

ბ) აღნიშვნები: A — „მევიოლინეების“ სიმრავლე, B — მუსიკოსების სიმრავლე. მაშინ გვაქვს I წანამძღვარი



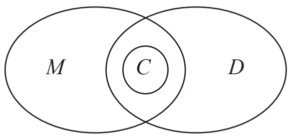
ან



II წანამძღვრის მიხედვით, ზოგიერთი მათემატიკოსი ეკუთვნის B სიმრავლეს, ამიტომ ეკუთვნის A სიმრავლესაც; დასკვნა ჭეშმარიტია.

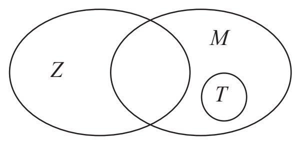
გ), დ) ეს ამოცანები ა) ამოცანის ანალოგიურად იხსნება — ვიპოვით მაგალითს, როცა გვაქვს წანამძღვრების რაიმე ისეთი წარმოდგენა, რომლიდანაც დასკვნის არცერთი წარმოდგენა არ გამომდინარეობს: მაგალითად,

გ)



M — მტაცებლები;
D — ხეზე მცოცავი არსებები,
C — ცხოველები.
M-ში არის ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის D-ს.

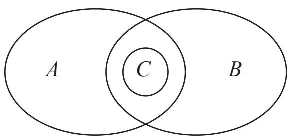
დ) ზანტები — Z
მგლები — M
თბილისის ზოორპარკის მგლები — T
შეიძლება გვქონდეს შემთხვევა:



ამრიგად, ამ შემთხვევაში თბილისის ზოოპარკის არცერთი მგელი არ არის ზანტი.

9 წანამძღვრები ისე შევცვალოთ, რომ დასკვნათა მცდარობის მითითებული მაგალითები არ გვქონდეს. მაგალითად,

ა) შემთხვევაში, დასკვნის მცდარობას, მიგვითითებდა შემთხვევა:

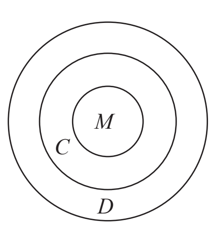


A — შეცდომების შემცველი ტექსტები,
B — ადამიანების მიერ დაწერილი ტექსტები
C — წიგნები.

მეორე წანამძღვარი ისე შევცვალოთ, რომ B იყოს A-ს ქვესიმრავლე, მაგალითად, გვქონდეს: ადამიანები მხოლოდ წიგნებს წერენ.

გ) აქ საკმარისია პირველი წანამძღვარი ასე ჩამოყალიბდეს:

ყველა მტაცებელი ცხოველია. გვექნება:



დ) თუ პირველ წანამძღვარში მხოლოდ 6-ზე ნაკლები არაზანტი მგლების არსებობას დავუშვებთ, მაშინ თბილისის ზოოპარკში ერთი მაინც იქნება ზანტი მგელი.

კლასში ყველა ამოცანის დაწვრილებითი გარჩევის შემდეგ, მოსწავლეები შეძლებენ საშინაო დავალების ამოცანების ამოხსნას; შევნიშნოთ, რომ 3 დავალება შესრულებულ კომპლექსურ დავალებას ეხმიანება — მოსწავლეებს განხილული უნდა ჰქონდეთ განსხვავება წინადადების წევრებსა და მეტყველების ნაწილებს შორის.

2 და 4 დავალებებით ისევე, როგორც საკლასოს 2 და 6 ამოცანებით, მოსწავლეები იხსენებენ და განიმტკიცებენ ცოდნას გეომეტრიული ფიგურების შესახებ.

4 ამოცანის ამოხსნის შემოწმებისას, მივაქციოთ ყურადღება — გვარითი ცნება უახლოესია, თუ არა მოცემული ცნებისთვის.

6 დავალების შესრულებას ამარტივებს იმის მითითება, რომ სილოგიზმის მცდარობის დასასაბუთებლად საკმარისია ვეძებოთ წანამძღვრების წარმოდგენის ერთი მაინც შემთხვევა, როცა არ მიიღება დასკვნის შესაბამისი არცერთი დიაგრამა.

7 შეიძლება ჩაითვალოს, რომ ეს ამოცანა წინას ანალოგიურია, რადგან ყველა შემთხვევაში დასკვნა მცდარია, არ გამომდინარეობს წანამძღვრებიდან.

მივაქციოთ ყურადღება — ლოგიკური გამომდინარეობა ნიშნავს — ჭეშმარიტი წანამძღვარებიდან მიიღება ჭეშმარიტი დასკვნა.

2.6 გამონათქვამები. ოპერაციები გამონათქვამებზე

თემატური ბლოკი: ლოგიკის საწყისები **საათების სავარაუდო რაოდენობა:** 2 სთ			
სამიზნე ცნებები; სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
სიმრავლე; გამონათქვამი და ლოგიკური ოპერაციები. ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილით შეიძლება გამონათქვამთა ტოლფასობის შემოწმება.	გამონათქვამები; ელემენტარული და რთული გამონათქვამები; გამონათქვამის უარყოფა; კონიუნქცია, დიზიუნქცია; ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილები.	რით განსხვავდება გამონათქვამი სხვა წინადადებისგან? რა სახით ჩაიწერება: მესამის გამორიცხვის კანონი? ურთიერთსაწინააღმდეგოთა კანონი?	**კლასში:** 1-15 **საშინაო:** 1-15
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს, პრობლემის გადაჭრისას გამონათქვამებისა და მათზე ოპერაციების გამოყენებით, ლოგიკური დასკვნების გამოტანა (მათ. საშ. 9).			

აქტივობები: წინარე ცოდნის გააქტიურება სილოგიზმების განხილვითა და ცნებებს შორის მიმართებების წარმოდგენით მიმდინარეობს.

— რა ტიპის მსჯელობები განვიხილეთ? რა სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ ეს მსჯელობები?

— რა არის სილოგიზმი?

— რას ნიშნავს დასკვნის ჭეშმარიტება? როგორ ვასაბუთებთ წანამძღვრების ჭეშმარიტებიდან დასკვნის ჭეშმარიტებას?

— რა სახის წანამძღვრები იყო განხილული? ვაქცევდით თუ არა ყურადღებას წანამძღვრებით წარმოდგენილი წინადადებების შინაარსს?

ამ კითხვებზე ანალიზს, თავისთავად მივყავართ ახალი ცნების შემოტანამდე — როცა წინადადების განხილვისას ყურადღებას ვაქცევთ მხოლოდ შემდეგს: ჭეშმარიტია თუ მცდარია. თუ წინადადების შესახებ ვერ ვამბობთ, ჭეშმარიტია თუ მცდარია, მაშინ ამ წინადადებასაც ვერ განვიხილავთ, როგორც გამონათქვამს.

მოსწავლეები თავად შეძლებენ ისეთი წინადადებების დასახელებას, რომლებიც არ არის გამონათქვამი: კითხვითი წინადადება, ბრძანებითი წინადადება. ცვლადის შემცველი წინადადება, მაგალითად, „x ნატურალური რიცხვია" — არ არის გამონათქვამი. ის გამონათქვამად გადაიქცევა, თუ x-ის ნაცვლად დავწერთ, მაგალითად, „2"-ს (ჭეშმარიტი გამონათქვამი), დავწერთ, მაგალითად, „$\frac{1}{2}$"-ს (მცდარი გამონათქვამი).

გადავდივართ რთული გამონათქვამების შედგენის წესებზე — გამონათქვამებზე ოპერაციების შემოღებაზე. ამასთანავე, ყურადღებას ვამახვილებთ საკვანძო შეკითხვებზე პასუხების მოძიებაზე. მესამის გამორიცხვის კანონი ასე ჩაიწერება: ნებისმიერი p გამონათქვამისთვის, რთული გამონათქვამი $p\vee\overline{p}$ ჭეშმარიტი გამონათქვამია; ვწერთ: $p\vee\overline{p}=$„ჭ", მაშასადამე, ყოველთვის ჭეშმარიტია ერთ-ერთი — p ან $\overline{p}$, მესამე შემთხვევა არ გვაქვს. ურთიერთსაწინააღმდეგოთა კანონი კი ასე ჩაიწერება — ნებისმიერი p გამონათქვამისთვის რთული გამონათქვამი $p\wedge\overline{p}$ მცდარი გამონათქვამია, ვწერთ: $p\wedge\overline{p}=$„მ" — არ შეიძლება ერთდროულად p-ც ჭეშმარიტი იყოს და $\overline{p}$-ც. ეს კონიუნქცია ყოველთვის მცდარია.

ძალიან მნიშვნელოვანია ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილების გამოყენება რთული გამონათქვამების ტოლფასობის საჩვენებლად (მკვიდრი წარმოდგენები — გააზრება გამონათქვამთა ტოლფასობის შემოწმებასთან დაკავშირებით). ამ მხრივ გამოყოფილია ცნობილი „დე-მორგანის კანონები":

$$\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}, \qquad \overline{p\wedge q}=\overline{p}\vee\overline{q}.$$

მეორე ტოლობის შემოწმებას მოსწავლეები გაეცნობიან სახელმძღვანელოში. ისინი თავადაც ავსებენ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილს და ამოწმებენ პირველ ტოლფასობას. მაგალითად, პირველი ტოლობის ცხრილი შეიძლება ასე გამოიყურებოდეს:

p	q	$p\vee q$	$\overline{p\vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}\wedge\overline{q}$
ჭ	ჭ	ჭ	მ	მ	მ	მ
ჭ	მ	ჭ	მ	მ	ჭ	მ
მ	ჭ	ჭ	მ	ჭ	მ	მ
მ	მ	მ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ

მე-4 და მე-7 სვეტების მიხედვით ვმსჯელობთ: $\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}$.

ამოცანების საშუალებით განვამტკიცებთ ცოდნას: 1) წინადადებებიდან გამონათქვამების შერჩევის შესახებ (1 და 1), რთული გამონათქვამისა და მისი უარყოფის შედგენის შესახებ (2, 3, 6, 2, 3), წინადადებების ჩაწერისა და გამონათქვამების ენაზე ჩამოყალიბების შესახებ (7, 8, 11, 6, 10, 11, 15); გამონათქვამებზე ოპერაციების ჩაწერისა და ჭეშმარიტობის ცხრილების წარმოდგენის შესახებ (4, 7, 9, 10, 15, 4, 7, 8, 9, 13).

ძალიან მნიშვნელოვანია პრაქტიკული ამოცანები, რომლებიც პირდაპირ უკავშირდება შეფასების ინდიკატორებს (ამოცანები, 12 და 12).

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

(2) ამ ამოცანაში რთული გამონათქვამებია ა) და ბ). თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

p: $-20<0$, q: $-20=0$; მაშინ ა) ასე ჩაიწერება: $p \vee q$.

ძალიან მნიშვნელოვანი ამოცანაა, განსაკუთრებით, „≤“ სიმბოლოს კარგად გასააზრებლად.

ბ) აქ გვაქვს გამონათქვამთა კონიუნქცია.

ანალოგიურია საშინაო დავალების 2 ამოცანის დავალებებიც; მოსწავლემ უნდა შეძლოს მითითება: ა) აქ გვაქვს კონიუნქცია; ბ) გვაქვს კონიუნქცია; გ) გვაქვს დიზიუნქცია: $(-36<0) \vee (-36=0)$ — რადგან ერთ-ერთი ჭეშმარიტია, ამიტომ რთული გამონათქვამი ჭეშმარიტია.

(3) მოსწავლემ უნდა შეძლოს მოცემული ელემენტარული გამონათქვამების გამოყენებით, წაიკითხოს რთული გამონათქვამი; მაგალითად,

ე) $\overline{p} \wedge q$ — დედამიწა არ მოძრაობს მზის გარშემო და დედამიწის ზედაპირს არ აქვს სფეროს ფორმა.

(4) მოსწავლეები ყურადღებას ამახვილებენ „ან“ და „და“ კავშირებზე. მეტი მოფიქრება სჭირდება ა) დავალებას — აქ კონიუნქცია გვაქვს; ორმაგ უტოლობაში კონიუნქციის გააზრება დაეხმარება მოსწავლეებს ასეთი სახის უტოლობების გააზრებაში, ცვლადის შემცველი ორმაგი უტოლობების ამოხსნაში.

(5) აქაც მნიშვნელოვანი ლოგიკური ნიუნსებია, რომელთა გააზრება ამოცანების სწორად გადაწყვეტაში დაეხმარება მოსწავლეს. „$-5>-10$“-ის უარყოფაა გამონათქვამი: „არ არის სწორი, რომ $-5>-10$“; ანუ „$-5\leq-10$“.

(6) გავარჩიოთ $\overline{p \vee q} \wedge r$ გამონათქვამი: „არ არის სწორი, რომ ვიყიდე ველოსიპედი ან სვანეთში ვიმოგზაურე, მაგრამ, ვმონაწილეობდი ჭადრაკის ტურნირში“. როგორც ვხედავთ, აქ გამოვიყენეთ სიტყვა „მაგრამ”, რომელიც ცვლის „და“-ს. შეიძლებოდა ჩამოყალიბება r გამონათქვამით დაგვეწყო და გამოგვეყენებინა ნაწილაკი „და“. მოსწავლეებმა შეიძლება არჩიონ დე-მორგანის ფორმულის გამოყენება ($\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$) და რთული გამონათქვამის ასეც წარდგენა: $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \wedge r$; „არ მიყიდია ველოსიპედი, არ მიმოგზაურია სვანეთში, მაგრამ ვმონაწილეობდი ჭადრაკის ტურნირში“.

ამ ამოცანის ყველა დავალების კარგი გარჩევა ეხმარება მოსწავლეებს განივითარონ ლოგიკური აზროვნება, მიეჩვიონ ე.წ. „ზოგადი უნარების“ ტესტების დავალებების შესრულებას (საშუალო საფეხურის გრძელვადიანი მიზანი).

(7) ამ ამოცანის დავალებები უკავშირდება წინა ამოცანის დავალებებს; მოსწავლემ უნდა შეძლოს „გამონათქვამებისა და მათზე ოპერაციების გამოყენებით ამოცანის ფორმულირება, ლოგიკური დასკვნების გამოტანა“. (მათ. საშ. 8, მათ. საშ. 9). განვიხილოთ ერთ-ერთი დავალება: ვ) „ვიყიდე ველოსიპედი“ — p, ან „ვმონაწილეობდი ჭადრაკის ტურნირში — r $(p \vee r)$ და „ვიმოგზაურე სვანეთში“ — q. $(p \vee r) \wedge q$.

(9) მოსწავლეები უნდა გაიწაფონ ჭეშმარიტობის ცხრილების შედგენაში და, შემდეგი (10) ამოცანის ამოხსნისას, გამოიყენონ გამონათქვამების ჭეშმარიტობის დადგენისას (მკვიდრი წარმოდგენები „ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილების“ გამოყენებაზე).

(11) აქ ხაზგასმულია, რომ მათემატიკურ ლოგიკაში ხდება შინაარსის უგულებელყოფა, მაგრამ შინაარსის გათვალისწინებით, შეიძლება გავარჩიოთ ჭეშმარიტი და მცდარი გამონათქვამები და, ჭეშმარიტობის ცხრილის გამოყენებით, დავადგინოთ მოცემული გამონათქვამი ჭეშმარიტია თუ მცდარია. მაგალითად, ვიცით, რომ საქართველოს კასპიის ზღვა

არ აკრავს, შესაბამისად, შეიძლება ვთქვათ, რომ შესაბამისი p გამონათქვამი მცდარია, „ბრაზილია არ არის აფრიკაში — შესაბამისი q გამონათქვამი მცდარია; მაშასადამე, „p ან q“ არის ორი მცდარი გამონათქვამის დიზიუნქცია — მცდარი გამონათქვამია.

13 $\overline{\text{„32 არ იყოფა 4-ზე“}}$=„32 იყოფა 4-ზე“ — ჭეშმარიტია;
$\overline{5>2}$=„$5\le2$“ — მცდარია,
$\overline{3\le3}$=„$3>3$“ — მცდარია,
$\overline{\text{„2 მარტივი რიცხვია“}}$=„2 არ არის მარტივი რიცხვი“ — მცდარია.

15 ა) „$ab\neq0$“ = „$(a\neq0)\wedge(b\neq0)$“;
ბ) „$a^2+b^2=0$“ = „$a=0\wedge b=0$“;
გ) „$|a|=2$“ = „$(a=2)\vee(a=-2)$“;
დ) „$|a|<2$“ = „$(a<2)\wedge(a>-2)$“;
ე) „$|a|>2$“ = „$(a>2)\vee(a<-2)$“.

ძალიან მნიშვნელოვანი და სასარგებლო დავალებაა, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს ალგებრული განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნისას. ეს ამოცანები კლასში დაწვრილებით და კონსტრუქტივისტულ რეჟიმში უნდა განვიხილოთ.

12 ამოცანა გამონათქვამებს შორის ოპერაციების პრაქტიკული გამოყენების კარგი ნიმუშია. შეიძლება შემოვიღოთ გამონათქვამები:

p — დაოჯახებულია;
q — მარტოხელაა;
r — ანაბარზე აქვს 5 000 ლარი მაინც;
s — პირადი წლიური შემოსავალი არანაკლები 25 000;
t — ოჯახის წლიური შემოსავალი არანაკლები 40 000.

მაშასადამე, სესხის მისაღებად საჭიროა ჭეშმარიტი იყოს

$$r\wedge(q\wedge s)\vee(p\wedge t).$$

ა) ამ შემთხვევაში მცდარია q, ამიტომ მცდარია $q\wedge s$; მცდარია t, ამიტომ მცდარია $p\wedge t$, ე. ი. მცდარია: $r\wedge(q\wedge s)\vee(p\wedge t)$;

ბ) ამ შემთხვევაში ჭეშმარიტია r, ჭეშმარიტია q და s, მაშასადამე, ჭეშმარიტია $r\wedge(q\wedge s)$ და მთელი გამონათქვამიც ჭეშმარიტია.

გ) აქ ჭეშმარიტია r, ჭეშმარიტია p და ჭეშმარიტია t; მაშასადამე, გამონათქვამი ჭეშმარიტია. მოსწავლეებმა შეიძლება ცვლადების შემოღების გარეშე, იმსჯელონ და ისე ამოხსნან ამოცანა.

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, ანალოგიური ამოცანებისგან შედგება. მაგალითად, 12 ამოცანის ამოხსნისას შეიძლება ლოგიკური ცვლადების გამოყენება და რთული გამონათქვამის შედგენა კლასში ამოხსნილი 12 ამოცანის მსგავსად. თუმცა, მოსწავლემ შეიძლება ზეპირად იმსჯელოს: 45 000 ლარის კრედიტის მისაღებად აუცილებელია ანაბარზე იყოს თანხა, არანაკლები 10 000 ლარისა, ამ პირობას არ აკმაყოფილებს გ) დავალების მოცემულობა; დაოჯახებულის შემთხვევაში, საჭიროა წლიური შემოსავალი იყოს 50 000 ლარი მაინც (ამ პირობას აკმაყოფილებს ა) შემთხვევა) და ანაბარზე უნდა იყოს თანხა, რომელიც არაა ნაკლები 10 000 ლარზე; აქ გვაქვს ა) დავალების შესაბამისი პირობების შესრულება. ანალოგიურად, ბ) შემთხვევაშიც ყველა პირობა სრულდება.

პროექტის შესრულება დაკავშირებულია ლოგიკის ჩასახვისა და განვითარების შესახებ მონაცემების შეგროვებასა და შესაბამისი რეფერატის წარმოდგენასთან; რეფერატში უნდა აღინიშნოს, რომ ლოგიკის ძირითადი დანიშნულება არის იმ წესების შემუშავე-

ბა, რომელთა საშუალებითაც მოცემული დებულებებიდან შეიძლება სხვა დებულებების მიღება; ამასთანავე, ყურადღება გამახვილდება მხოლოდ კავშირებზე და წანამძღვრების აგებულებაზე და არა მათ კონკრეტულ შინაარსზე. მაშასადამე, შეისწავლება აზროვნების წესები და არა შინაარსი; სიტყვა ლოგიკაც „შიგა კანონზომიერებებთან არის დაკავშირებული“.

მოსწავლეებს შეუძლიათ განიხილონ ლოგიკის განვითარების ისტორია ჩასახვის პერიოდიდან (ძველი საბერძნეთის, ჩინეთის, ინდოეთის ლოგიკა); რეფერატში ყურადღება შეიძლება გავამახვილოთ მათემატიკური მეთოდების გამოყენებაზე, ლოგიკური ცვლადების გამოყენებაზე; პირველი ნაბიჯები ამ მიმართულებით არისტოტელეს მიერ გადაიდგა; რეფერატში შეიძლება წარმოადგინონ სილოგიზმების თეორია, რომელიც ასრიტოტელეს მიერ შეიქმნა; შეიძლება ლოგიკური ცვლადების გამოყენების მნიშვნელობაზე ვისაუბროთ — გამონათქვამების ისეთი ფორმით ჩაწერა, როცა შესაძლებელია გამოვარკვიოთ, მოცემული დებულებებიდან მიღებული ახალი დებულებების ჭეშმარიტული მნიშვნელობები; ჭეშმარიტობის ცხრილების გამოყენებით შევამოწმოთ ზოგიერთი საინტერესო ლოგიკური ტოლობა, რითაც ვაჩვენებთ რთული გამონათქვამების ტოლფასობას. შეიძლება იმის აღნიშვნაც, რომ მათემატიკური ლოგიკა **საგნის** მიხედვით ლოგიკაა; **მეთოდის** მიხედვით — მათემატიკა — გამოიყენება ლოგიკური ცვლადები და გამონათქვამები ამ ცვლადებით ჩაიწერება. მოსწავლეებს შეუძლიათ გამოიყენონ პრაქტიკული ამოცანები სახელმძღვანელოდან და გამოიკვლიონ ლოგიკური ცვლადების გამოყენების მოხერხებულობა დასკვნების გამოტანის პროცესში.

2.7. პირობითი გამონათქვამები. ტოლფასობის გამონათქვამი

<table>
<tr><td colspan="4">თემატური ბლოკი: ლოგიკის საწყისები
საათების სავარაუდო რაოდენობა: 2 სთ</td></tr>
<tr><td>სიმრავლე; გამონათქვამები;
ოპერაციები გამონათქვამებზე;
გამონათქვამებზე ოპერაციების გამოყენებით შეიძლება ლოგიკური დასკვნების გამოტანა.</td><td>პირობითი გამონათქვამი. ტოლფასობის გამონათქვამი; პირობითი გამონათქვამის შებრუნებული, მოპირდაპირე და კონტრაპოზიციური გამონათქვამები. ეკვივალენციის და იმპლიკაციის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი.</td><td>რა სიტყვებს ვიყენებთ იმპლიკაციის წარმოსადგენად?
რა სიტყვებს ვიყენებთ ეკვივალენციის წარმოსადგენად?
რა შემთხვევაშია იმპლიკაცია მცდარი?</td><td>კლასში:
1-14
საშინაო:
1-17</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს ამოცანის ჩაწერა ლოგიკური ცვლადების გამოყენებით და, პრობლემის გადაჭრისას, ისარგებლოს გამონათქვამებზე ოპერაციებით, ჭეშმარიტობის ცხრილით.</td></tr>
</table>

აქტივობები: გამონათქვამებზე ახალი ოპერაციების შემოღებას წინ უძღვის ძველის გამეორება — შესწავლილი ოპერაციების გამეორება, შესაბამისი ჭეშმარიტობის ცხრილების ანალიზი. ეს პროცესი საშინაო დავალების შემოწმების პარალელურად მიმდინარეობს და ყურადღებას ვამახვილებთ მოსწავლეთა მიერ საშიზნე ცნებების გააზრებაზე (გამონათქვამი, ლოგიკური ოპერაციები — დიზიუნქცია, კონიუნქცია, უარყოფა; წარმოდგენა ჭეშმარიტობის ცხრილებით).

კიდევ ერთხელ შევახსენებთ მოსწავლეებს, რომ მათემატიკურ ლოგიკაში, როგორც წესი, შინაარსს არ ვაქცევთ ყურადღებას; ამასთანავე სხვადასხვა წინადადებას (გამონათქვამს) შორის შეიძლება არ არსებობდეს შინაარსობრივი კავშირები, მაგრამ მათზე ოპერაციებს ვაწარმოებთ, კავშირები „და“, „ან“ — აქ დამატებით აიხსნება და ოპერაციები ამ ახსნის მიხედვით ხდება. ანალოგიურია ვითარება ახალი ოპერაციების შემთხვევაში — სიტყვებით: „თუ ..., მაშინ“ შეიძლება დაკავშირებული იყოს გამონათქვამები, რომლებსაც ერთმანეთთან (შინაარსის მიხედვით) არა აქვს კავშირი და ამ ოპერაციის შედეგი შემდეგნაირად განისაზღვრება: „თუ p, მაშინ q“ მცდარია ერთადერთ შემთხვევაში, როცა p ჭეშმარიტია და q მცდარია; მათემატიკურ დებულებებში, რომლებშიც ეს სიტყვები მონაწილეობს, როგორც წესი, გვაქვს ჭეშმარიტი პირობა (p გამონათქვამი) და თუ მივიღეთ ჭეშმარიტი დასკვნა (q გამონათქვამი), მაშინ „თუ p, მაშინ q“ — ჭეშმარიტია. მაგრამ, როგორც ვხედავთ, ლოგიკაში იმ შემთხვევასაც განვიხილავთ (ამ განხილვას მრავალი გამოყენება აქვს, მაგალითად, მათემატიკის დაფუძნების საკითხებში), როცა p მცდარი შეიძლება იყოს. ამ შემთხვევაში „თუ p, მაშინ q“ ჭეშმარიტია q-ს ნებისმიერი ჭეშმარიტული მნიშვნელობისთვის. ლოგიკის პოპულარულ გამოცემებში „ახსნილია“ ეს გარემოება, მაგრამ ხშირად ეს ახსნა ისე კეთდება, რომ მოსწავლეებისთვის შეიძლება გაუგებარი იყოს — ყურადღება მახვილდება შინაარსობრივ კავშირებზე პირობასა და დასკვნას შორის. ამასთანავე, იმპლიკაცია უნდა განვასხვავოთ ლოგიკური გამომდინარეობისგან, ამიტომ აქ არ ვიყენებთ სიტყვებს — „p პირობიდან გამომდინარეობს q დასკვნა“, ეს ჩანაწერი, როგორც წესი, მაშინ გამოიყენება, როცა მოცემულია ჭეშმარიტი p და ვცდილობთ ვაჩვენოთ, რომ დასკვნა q, ჭეშმარიტია; თუ q ჭეშმარიტი აღმოჩნდა, მაშინ p-დან გამომდინარეობს q. ამიტომ ლიგიკური გამომდინარეობისთვის, ხშირად იმპლიკაციისგან განსხვავებული აღნიშვნები გამოიყენება, მაგალითად, $\models$ ან $\Rightarrow$.

მოსწავლეები ამოწმებენ კონტრაპოზიციის კანონს — შეადგენენ ჭეშმარიტობის ცხრილს და ასაბუთებენ $p \to q$ და $\bar{q} \to \bar{p}$ გამონათქვამების ტოლფასობას.

ამოცანები გვეხმარება ძირითადი საშიზნე ცნებების (გამონათქვამები, ოპერაციები — იმპლიკაცია, ეკვივალენცია, წარმოდგენა ჭეშმარიტობის ცხრილით) და ლოგიკური ოპერაციების ყოველდღიურ ცხოვრებაში გამოყენებების გააზრებაში. არის ამოცანები, რომლებშიც გამონათქვამების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას შინაარსის მიხედვით ვადგენთ (ამას წინასწარ მივუთითებთ). მაგალითად, 1 ამოცანაში გვაქვს იმპლიკაციები, როცა პირობისა და დასკვნის ჭეშმარიტებაზე ჩვენი მათემატიკური ცოდნით ვმსჯელობთ; მაგალითად, $2 \cdot 2$ არ არის 5; 6 არ არის მარტივი რიცხვი. იმპლიკაციის მიხედვით ჭეშმარიტია: „$2 \cdot 2=5 \to 6$ მარტივი რიცხვია“ (მცდარი $\to$ მცდარი). ეს სწორედ ის შემთხვევაა, როცა პირობა და დასკვნა შინაარსობრივად კავშირში არ არის და ჩვენ იმპლიკაციის წესის მიხედვით ვასკვნით — რთული გამონათქვემი (იმპლიკაცია) ჭეშმარიტია.

2 ამ ამოცანაში უნდა შევადგინოთ: $p \to q$; „თუ $ABCD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალები გადაკვეთისას შუაზე იყოფა“.

აქ გვაქვს შინაარსობრივი კავშირი, ამასთანავე, ვიცით, რომ, თუ p ჭეშმარიტია, q ჭეშმარიტია, იმპლიკაცია ჭეშმარიტია. ჭეშმარიტია კონტრაპოზიციური გამონათქვამიც: $\overline{q}\rightarrow\overline{p}$.

მოსწავლეები იხსენებენ თეორემებს გეომეტრიიდან; შესაბამისად, გვაქვს: თუ p ჭეშმარიტია, მაშინ q ჭეშმარიტია, $p\rightarrow q$ ჭეშმარიტია;

თუ q ჭეშმარიტია, მაშინ p ჭეშმარიტია, შესაბამისად, $q\rightarrow p$ ჭეშმარიტია; მაშასადამე, ჭეშმარიტია იმპლაკაციაც: $\overline{p}\rightarrow\overline{q}$.

აქ საკვანძო შეკითხვა შეიძლება იყოს: რა ხდება, როცა p მცდარია და განვიხილავთ $p\rightarrow q$ იმპლიკაციას? ეს იმპლიკაცია (იმპლიკაციის წესის თანახმად) ჭეშმარიტია. თუმცა, მათემატიკურ ამოცანებში მცდარი პირობის შემთხვევაში, კვლევა, როგორც წესი, არ ტარდება — განიხილება ის შემთხვევები, როცა პირობა ჭეშმარიტია და დასკვნის ჭეშმარიტობის შემთხვევაში დებულება ჭეშმარიტია.

3 ამ ამოცანაშიც, მოსწავლე ყურადღებას აქცევს წინადადებების შინაარსს და მსჯელობს წინადადებების ჭეშარიტულ მნიშვნელობაზე. ცხადია, 11 არ იყოფა 6-ზე, 15 იყოფა 3-ზე, 12 იყოფა 6-ზე, 15 არ იყოფა 6-ზე. შესაბამისად, ა) და დ) შემთხვევებში გვაქვს მცდარი პირობები; ა)-ში იმპლიკაცია ჭეშმარიტია (მცდარიდან იმპლიკაცია ჭეშმარიტია), დ)-ში გვაქვს ეკვივალენცია. რადგან პირველი გამონათქვემი მცდარია, მეორე — ჭეშმარიტი, ჭეშმარიტული მნიშვნელობები არ ემთხვევა, რთული გამონათქვამი მცდარია; ბ) იმპლიკაციაა. როცა პირობა ჭეშმარიტია, დასკვნა — მცდარი, იმპლიკაცია მცდარია; გ) აქ ეკვივალენცია გვაქვს; ჭეშმარიტია.

4 ამ შემთხვევაშიც, ვითვალისწინებთ წინადადებების შინაარსს. p ჭეშმარიტი გამონათქვამია, q — მცდარია, $\overline{p}$ — მცდარია, $\overline{q}$ — ჭეშმარიტი. ამის შემდეგ ვისარგებლებთ იმპლიკაციის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის განსაზღვრის წესით: $p\rightarrow q$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p ჭეშმარიტია, q — მცდარი.

5 მოსწავლეებს მოუწევთ ჭეშმარიტობის ცხრილის შედგენა. მაგალითად, ა) დავალებაში ეკვივალენციის შესაბამისი სვეტი მხოლოდ „ჭ“ აღნიშვნებით არის წარმოდგენილი. ასე მტკიცდება სამი წარმოდგენილი რთული გამონათქვამი, ისინი ჭეშმარიტია მასში შემავალი ელემენტარული გამონათქვამების ჭეშმარიტობის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.

6 აქ ყურადღებას ვაქცევთ რა შინაარსს, ვასკვნით: p ჭეშმარიტია, q — ჭეშმარიტია, შესაბამისად, $p\rightarrow q$ ჭეშმარიტია, $q\rightarrow p$ ჭეშმარიტია. $p\leftrightarrow q$ ჭეშმარიტია.

7 შეიძლება შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი. თუმცა, შეიძლება იმპლაკაციისა და კონიუნქციის წესების გათვალისწინება.

იმპლიკაცია მცდარია მხოლოდ ერთ შემთხვევაში, როცა პირობა ჭეშმარიტია, დასკვნა მცდარია:

ა) შემთხვევაში დასკვნა მცდარია, თუ p და q მცდარი გამონათქვამებია. ამ დროს პირობა ჭეშმარიტია და მოცემული რთული გამონათქვამი — მცდარი.

ბ) შემთხვევაში დასკვნა მცდარია, თუ p ჭეშმარიტია და q მცდარი. ამ დროს პირობა ჭეშმარიტია და მოცემული გამონათქვამი მცდარია.

გ) შემთხვევაში დასკვნა მცდარია, თუ p და r ჭეშმარიტი გამონათქვამებია. ამ დროს პირობა ჭეშმარიტია, თუ q ჭეშმარიტია (ამ შემთხვევაში $p\to q$ და $q\to r$ ჭეშმარიტებია და მათი კონიუნქციაც ჭეშმარიტია, ხოლო $p\to\overline{r}$ მცდარია).

მცდარი q-ს შემთხვევაში $p\to q$ და სათანადო კონიუნქციაც მცდარია, იმპლიკაცია ჭეშმარიტია. ამრიგად, მოცემული გამონათქვამი მცდარია, როცა p, r და q გამონათქვამები ჭეშმარიტია. ამავე დასკვნამდე მიგვიყვანდა ჭეშმარიტობის ცხრილების გამოყენებაც.

8 ამ შემთხვევაში ვსარგებლობთ წინადადებებში გამოთქმული დებულებების შინარსით.

10 ა) ამ ამოცანაში იმპლიკაციის განსაზღვრებით ვსარგებლობთ: კვირის ნებისმიერ დღეს, რომელიც არ არის ორშაბათი, გვაქვს: „თუ p, მაშინ q" და p მცდარია, ე. ი. იმპლიკაცია ჭეშმარიტია. ორშაბათს კი p ჭეშმარიტია, q მცდარია, იმპლიკაცია მცდარია.

ბ) კვირის ნებისმიერ დღეს გარდა ორშაბათისა p მცდარია, იმპლიკაცია — ჭეშმარიტი, ორშაბათს — p ჭეშმარიტია, q — ჭეშმარიტი, იმპლიკაცია — ჭეშმარიტი.

11 კლასში ვვარჯიშობთ წინადადების პირობითი წინადადების სახით წარმოდგენაში. ეს სავარჯიშო სასარგებლოა პირობისა და დასკვნის გამოყოფის გასააზრებლად.

12 ვთქვათ, A ნებისმიერი სიმრავლეა, $\varnothing$ — ცარიელი სიმრავლე. $x\in\varnothing\to x\in A$ იმპლიკაციაში პირობა — $x\in\varnothing$ მცდარია, იმპლიკაცია ჭეშმარიტია.

13 ამ ამოცანაშიც ყურადღებას ვაქცევთ წინადადებების შინაარსობრივ მხარეს; ამოცანა ეხება დამტკიცებისას საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხის გამოყენების ერთ-ერთ მეთოდს — კონტრაპოზიციის წესის გამოყენებას. კონტრაპოზიციური გამონათქვამი მოცემულის ტოლფასია. ამრიგად, თუ კონტრაპოზიციური გამონათქვამი მცდარია, მაშინ მოცემულიც მცდარია.

ა) კონტრაპოზიციური: თუ სამკუთხედის ორი კუთხე ტოლია, მაშინ სამკუთხედი ტოლფერდაა — ჭეშმარიტია. ე. ი. მოცემული წინადადებაც ჭეშმარიტია.

ბ) კონტრაპოზიციური: თუ n ნატურალური რიცხვია, მაშინ $\frac{1}{n}$ ნატურალური რიცხვია, მცდარია; ე. ი. მოცემული გამონათქვამიც მცდარია.

14 ეს ამოცანა დაკავშირებულია იმ ლოგიკურ შეცდომასთან, რომელსაც ხშირად უშვებენ ყოველდღიურ ცხოვრებაში. ამიტომ ეს ამოცანა და საშინაო დავალების **16** და **17** ამოცანები კლასში კარგად გავარჩიოთ. მოსწავლეებმა უნდა გაიაზრონ, რომ მოცემული წინადადების ჭეშარიტება არ ნიშნავს, რომ ჭეშმარიტია ამ წინადადების შებრუნებული და მოპირდაპირე წინადადებები.

გასაუბრების გავლა არ ნიშნავს გასაუბრების კარგად გავლას; თუ თქვენ შემოგთავაზეს სამუშაო, ეს არ ნიშნავს, რომ, თქვენ გასაუბრება კარგად გაიარეთ (რადგან შესაძლებელია სამუშაოს შემოთავაზება სხვა ნიშნების გათვალისწინებითაც ხდებოდეს).

მოცემული წინადადებაა:

თუ p, მაშინ q: თუ გასაუბრება კარგად ჩაივლის, მაშინ თქვენ შემოგთავაზებენ სამუშაოს.

შებრუნებული: თუ q, მაშინ p: თუ შემოგთავაზეს სამუშაო, გასაუბრებამ, კარგად ჩაიარა.

პირველი იმპლიკაცია მაშინაც ჭეშმარიტია, როცა p მცდარია, q ჭეშმარიტია, მეორე იმპლიკაცია კი ამ შემთხვევაში მცდარია.

16 ვთქვათ: p: „დღეს პრემიას ავიღებ“;

q: „ახალ მობილურს შევიძენ“.

ჭეშმარიტია იმპლიკაცია: „თუ $p \to$ მაშინ q“.

იგი ჭეშმარიტია, როცა p ჭეშმარიტია და q ჭეშმარიტია და ჭეშმარიტია მაშინაც, როცა p მცდარია, ამიტომ შეუძლებელია დადგენა: p ჭეშმარიტია თუ არა (ხომ შეიძლება ახალი მობილური მისთვის მეგობარს მიეცა?!)

17 ჭეშმარიტია ყველა ის იმპლიკაცია, სადაც პირობაში დასახელებულია $\overline{p}$ ან $\overline{q}$ (ა), ბ), ე)); გ) ცხადია, $p\leftrightarrow q$ ჭეშმარიტია, რადგან p ჭეშმარიტია, q ჭეშმარიტია. დ) მცდარია, რადგან $\overline{q}$ მცდარია, p ჭეშმარიტია.

საშინაო დავალების სხვა ამოცანები კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია; ზოგიერთ შემთხვევაში ყურადღებას ვამახვილებთ შინაარსზე და ვიხსენებთ შესწავლილ საკითხებს რიცხვებისა და ფიგურების შესახებ (**2**, **3**, **10**).

ზოგიერთ შემთხვევაში საჭიროა, ჭეშმარიტობის ცხრილის შედგენა, ან ზეპირი მსჯელობა (**4** - **8**).

მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ მოცემული წინადადების შებრუნებულის, მოპირდაპირე და კონტრაპოზიციურის შედგენა (**9**).

11 ამოცანა **10** ამოცანის ანალოგიურია.

14 ამოცანის პირობის შესაბამისად, გვაქვს ჭეშმარიტი გამონათქვამი:

$$(p_1\to p_2)\wedge(\overline{p_3\to p_2}).$$

აქედან ვღებულობთ: p_3 ჭეშმარიტია, p_2 მცდარია, ($p_3\to p_2$ მცდარია), p_1 მცდარია.

ეს ამოცანაც კლასში დაწვრილებით გავარჩიოთ.

2.8. ალგორითმი

თემატური ბლოკი: ლოგიკის საწყისები, პროგრამირების საწყისები **სავარაუდო დრო:** 2 სთ			
სამიზნე ცნება და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
სიმრავლე; ალგორითმი, ბლოკ-სქემა; პროგრამირება — თეორიული და პრაქტიკული საქმიანობა, დაკავშირებული პროგრამების შედგენასთან; პროგრამირების მნიშვნელოვანი დამხმარე საშუალებაა ალგორითმების შედგენა და განხორციელება	ალგორითმი, ალგორითმის სახეები; ალგორითმის შედგენის მაგალითები	რა სახით შეიძლება იყოს წარმოდგენილი ალგორითმი? რა არის ბლოკ-სქემა?	**კლასში:** 1-5 **საშინაო:** 1-6
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს ამოცანის ამოხსნის ალგორითმის შედგენა, ალგორითმის ჩაწერა სხვადასხვა ფორმით; შეძლოს ამოცანის ფორმულირებისა და ამოხსნის სხვადასხვა ხერხის გამოყენება (მათ. საშ. 8, მათ. საშ. 9. მათ. საშ. 6).			

აქტივობები: ამოცანის ჩაწერისას სხვადასხვა ხერხის გამოყენება წინარე ცოდნას უკავშირდება — ვიყენებდით ლოგიკურ ცვლადებს, გამონათქვამებს შორის მოქმედებებს, მოქმედებების თვისებებს ამოცანების მოხერხებულად ჩაწერისა და ამოხსნისას. ეს წინარე ცოდნა უკავშირდება ახალი ცნების განხილვას; ამიტომ მნიშვნელოვანია წინარე ცოდნის ამ ასპექტების გააზრება. მას „გადაებმება" ახალი ცოდნის მიღება — ამოცანის ჩაწერა „მკაცრად განსაზღვრული მოქმედებების შესაბამისად, რომელთა გადაწყვეტას ამოცანის გადაწყვეტამდე მივყავართ".

მასწავლებლებს შევახსენებთ, რომ ალგორითმის ცნება მათემატიკის მნიშვნელოვანი ცნებაა. ამჟამად ის მჭიდროდაა დაკავშირებული კომპიუტერული პროგრამების შედგენასთან. XX საუკუნის ოციან წლებში დიდი მათემატიკოსის დავიდ ჰილბერტისა და სხვა მათემატიკოსების შრომებში გამოჩნდა ალგორითმის მკაცრი მათემატიკური განსაზღვრება. მოსწავლეებს წარმოდგენას ვუქმნით ამ ცნებაზე; სხვადასხვა ალგორითმის განხილვის საფუძველზე, მიმდინარეობს ახსნა იმისა, თუ რას ნიშნავს სიტყვები: „ალგორითმი არის მკაცრად განსაზღვრული მიმდევრობა ზუსტად ჩამოყალიბებული მოქმედებებისა, რომელთა განხორციელებას დასმული ამოცანის გადაწყვეტამდე მივყავართ" (იხ. მაგ., [9]). აქ მითითებულ სახელმძღვანელოში საინტერესოდ და მისაწვდომი ფორმით (სხვა საკითხებთან ერთად) გადმოცემულია ინფორმატიკის მათემატიკური საფუძვლები (მათემატიკური მოდელირება, ალგორითმები). ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ალგორითმის — „ევკლიდეს ალგორითმის" — შესწავლა პროექტში გავითვალისწინეთ. ამ დავალების შესრულებისას,

მოსწავლე პოულობს რიცხვების უდიდეს საერთო გამყოფს სხვადასხვა ცნობილი ხერხით და იყენებს ევკლიდეს ალგორითმს.

მოსწავლემ უნდა შეძლოს, რომ დაახასიათოს ევკლიდეს ალგორითმი, გამოარჩიოს მისი დამახასიათებელი ნიშანი — ციკლის არსებობა და მისი მოქმედება. რეფერატის მომზადებისას, საჭირო იქნება დასაბუთების უნარის გამოვლენა ($a=bq+r$, $0\leq r<b$, ტოლობაში: უსგ(a; b)=უსგ(b; r)). მოსწავლემ უნდა მოიპოვოს ცნობები ევკლიდეს მოღვაწეობის შესახებ, ევკლიდეს მიერ შექმნილი თხზულების — „საწყისების" — შესახებ. ამ თხზულების დიდი ნაწილი (13 წიგნიდან 9 წიგნი) გეომეტრიას ეძღვნება. მოსწავლეებმა შეიძლება აღმოაჩინონ, რომ თავდაპირველად უდიდესი საერთო გამყოფის პოვნის ალგორითმი გეომეტრიულად იყო წარმოდგენილი. საინტერესოა გეომეტრიული ინტრპრეტაციის გაცნობაც.

უნდა ვიპოვოთ: უსგ (324; 141).

განვიხილოთ მართკუთხედი, ზომებით: 324×141 (სმ) ჩამოვჭრათ რამდენიმე კვადრატი, ზომებით, 141×141 (სმ), სანამ არ დაგვრჩება მართკუთხედი, რომლის ერთი გვერდი 141 სმ-ია, მეორე — ნაკლებია 141 სმ-ზე (42 სმ-ია). მიღებული მართკუთხედიდან კვლავ ჩამოვჭრით კვადრატებს, რომელთა ერთი გვერდი 42-ია, დაგვრჩება მართკუთხედი: 42×15; ჩამოიჭრება 3 კვადრატი: 42×42 ზომის. დარჩენილი მართკუთხედიდან ჩამოვჭრით კვადრატებს, რომელთა გვერდი 15-ია (ორი კვადრატი). დაგვრჩება მართკუთხედი: 15×12. კვლავ ჩამოვჭრით (ერთ კვადრატს), დაგვრჩება მართკუთხედი, ზომებით: 12×3, მასში 3 სმ-ის გვერდის მქონე კვადრატი ზუსტად 4-ჯერ მოთავსდება; უსგ(141, 324)=3.

მოსწავლემ შეიძლება წარმოადგინოს „არითმეტიკული" ჩანაწერი. აქ შეიძლება საუბარი გაგრძელდეს მონაკვეთების არათანაზომადობის შესახებ — როცა ორი მონაკვეთისთვის არ არსებობს მონაკვეთი, რომელიც მთელ რიცხვჯერ თავსდება ორივე მონაკვეთში.

საკლასო და საშინაო დავალებები შეიცავს ამოცანებს, რომლებიც ალგორითმის ცნების შესახებ ცოდნის განმტკიცებისთვის არის განკუთვნილი.

1 აქ საჭიროა ალგორითმის შესაბამისი ოპერაციების მითითება და მოქმედებების შესრულების წესის განსაზღვრა.

2 ამ ამოცანის შესაბამისი ალგორითმი შეიძლება (მოქმედებების მითითებებით) ასე წარმოვადგინოთ. აქ საკვანძო მომენტი არის a პარამეტრის იმ მნიშვნელობების პოვნა, რომელიც არსებითია ამოცანის ამოსახსნელად; ცხადია, $a=2$ და $a\neq 2$ შემთხვევებს სხვადასხვა ამონახსნამდე მივყავართ, ამიტომ მნიშვნელოვანია მითითებებში ამ მომენტის გააზრება. შესაბამისად, გვაქვს:

I. თუ $a=2$, გადავიდეთ III-ზე; თუ $a\neq 2$, გადავიდეთ II-ზე.

II. განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი: $x=\dfrac{b}{2-a}$.

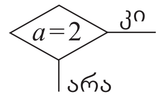
III. თუ $b=0$, გადავიდეთ IV-ზე, თუ $b\neq 0$, გადავიდეთ V-ზე.

IV. ნებისმიერი რიცხვი განტოლების ფესვია, გადავიდეთ VI-ზე.

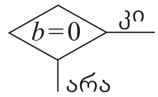
V. განტოლებას ფესვი არა აქვს, გადავიდეს VI-ზე.

VI. ამოხსნა დამთავრებულია.

ცხადია, თავდაპირველად, შეიძლება მოსწავლეებს გაუჭირდეთ მითითებების ასე „მწყობრად" ჩამოყალიბება, მაგრამ შემთხვევების განხილვის საჭიროება უნდა დაინახონ და შემდეგ შეეცადონ — ასახონ ბრძანებებში. ბლოკ-სქემების გამოყენებისას, არსებითია იმ ბლოკის არსებობა, რომელიც პირობის შემოწმებასთან არის დაკავშირებული, მაგალითად,



და



რომბის გამოყენებას მოსდევს ორი ალტერნატიული გზის არსებობა.

3 ამოცანის პირობის თანახმად, სამივე სახეობის საქონლის P ღირებულება ასე ჩაიწერება: $P=ax+by+cz$. P სიდიდე გამოითვლება მოცემული a, b, c, x, y, z სიდიდეების მიხედვით. მაგრამ გადასახდელი თანხა M, პირობის თანახმად, მხოლოდ იმ შემთხვევაშია P-ის ტოლი, როცა $P\leq1000$; სხვა შემთხვევების გათვალისწინებითაც, გვაქვს შემდეგი ალგორითმი:

I. ნავაჭრის ღირებულება: $P=ax+by+cz$. გადავიდეთ II-ზე.

II. თუ $P\leq1000$, მაშინ $M=P$ და გადავიდეთ V-ზე, თუ არა — III-ზე.

III. თუ $P\leq5000$, მაშინ $M=0{,}95P$ და გადავიდეთ V-ზე, თუ არა — IV-ზე;

IV. $M=0{,}9P$ და გადავიდეთ V-ზე;

V. ამოხსნა დამთავრებულია.

4 მოსწავლემ უნდა შეძლოს ბლოკ-სქემით მოცემული ალგორითმის წაკითხვა და ანალიზი.

ა) ვკითხულობთ: ყოველი დაგვიანებული დღისთვის ჯარიმა 1 ლარია; თუ გადააცილა x დღე, ჯარიმა x ლარია, რადგან ყდა იყო დაზიანებული — ჯარიმა 5 ლარია, აკლია 3 ფურცელი — ჯარიმა — $3\cdot0{,}5=1{,}5$ (ლარი); პირობის თანახმად, $x+5+1{,}5=9{,}5$; $x=3$.

გადააცილა 3 დღე.

ბ) წინა კითხვაზე პასუხის პოვნის შემდეგ, ადვილია ამ კითხვაზე პასუხის მოძიებაც — 2 დღით დაგვიანება — ჯარიმა 2 ლარი, 5 ფურცლის დაზიანება — $5\cdot0{,}5=2{,}5$ (ლარი); სულ — $2+2{,}5=4{,}5$ (ლარი).

გ) მოსწავლე პოულობს შესაბამის პირობას — დაზიანებული ყდისთვის 5 ლარია ჯარიმა; მაშასადამე, ყდა არ იყო დაზიანებული.

დ) იმ შემთხვევაში, თუ ფურცლები არ იყო დაზიანებული, მკითხველს გადასახდელი ექნებოდა ლარების მთელი რიცხვი — ყოველ დაგვიანებულ დღეზე 1 ლარი, დაზიანებულ ყდაზე — 5 ლარი. მაშასადამე, ფურცლების კენტი რაოდენობაა დაზიანებული.

5 y-ის x-ზე დამოკიდებულება შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$y=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x\leq0 \\ 2{,}5x, & \text{თუ } 0<x<2 \\ 5 & x\geq2 \end{cases}$$

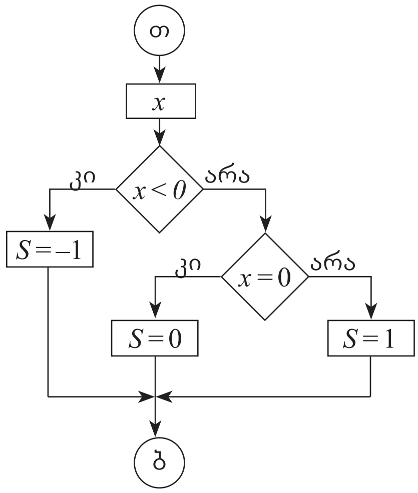
შესაბამისობის ამ ჩაწერის მიგნება მოსწავლეებისგან ბლოკ-სქემის წაკითხვისა და ანალიზის კარგ უნარს მოითხოვს.

მასწავლებელმა შეიძლება აირჩიოს სხვა გზა — x-ის კონკრეტული მნიშვნელობების განხილვა (ა) კითხვაზე პასუხის მოძიება), შემდეგ ანალიზი და შესაბამისობის ფორმულებით გამოსახვა.

კლასში ამოცანების დაწვრილებითი გარჩევა დაეხმარება მოსწავლეებს საშინაო დავალების დამოუკიდებლად შესრულებაში.

ძალიან საინტერესოა 1 დავალების შესრულება; ბლოკ-სქემით იმ ფუნქციის მნიშვნელობების პოვნის პროცესის აღწერა, რომელიც მათემატიკურ ანალიზში და რიცხვთა თეორიაში ხშირად გამოიყენება.

სქემის სახით sing(x)-ის (S-ის) პოვნის ალგორითმის ასე წარმოიდგინება:



ეს ალგორითმი ასეც შეიძლება წარმოვადგინოთ:

I. ვამოწმებთ: $x<0$, თუ პირობა სრულდება, $S=-1$ და გადავდივართ IV-ზე. თუ არა, გადავდივართ II-ზე.

II. ვამოწმებთ: $x=0$, თუ პირობა სრულდება, მაშინ $S=0$ და გადავდივართ IV-ზე. თუ პირობა არ სრულდება, გადავდივართ III-ზე.

III. $S=1$ და გადავდივართ IV-ზე.

IV. დასასრული.

თუმცა, შესაძლებელია, სხვა წარმოდგენებიც, მაგალითად, ვიწყებთ: „$x\geq 0$“ პირობის შემოწმებით და ა. შ.

3 ამ ამოცანას მოსწავლეები კლასში ამოხსნილი **2** ამოცანის ანალოგიურად ხსნიან.

4 საწვავის ხარჯის პოვნის ალგორითმი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

I. საწვავის ხარჯია p (ლ); გადავიდეთ II-ზე;

II. თუ $V\leq 50$, გადავიდეთ VI-ზე, თუ არა — III-ზე;

III. თუ $V\leq 80$, გადავიდეთ V-ზე, თუ არა IV-ზე;

IV. $p=0{,}18S$, გადავიდეთ VII-ზე;

V. $p=0{,}12S$, გადავიდეთ VII-ზე;

VI. $p=0{,}16S$, გადავიდეთ VII-ზე;

VII. ამოხსნა დამთავრებულია.

მაშასადამე, V-ს მიმართ შუალედები ასე გამოიყოფა: $V\leq 50$; $50<V\leq 80$, $V>80$.

ძირითადი მომენტები ამ შუალედების გამოყოფაა.

5 მოსწავლემ უნდა შეძლოს ბლოკ-სქემის განხილვა და მისი საშუალებით პასუხების მოძიება. ა) კითხვის მიხედვით, შეძენილის ღირებულებაა: $P=(120+230)=350$ (ლარი)<1000 (ლარი) და 350 (ლარი)≥ 100 (ლარი), ამიტომ გადასახდელია $0{,}9P$ (ლარი)$=315$ (ლარი).

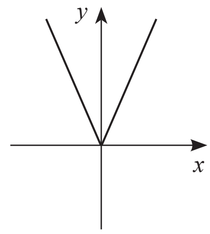
ბ) შეძენილის ღირებულებაა: $2\cdot 760=1520\geq 1000$, ამიტომ გადასახდელია: $0{,}8\cdot 1520=1216$ (ლარი).

გ) გადასახდელია: 82 ლარი (ღირებულება <100).

დ) აქ მოსწავლემ უნდა განსაზღვროს — 20%-იანი, თუ 10%-იანი ფასდაკლება შეეხო მყიდველს.

ცხადია, მყიდველს 20%-იანი ფასდაკლება შეეხო: P=960:0,8=1200 (ლარი); 10%-ის შემთხვევაში, P=960:0,9, ღირებულება კვლავ 1000 ლარზე მეტი იქნებოდა, ამ დროს კი ფასდაკლება ვიცით, რომ 20%-ია.

6 y-ის x-ზე დამოკიდებულება მოსწავლემ ბლოკ-სქემიდან უნდა „ამოიცნოს“.



$$y=\begin{cases} -2x, & x<0 \\ 2x, & x\geq 0 \end{cases}$$

x-ის კონკრეტული მნიშვნელობებით y-ის შესაბამისი მნიშვნელობების პოვნა და ცხრილის შევსებაც დაეხმარება მოსწავლეს დამოკიდებულების გააზრებაში.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

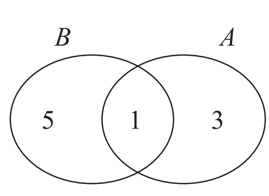
მოსწავლემ უნდა შეძლოს ობიექტურად შეაფასოს საკუთარი ცოდნა შესწავლილი საკითხების შესახებ; სამიზნე ცნებებისა (სიმრავლე, სიმრავლეებზე ოპერაციები, გამონათქვამები, ლოგიკური ოპერაციები, ოპერაციები გამონათქვამებზე, ალგორითმი) და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენების (სიმრავლეებზე მოქმედებების გამოყენებით, ლოგიკური მსჯელობითა და დასაბუთებით, შეიძლება ამოცანის ფორმულირება და პრობლემის გადაჭრა; ამოცანის ფორმულირება შეიძლება სხვადასხვა ფორმით; სხვადასხვა ფორმის გამოყენება ხელს უწყობს ამოცანის გადაწყვეტის გზების ძიებას; ლოგიკური დასკვნების გამოტანის მეთოდების ფლობა მნიშვნელოვანი ინტელექტუალური უნარია) გააზრება.

მოსწავლეები თავად აღმოაჩენენ ხარვეზებს საკუთარ ცოდნაში და შედეგებს მასწავლებელს უზიარებენ. მასწავლებელი იყენებს შეფასების შედეგებს და, დამატებითი დავალებების განხილვით, ცდილობს ცოდნაში ხარვეზების გამოსწორებას.

1 ამ ამოცანის საშუალებით, მოსწავლე ამოწმებს საკუთარ ცოდნას სასრულ სიმრავლეში და სასრულ სიმრავლეებზე მოქმედებებით მიღებულ სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობის განსაზღვრის შესახებ.

მოსწავლე არკვევს — შეძლებს ფორმულების გამოყენებას, ან სიმრავლეების ვენის დიაგრამებით გამოსახვას?

მოსწავლეს უნდა ახსოვდეს სასრულ სიმრავლეში ქვესიმრავლეების რაოდენობის ფორმულა — n-ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეების რაოდენობა არის 2^n. მაშასადამე, A სიმრავლე შეიცავს 4 ელემენტს (2^n=16, n=4); B სიმრავლე — 6 ელემენტს (2^n=64, n=6).

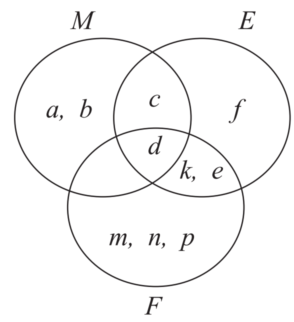


ამის შემდეგ შეიძლება ვენის დიაგრამით წარმოდგენილი ფიგურების შევსება (ვითვალისწინებთ პირობას: $n(A\cap B)$=1).

მაშასადამე, $n(A\setminus B)+n(B\setminus A)+n(A\cup B)$=3+5+9=17.

2 მოსწავლემ უნდა მიუთითოს, რომ გამოისახება ფიგურა, რომლის წერტილები სათავეზე გამავალი y=0,5x წრფის ქვემოთ და x=4 წრფის მარცხნივ არის; ეს ახსნა-განმარტება უნდა ახლდეს სურათს.

3 მოსწავლეს უნდა ახსოვდეს, რომ შევსებას ვიწყებთ სამივე სიმრავლის თანაკვეთიდან; ეს სიმრავლე — $M \cap E \cap F$ შეიცავს ერთ ელემენტს — d-ს.



შემდეგ შეიძლება $M \backslash E$ და $M \backslash F$-ის შევსება — a, b, c ელემენტებით;

$E \backslash F$ მოგვცემს $\to c$, f ელემენტებს;

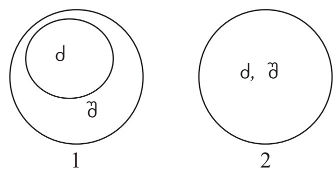
$F \backslash E$ $\to m$, n, p ელემენტებს.

დანარჩენი ნაწილი $M \cup E$-ს მიხედვით შეივსება: ჩაისმება k, e და შევსება დამთავრდება. მოსწავლემ შეიძლება სხვა სტრატეგია აირჩიოს.

4 მოსწავლეს არ უნდა გაუჭირდეს თითოეული სახის ოთხკუთხედის გამოსახვა და იმის მიგნება, რომ სიმრავლეებს საერთო ელემენტი არა აქვს; ამასთანავე, მოსწავლე ადვილად მიაგნებს ოთხკუთხედს, რომელიც არცერთ სიმრავლეს არ ეკუთვნის (მართკუთხედი), ამიტომ დარღვეულია კლასიფიკაციის წესი, არ გვაქვს კლასიფიკაცია. ცხადია, ოთხკუთხედს შეიძლება ჰქონდეს ზუსტად 1 მახვილი კუთხე, ზუსტად ორი მახვილი კუთხე, ზუსტად სამი მახვილი კუთხე და მახვილი კუთხეები არ ჰქონდეს (ოთხი მახვილი კუთხე არ შეიძლება — ჯამი უნდა იყოს 360^0); მაშასადამე, ე) კითხვის პასუხი დადებითია — გვაქვს კლასიფიკაცია.

5 აქ უნდა გამოვიყენოთ ზოგადმტკიცებითი მიმართება; მაშინ დასკვნა ჭეშმარიტი იქნება: „ზოგიერთი ჩლიქოსანი ძუძუმწოვარია“ და „ყველა ძუძუმწოვარი შინაური ცხოველია“ წანამღვრებიდან გამომდინარეობს: ზოგიერთი ჩლიქოსანი შინაური ცხოველია.

ეს მეორე წანამძღვრის დიაგრამაა.



თუ ჩლიქოსნების სიმრავლე იკვეთება ძუძუმწოვრების სიმრავლესთან, მაშინ ის იკვეთება შინაური ცხოველების სიმრავლესთანაც.

6 კვადრატისთვის გვარითი ცნებებია მართკუთხედიცა და რომბიც.

7 შეიძლება ასე ვიმსჯელოთ:

ა) თუ q მცდარია, მაშინ ნებისმიერ — p-სთვის, $\overline{p} \wedge q$ მცდარია და $(\overline{p} \wedge q) \wedge h$ მცდარია ნებისმიერი h-ისთვის.

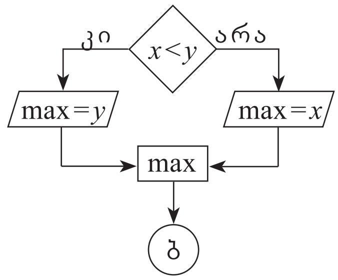
ბ) თუ q მცდარია, მაშინ $\overline{q}$ ჭეშმარიტია. მაშასადამე, $\overline{q} \vee (p \wedge h)$ ჭეშმარიტია ნებისმიერი p და h-ისთვის. აქ მოსწავლემ უნდა გამოიყენოს ლოგიკური ოპერაციების განსაზღვრებები.

8 შეიძლება წარმოვადგინოთ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილები; გამოჩნდება, რომ შესაბამისი სტრიქონი (ან სვეტი, შევსების შესაბამისად) მხოლოდ „ჭ“ ასოს შეიცავს.

შეიძლება ვიმსჯელოთ: შეიძლება თუ არა მცდარი იყოს მოცემული რთული გამონათქვამი? იმპლიკაცია მცდარია, როცა პირობა ჭეშმარიტია და დასკვნა მცდარი: მაშასადამე, $p \to r$ მცდარია $\to$ p ჭეშმარიტია, r მცდარია. მაშინ, თუ q ჭეშმარიტია, მივიღებთ $q \to r$ მცდარია, და პირობა მცდარია; თუ q მცდარია, მაშინ $p \to q$ მცდარია და პირობა კვლავ მცდარია. ამრიგად, q-ს ნებისმიერ მნიშვნელობისთვის, შეუძლებელია გვქონდეს: $(p \to q) \wedge (q \to r)$ ჭეშმარიტია, $p \to r$ მცდარია.

9 მოსწავლემ უნდა შეძლოს ეკვივალენციის ჭეშმარიტობის ცხრილის შედგენა.

(10) შეუვსებელი ნაწილი ასე უნდა გამოიყურებოდეს:



II თავის დამატებითი ამოცანები

დამატებითი ამოცანები შეიცავს მასალას, რომელიც შეესაბამება II თავის სამიზნე ცნებებს და მათთან დაკავშირებულ მკვიდრ წარმოდგენებს; ამოცანების გამოყენება შეიძლება სასწავლო წლის სხვადასხვა დროს და სხვადასხვა მიზნებისთვის, მაგალითად, ცოდნაში ხარვეზების აღმოსაფხვრელად და გავლილი მასალის გამეორებისთვის.

(1) მოცემული პირობები ისეთი სახით უნდა ჩაიწეროს, რომ შესაძლებელი იყოს სიმრავლის ელემენტების მითითება და რაოდენობის დათვლა; მაგალითად, $B=\{x\,|\,|x-3|\leq 4,\ x\in\mathbf{Z}\}$ მოდულის თვისების თანახმად, შეიცავს ყველა იმ მთელ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $-4\leq x-3\leq 4$, ანუ $-1\leq x\leq 7$. მაშასადამე, $B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ სიმრავლე 9 ელემენტს შეიცავს.

(2) მოსწავლემ უნდა გაიხსენოს სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურის (სამკუთხედი, სამკუთხედის გარე კუთხე, წრე, ცენტრული კუთხე, წრეწირი) განსაზღვრება. ყოველი გეომეტრიული ფიგურა, განსაზღვრების თანახმად, წერტილთა სიმრავლეა და შეიძლება სიმრავლეთა თეორიის ცნებების გამოყენება; მაგალითად, წრეწირისა და მისი რაიმე ცენტრული კუთხის თანაკვეთა მათი საერთო წერტილთა სიმრავლეა და წრეწირის რკალს იძლევა.

(3)-(5) ეს ამოცანები სიმრავლეებზე ოპერაციების ცოდნას მოითხოვს.

(6)-(8) ამოცანებით ვენის დიაგრამებით ამოცანების ამოხსნის უნარები მოწმდება.

(6) ამ ამოცანის ამოხსნისას შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

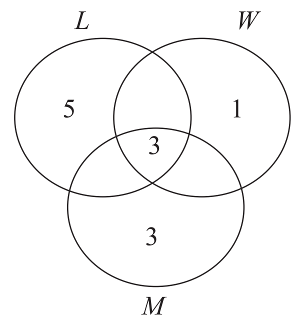
ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება არჩიოს ვენის დიაგრამის გამოყენება.

A — ინგლისური, B — გერმანული, $A\cap B$ — ორივე ენა.

პირობის თანახმად,

$$100\%=70\%+36\%-P\%,$$
$$P\%=6\%;$$
$$n(A\cup B)=12:0{,}06=200.$$

7 უმჯობესია, გამოვიყენოთ ვენის დიაგრამა: L — ლურჯი, W — წითელი, M — მწვანე.



3 არის სამივეს თანაკვეთაში ელემენტების რაოდენობა.

ვენის დიაგრამაზე დაკვირვების შემდეგ, მოსწავლე აღმოაჩენს, რომ შეუვსებელი ნაწილები იმ მოსწავლეებს შეესაბამება, რომლებსაც ზუსტად ორი ფერის ფანქარი აქვს:

$$26-(5+3+3+1)=14$$

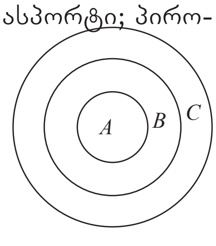
8 აქ გვაქვს მთელ რიცხვთა სიმრავლის კლასიფიკაცია 10-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთების მიხედვით.

ბ) ცხადია, $m+n$ არის A_8 კლასში;

გ) $a+b+c$ ეკუთვნის კლასს, რომლის ნომერი არის $6+1+8-10=5$.

დ) A_5-ის ორი ელემენტის ჯამიც და სხვაობაც ეკუთვნის A_0 კლასს.

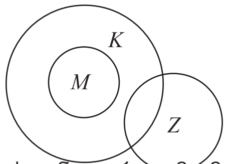
9 ა) ვთქვათ, A — სტუდენტები, B — სრულწლოვანები, C — აქვთ პასპორტი; პირობით თანახმად, $A \subset B$, $B \subset C$. გვექნება დიაგრამა:



ვგულისხმობთ, რომ წრეწირები (შეიძლება სამივე) ერთმანეთს შეიძლება დაემთხვეს. ამ ამოცანაში სილოგიზმი ჭეშმარიტია.

მსჯელობა შეიძლება დიაგრამის გარეშეც ჩატარდეს — სიმრავლის ქვესიმრავლის ცნების გამოყენებით.

ბ) ეს სილოგიზმი მცდარია; შეიძლება განვიხილოთ წანამძღვრების წარმოდგენის ასეთი შემთხვევა:



M — მასწავლებლები

K — კეთილები

Z — ცურვის მოყვარულები.

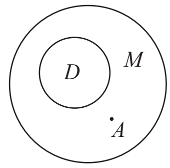
დასკვნა არ გამომდინარეობს — ამ შემთხვევაში არ არსებობს ცურვის მოყვარული მასწავლებელი.

გ) დიდი ქალაქები — D

არის მეტროპოლიტენი — M

ალბურგი — A — (დიდი ქალაქი არ არის).

შეიძლება გვქონდეს ასეთი წარმოდგენა:



ალბურგში შეიძლება იყოს მეტრო; დასკვნა მცდარია.

10 ქართულ ენაში „და" კავშირის ნაცვლად ზოგჯერ გამოიყენება კავშირები: „მაგრამ", „ხოლო". ამის გათვალისწინებით, გვაქვს გამონათქვამები:

ა) $p \wedge (q \wedge r)$; ბ) $r \wedge \overline{q}$; გ) $\overline{p} \wedge (\overline{q} \vee \overline{r})$; დ) $p \wedge (q \vee r)$; ე) $\overline{p} \wedge (q \wedge r)$.

11 ა) $(x-2=0) \vee (x-5=0)$.

ბ) (5 არის 20-ის გამყოფი)$\wedge$(5 არის 35-ის გამყოფი)

გ) (ურნიდან ამოღებული ერთი ბირთვი თეთრია)$\vee$(ურნიდან ამოღებული მეორე ბირთვი თეთრია).

დ) შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $(|x|>2)\wedge(|x|<5)$

შეიძლება უფრო დაწვრილებით: $((x>2)\vee(x<-2))\wedge((x<5)\wedge(x>-5))$

შეიძლება ასეც გადავწეროთ: $((x>2)\wedge(x<5))\vee((x>-5)\wedge(x<-2))$

12 მოსწავლეები იყენებენ ფორმულებს:

$$\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}, \qquad \overline{p\wedge q}=\overline{p}\vee\overline{q}$$

ეს ფორმულები დასაბუთდა გაკვეთილზე.

13 p: „თუ სამკუთხედი ტოლგვერდაა, მაშინ ის მახვილკუთხაა“ — შინაარსის გათვალისწინებით, p ჭეშმარიტი გამონათქვამია.

ჭეშმარიტია კონტრაპოზიციური გამონათქვამიც: თუ სამკუთხედი მახვილკუთხა არ არის, მაშინ ის არ არის ტოლგვერდა სამკუთხედი.

შებრუნებული: თუ სამკუთხედი მახვილკუთხაა, მაშინ ის ტოლგვერდაა (მცდარია).

მოპირდაპირე: თუ სამკუთხედი ტოლგვერდა არ არის, მაშინ ის არ არის მახვილკუთხა (მცდარია).

14 დ) თუ p ჭეშმარიტია, მაშინ $(p\vee r)$ ჭეშმარიტია; თუ q მცდარია, მაშინ $q\to\overline{p}$ ჭეშმარიტია, მაშასადამე, $(p\vee r)\to(q\to\overline{p})$ ჭეშმარიტია.

ანალოგიურად განიხილება სხვა დავალებებიც.

15 ა) თუ წვიმს, მაშინ სესილი ტელევიზორს უყურებს; თუ სესილი ტელევიზორს არ უყურებს, მაშინ არ წვიმს.

ბ) თუ ადამიანი ჯარისკაცია, მაშინ ის მამაცია; თუ ადამიანი მამაცი არ არის, ის ჯარისკაცი არ არის.

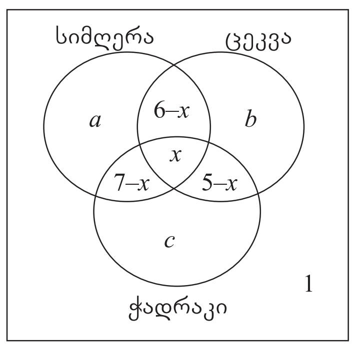
გ) თუ ზამთარია, მაშინ ცივა;

თუ არ ცივა, მაშინ ზამთარი არ არის.

16 ბლოკ-სქემა წარმოგვიდგენს ასეთ ფორმულას:

$$y=\begin{cases} x, \text{ თუ } x>0, \\ -x, \text{ თუ } x<0, \\ 0, \text{ თუ } x=0. \end{cases}$$

ვისარგებლოთ მოდულის განსაზღვრებით. მივიღებთ: $y=|x|$.



17 საძიებელი სიდიდე აღვნიშნოთ x-ით და პირობის მიხედვით შევავსოთ ვენის დიაგრამა:

$1+a+b+c+6-x+7-x+5-x+x=33$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a+b+c=22$, მივიღებთ: $1+22+18-2x=33$, საიდანაც $x=4$.

18 მოსწავლეებთან ერთად გავიხსენოთ ფორმულა

$$(C\cap A)\cup(C\cap B)=C\cap(A\cup B).$$

მივიღებთ $(C\cap A)\cup(C\cap B)=[3;\ 10)\cap(-5;\ 5)=[3;\ 5)$.

19 ამოცანის პირობებიდან კონტრაპოზიციის კანონის გათვალისწინებით მივიღებთ:

1. თუ ნიკა დამნაშავეა, მაშინ კოტე დამნაშავეა და თედო არ არის დამნაშავე;
2. თუ ნიკა არ არის დამნაშავე, მაშინ კოტე დამნაშავეა.

კოტე ყველა შემთხვევაში დამნაშავეა.

20 ჩოგბურთისა და კალათბურთის. მართლაც, ყველა სხვა შემთხვევაში მოსწავლე იქნება სამ გუნდში მაინც.

21 3 სიტყვა: დროშა, გუნდა, კონა, გალობა.

შემაჯამებელი წერა №2

თემატური ბლოკი: ლოგიკის საწყისები

სამიზნე ცნებები: სიმრავლე, გამონათქვამი, ოპერაციები სიმრავლეებზე, ოპერაციები გამონათქვამებზე, ალგორითმი.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს, გამოიყენოს: სიმრავლეთა თეორიის ცნებები, გამონათქვამთა ლოგიკის ელემენტები; ამოცანების ფორმულირების სხვადასხვა ხერხი, მსჯელობითა და დასაბუთებით შეძლოს პრობლემის გადაჭრა (მათ. საშ. 8; მათ. საშ. 9).

ამოცანების ნიმუშები

შეარჩიეთ სწორი პასუხი:

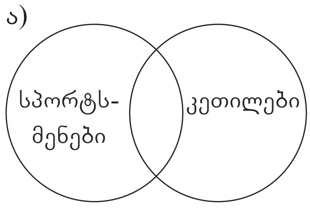
1 ცნობილია, რომ

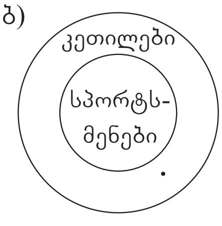
- ზოგიერთი დეტექტივი ვიოლინოზე უკრავს:
- ჰოლმსი დეტექტივია.

ამ წინადადებებიდან გამომდინარეობს, რომ

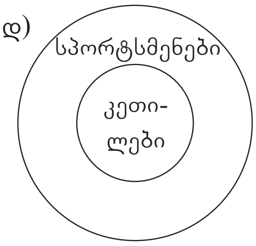
ა) ჰოლმსი აუცილებლად უკრავს ვიოლინოზე;
ბ) ჰოლმსი შეიძლება არ იყოს დეტექტივი;
გ) ჰოლმსი შეიძლება არ უკრავდეს ვიოლინოზე;
დ) ჰოლმსი არ უკრავს ვიოლინოზე.

2 იქიდან რომ ყველა სპორტსმენი კეთილია და შოთა არ არის სპორტსმენი, თალიკომ დაასკვნა: შოთა არ არის კეთილი ადამიანი. რომელი დიაგრამა გამოდგება თალიკოს დასკვნის მცდარობის დასასაბუთებლად?

ა)


ბ)


გ)


დ)


3 მოცემულია ზოგადმტკიცებითი მსჯელობა: „ყველა ძაღლი ყეფს“. ჩაწერეთ მისი საწინააღმდეგო მსჯელობა და მიუთითეთ მსჯელობის ტიპი.

ა) არცერთი ძაღლი არ ყეფს — ზოგადუარმყოფელი;
ბ) ზოგიერთი ძაღლი ყეფს — კერძომტკიცებითი;
გ) ზოგიერთი ძაღლი არ ყეფს — კერძოუარმყოფელი;
დ) არცერთი ძაღლი არ ყეფს — კერძოუარმყოფელი.

4 ცნობილია, რომ p და q ჭეშმარიტი გამონათქვამებია, r — მცდარი. ჩამოთვლილი რთული გამონათქვამებიდან ჭეშმარიტია

ა) $\overline{(p\wedge q)\vee r}$; ბ) $(p\wedge r)\vee q$; გ) $(\bar{p}\wedge q)\vee r$; დ) $(\bar{p}\vee q)\wedge r$.

ამოხსენით ამოცანები:

5 მოცემულია გამონათქვამები:

p: თალიკოს უყვარს კითხვა;

q: თალიკოს არ უყვარს ტელევიზორის ყურება.

სიტყვიერად ჩამოაყალიბეთ შემდეგი გამონათქვამები:

ა) $p\wedge\overline{q}$; ბ) $\overline{p\vee q}$; გ) $\overline{p}\wedge\overline{q}$; დ) $\overline{\overline{p}\wedge q}$.

6 დაადგინეთ, ჭეშმარიტია თუ მცდარი რთული გამონათქვამი, თუ p ჭეშმარიტია, q მცდარი, r ჭეშმარიტი.

ა) $(\overline{p}\vee q)\wedge(p\vee q)\to(q\to r)$ ბ) $(p\to q)\vee(\overline{p}\vee\overline{r})\to(p\to\overline{r})$

7 სემესტრის ბოლოს სტუდენტს უწევს 5 ფინალური გამოცდის ჩაბარება. თუ ამ გამოცდებში სტუდენტის მიერ დაგროვილი საშუალო ქულა 70-ს არ აღემატება, მას სტიპენდია არ დაენიშნება; თუ საშუალო ქულა 70-ზე მეტია, მაგრამ 90-ს არ აღემატება, დაენიშნება სტიპენდია სემესტრში 150 ლარის ოდენობით; ხოლო თუ საშუალო ქულა მეტია 90-ზე — სტიპენდია სემესტრში 250 ლარია. ა) შეადგინეთ ალგორითმი სტუდენტისთვის სტიპენდიის ოდენობის დასადგენად, გამოსახეთ ბლოკ-სქემის საშუალებით; ბ) იპოვეთ თეკლას სტიპენდიის ოდენობა, თუ მან 5 გამოცდაში მიიღო შეფასებები: 62, 79, 82, 65 და 96.

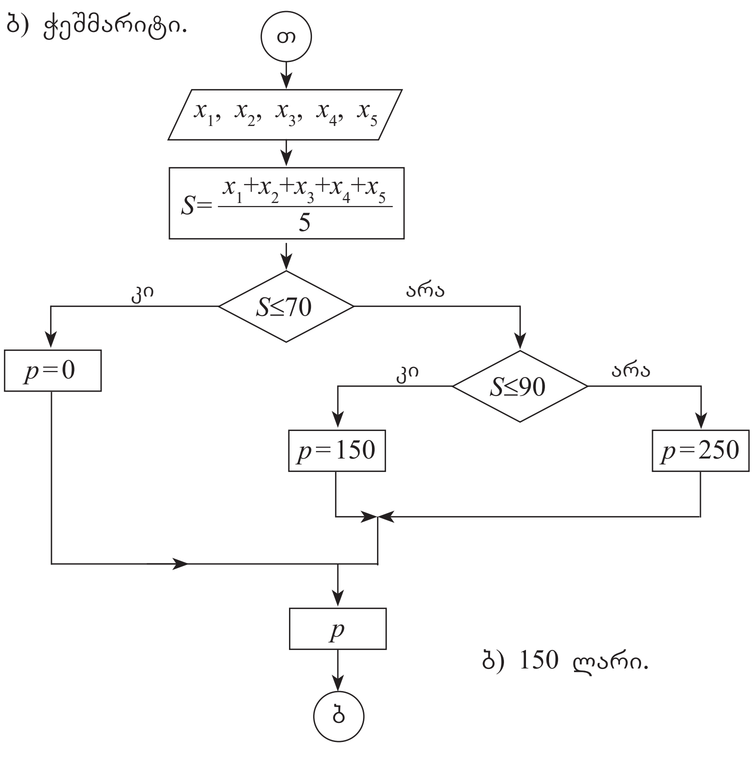
პასუხები:

1	2	3	4
გ	ბ	გ	ბ

5 ა) — თალიკოს უყვარს კითხვა და ტელევიზორის ყურება;
ბ) გ) — თალიკოს არ უყვარს კითხვა და უყვარს ტელევიზორის ყურება;
დ) თალიკოს უყვარს კითხვა ან ტელევიზორის ყურება.

6 ა) ჭეშმარიტი, ბ) ჭეშმარიტი.

7 ა)



ბ) 150 ლარი.

მითითებები:

(4) ა) $p\wedge q$ ჭეშმარიტია, ამიტომ $(p\wedge q)\vee r$ ჭეშმარიტია და მისი საწინააღმდეგო გამონათქვამი — მცდარი. შეიძლება ასე შემოწმდეს ყველა სავარაუდო პასუხი. მაგრამ რადგან მოსწავლემ იცის, რომ სავარაუდო პასუხებიდან მხოლოდ ერთია სწორი, შეიძლება q-ს ჭეშმარიტობიდან დანარჩენი პასუხების შემოწმების გარეშე დაასკვნას ბ)-ს ჭეშმარიტობა.

(7) საშუალო ქულა [70, 90] შუალედშია, ამიტომ მას დაენიშნება 150-ლარიანი სტიპენდია.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა:

(1)-(4) ამოცანებიდან თითოეულის სწორი პასუხი შეფასდეს 1 ქულით.

(5) დავალებაში ყოველი სწორად ჩამოყალიბებული გამონათქვამი შევაფასოთ 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

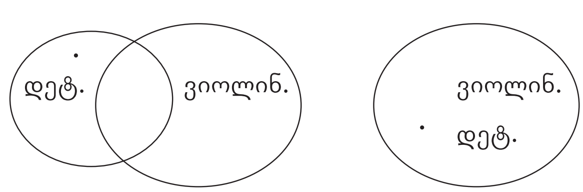
(6) დავალებაში ა) და ბ) გამონათქვამებში შემავალი გამონათქვამების ჭეშმარიტების დადგენა და აქედან გამომდინარე დასკვნის გამოტანა თითოეულ შემთხვევაში შეფასდეს 1 ქულით. უმნიშვნელო ხარვეზების შემთხვევაში — 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

(7) ბლოკ-სქემის შედგენა შეფასდეს 1,5 ქულით; ხარვეზების შემთხვევაში შეფასდეს 1 ან 0,5 ქულით. თეკლას სტიპენდიის ოდენობის დადგენა — 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

წარმოდგენილი ამოცანების განმსაზღვრელი შეფასებები მასწავლებელმა შეიძლება აქციოს განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტად.

ამ აქტივობის დიდი მნიშვნელობისა და მისი ჩატარების ზოგადი პრინციპების შესახებ უკვე არაერთხელ ვისაუბრეთ ანალოგიურ შემთხვევებში. ისიც აღინიშნა, რომ განმავითარებელი შეფასება, ფაქტობრივად, სასწავლო პროცესის ყოველ ეტაპზე უნდა მიმდინარობდეს.

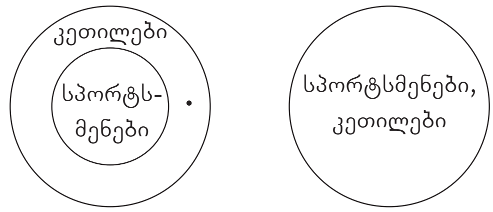
ამ კონკრეტული წერის შემთხვევაში, ვითვალისწინებთ რა ლოგიკის საწყისების დიდ მნიშვნელობას, მის სიახლეს სასწავლო პროგრამაში, განმავითარებელ შეფასებას გამორჩეული ყურადღებით უნდა მივუდგეთ.



(1) ამოცანის განხილვისას, წინასწარ მიმართეთ მოსწავლეებს გაიხსენონ კერძომტკიცებით და ზოგადმტკიცებით წინადადებათა ნიმუშები, კერძოუარმყოფელ და ზოგადუარმყოფელ წინადადებათა ნიმუშები. მოცემულ წანამძღვრებათა მიხედვით მოსწავლეებს მოუწევთ შეადგინონ ვენის დიაგრამები.

პირველ შემთხვევაში მოსწავლეები აღმოაჩენენ დეტექტივების სიმრავლეში ელემენტს (ჰოლმსს), რომელიც ვიოლინოზე არ უკრავს — ამრიგად, მცდარია დასკვნა, რომ „ჰოლმსი აუცილებლად უკრავს ვიოლინოზე“, მეორე შემთხვევაში დაასკვნიან, რომ მცდარია ბ) და დ).

(2) ამოცანაში ზოგადმტკიცებითი წინადადება წარმოადგინეთ ვენის დიაგრამით.



მიმართეთ მოსწავლეებს განიხილონ ეს დიაგრამები და შეარჩიონ შემთხვევა დასკვნის მცდარობის საჩვენებლად. პირველი დიაგრამა სწორედ დასკვნის მცდარობაზე მიუთითებს.

(3) ამოცანაში მოსალოდნელია ზოგადმტკიცებითი მსჯელობის საწინააღმდეგოდ დაასახელონ: „არცერთი ძაღლი არ იყეფება“. ამის თავიდან ასაცილებლად მოიყვანეთ სხვა ნიმუშებიც. მაგალითად, „გაკვეთილს კლასში ყველა მოსწავლე ესწრება“. მის საწინააღმდეგო მსჯელობად მოსწავლეები, ალბათ, არ მიიღებენ: „გაკვეთილს არცერთი მოსწავლე არ ესწრება“, საწინააღმდეგო მსჯელობაა: „გაკვეთილს ზოგიერთი (ერთი მაინც) მოსწავლე არ ესწრება”. დაასახელეთ კიდევ ერთი მაგალითი: „მე მოვამზადე ყველა გაკვეთილი“ და განიხილეთ მისი უარყოფა: „მე ზოგიერთი გაკვეთილი არ მომიმზადებია“. მოერიდეთ ფორმას: „მე ყველა გაკვეთილი არ მომიმზადებია“, რადგან ამ წინადადებამ შეიძლება არამკაფიო წარმოდგენა შეუქმნას მოსწავლეს რეალურ ვითარებაზე.

(4) ამოცანის გადასაჭრელად დაგჭირდებათ კიდევ ერთხელ გაიხსენოთ (მოსწავლეებთან ერთად) ლოგიკურ ოპერაციათა განსაზღვრებები და მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები. მიუხედავად იმისა, რომ სწორი პასუხი — ბ) იოლად ამოსაცნობია, კლასში განიხილეთ სხვა პასუხების მცდარობა. ა) დაიხმარეთ ლოგიკური ტოლობები: $\overline{s\vee t}=\overline{s}\wedge\overline{t}$ და $\overline{s\wedge t}=\overline{s}\vee\overline{t}$. ეს დაგეხმარებათ შემდეგი გარდაქმნების ჩატარებაში: $\overline{(p\wedge q)\vee r}=\overline{(p\wedge q)}\wedge\overline{r}=(\overline{p}\vee\overline{q})\wedge\overline{r}$. აქ მცდარი $\overline{p}$ და $\overline{q}$ გამონათქვამების დიზიუნქცია მცდარია და მისი კონიუნქცია ნებისმიერ გამონათქვამთან მცდარია.

გ) მცდარი $\overline{p}$ გამონათქვამის შემთხვევაში $\overline{p}\wedge q$ კონიუნქცია მცდარია, მისი დიზიუნქცია მცდარ r გამონათქვამთან ასევე მცდარია.

დ) მცდარი r გამონათქვამის შემთხვევაში $(\overline{p}\vee q)\wedge r$ კონიუნქცია მცდარია.

(5) მიმართეთ მოსწავლეებს, კიდევ ერთხელ დაუბრუნდნენ კონიუნქციის ($\wedge$), დიზიუნქციის ($\vee$) და უარყოფის ოპერაციების ცნებებს; „და“, „ან“ კავშირებისა და „არას“ გამოყენების მაგალითებს. ამის შემდეგ $p\wedge\overline{q}$ გამონათქვამს — p და $\overline{q}$ გამონათქვამთა კონიუნქციას მოსწავლეები, ალბათ, იოლად ჩამოაყალიბებენ: „თალიკოს უყვარს კითხვა და უყვარს ტელევიზორის ყურება“.

$\overline{p\vee q}$ გამონათქვამია: „მცდარია, რომ თალიკოს უყვარს კითხვა და არ უყვარს ტელევიზორის ყურება“. თუ გამოვიყენებთ უარყოფის ცნობილ თვისებას, მივიღებთ: $\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge q$. ამრიგად, მოცემული გამონათქვამი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: „თალიკოს არ უყვარს კითხვა და უყვარს ტელევიზორის ყურება“. ეს გ) დავალების პასუხსაც წარმოადგენს.

დ) დავალებაც სჯობს მოცემული რთული გამონათქვამის გამარტივებით შეასრულონ მოსწავლეებმა: $\overline{\overline{p}\wedge q}=\overline{\overline{p}}\vee\overline{q}=p\vee\overline{q}$. მას იოლად „წაიკითხავენ“ მოსწავლეები: „თალიკოს უყვარს კითხვა, ან ტელევიზორის ყურება“.

(6) კვლავ მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით უნდა წარვმართოთ მოცემულ იმპლიკაციათა ჭეშმარიტობის საკითხის შესწავლა:

ა) $\overline{p}\vee q$ — ორი მცდარი გამონათქვამის დიზიუნქციაა — ის მცდარია. ამიტომ, მცდარია იმპლიკაციის პირობაში მოცემული კონიუნქციაც, ხოლო თავად იმპლიკაცია ჭეშმარიტია.

ბ) $p \to q$ იმპლიკაცია მცდარია, $\overline{p}\vee\overline{r}$ დიზიუნქციაც მცდარია, ამიტომ $(p\to q)\vee(\overline{p}\vee\overline{r})$ გამონათქვამი მცდარია. შესაბამისად, საწყისი რთული გამონათქვამი ჭეშმარიტია.

(7) მიმართეთ მოსწავლეებს, გაიხსენონ რიცხვით მონაცემთა ერთობლიობის საშუალოს ცნება და გამოთვალონ მოცემულ შემთხვევაში ხუთი მონაცემის საშუალო. ეს რიცხვი აღმოჩნდება 70-ზე მეტი და 90-ზე ნაკლები. მოსწავლეებს მოუწევთ მიაკვლიონ სქემაში იმ ბლოკს, რომელიც ამ შემთხვევას აღწერს. მის მიხედვით ისინი დაადგენენ სტიპენდიის ოდენობასაც. თუ თქვენ საჭიროდ მიიჩნევთ, სთხოვეთ მოსწავლეებს თავიდანვე აღწერონ ეს ბლოკ-სქემა და მისი მოქმედების პრინციპი.

როგორც ყოველი განმავითარებელი შეფასება, ეს შეფასებაც მოსწავლეთა ცოდნის დონისა და უნარების შესახებ მკაფიო დასკვნის შესაძლებლობას მოგცემთ. ამ შეფასების დროს გაკეთებული თქვენი ჩანაწერების მიხედვით შეიტანთ კორექტივებს თქვენს მიმდინარე და სამომავლო აქტივობებში.

ახლა დავაკონკრეტოთ სოლო ტაქსონომიის ზოგადი პრინციპები (დონეებით წარმოდგენილი) მეორე შემაჯამებელი წერის მიხედვით (იხ. გვ. 14).

პრესტრუქტურული დონე. მოსწავლემ ვერ გაართვა თავი ლოგიკის ცნებების გააზრებას, ლოგიკური ოპერაციების არსი მისთვის გაუგებარია, ვერ ერკვევა ტექსტური ამოცანების შინაარსში. არ შეინიშნება რაციონალური სვლები დავალებათა გადაჭრის.

უნისტრუქტურული დონე. ნაშრომში მარტივი სილოგიზმი სწორადაა გააზრებული, თუმცა ლოგიკური ამოცანების გადაჭრისას ვენის დიაგრამების ჩართვა უჭირს. ლოგიკის შესწავლილი ცნებების მხოლოდ ნაწილია გაცნობიერებული და, შესაბამისად, მხოლოდ მცდელობის დონეზეა სათანადო ამოცანების განხილვა. წარმოდგენილი ალგორითმი გაუმართავია, არ არის შედგენილი ბლოკ-სქემა.

მულტისტრუქტურული დონე. ნაშრომში იკვეთება ავტორის ფრაგმენტული ცოდნა განსახილველი საკითხების. დადგენილია მარტივი სილოგიზმის ჭეშმარიტება. ამოცანათა ამოხსნისას არის ცდა ვენის დიაგრამების სწორი გააზრების. იკვეთება გამონათქვამებზე ლოგიკური ოპერაციებით აღწერის არასრული ცოდნა. ალგორითმისა და ბლოკ-სქემის აგება გასახვეწია.

მიმართებითი დონე. მოსწავლე ერკვევა სილოგიზმის არსში, ტექსტური ლოგიკური ამოცანის ამოხსნას სწორად უკავშირებს ვენის დიაგრამებს. გააზრებული აქვს სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი ლოგიკის ცნებები, ოპერაციები გამონათქვამებზე, თუმცა რთული გამონათქვამების აღწერისას არის ხარვეზები; შეუძლია ჭეშმარიტების ცხრილების შედგენა და სათანადო დასკვნების გაკეთება. მის მიერ შედგენილი ალგორითმი გამართულია, თუმცა სათანადო ბლოკ-სქემა დასახვეწია.

გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. ნაშრომი ზუსტად და დახვეწილად წარმოადგენს დასმული ამოცანების გადაჭრის გზებს, გადალახული ეტაპების მითითებით. ყველა ცნება კარგადაა გააზრებული, გამონათქვამის ჭეშმარიტება რამდენიმე გზითაა დასაბუთებული, რითაც ამტკიცებს მათემატიკური აპარატის მაღალ დონეზე ფლობის ტექნიკას. მკაფიოდ და გამართულადაა წარმოდგენილი ალგორითმი და სათანადო ბლოკ-სქემა.

III თავი

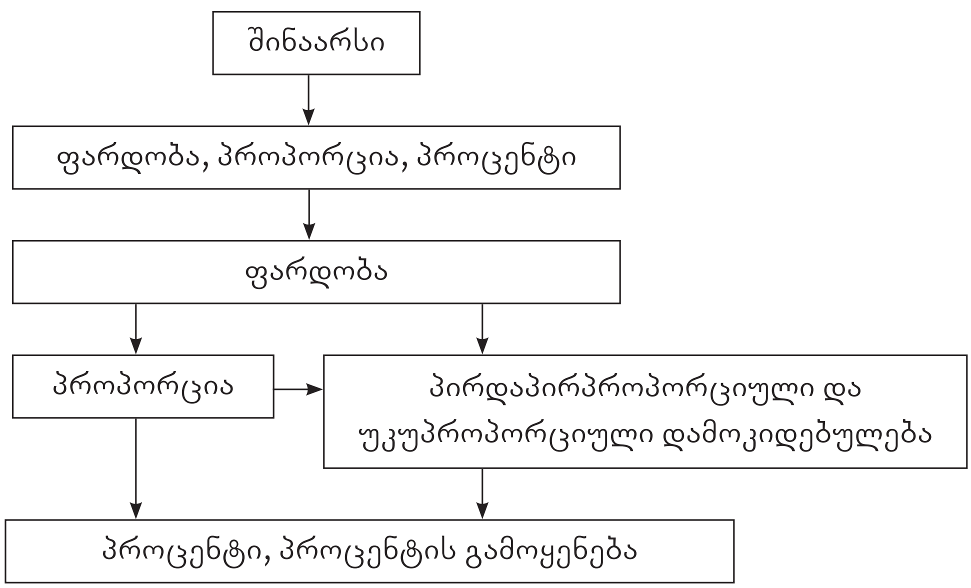
ფარდობა, პროპორცია, პროცენტი

თემა: რიცხვები და მოქმედებები; დამოკიდებულება სიდიდეებს შორის. **საათების სავარაუდო რაოდენობა:** 20 სთ			
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ფარდობა, პროპორცია, პროპორციული და უკუპროპორციული სიდიდეები: პროცენტი			
სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**კომპლექსური დავალება**
რიცხვები და მათზე მოქმედებები; სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებები. რიცხვები შეიძლება ჩაიწეროს სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმით; სიდიდის ცვლილების გამოსასახად ვიყენებთ პროცენტს; სიდიდეებს შორის შეიძლება იყოს პირდაპირ-პროპორციული და უკუპროპორციული დამოკიდებულება	ფარდობა, პროპორცია, პროპორციული და უკუპროპორციული დამოკიდებულება; მარტივი და რთული პროცენტი	რას გვიჩვენებს ერთეულოვანი ფარდობა? რა გამოყენებები აქვს პროცენტს?	პროცენტული ცვლილება. საბანკო სესხის გადასახადი
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებებისა და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით (მათ. საბ. 1). სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებების გამოყენება სხვადასხვა კონტექსტში ცვლილებათა გასაანალიზებლად და რეალური მოვლენების მოდელირებისთვის (მათ. საბ. 3).			

III თავში წარმოდგენილი მასალა მათემატიკის საშუალო საფეხურის იმ სამიზნე ცნებებსა და შესაბამის მკვიდრ წარმოდგენებზეა დაფუძნებული, რომლებიც საბაზო საფეხურის სტანდარტშიც იყო წარმოდგენილი.

საშუალო საფეხური მნიშვნელოვანი ეტაპია მოზარდის მიერ ცოდნისა და უნარების დაუფლებისა და გაღრმავების მიმართულებით. შინაარსობრივი თვალსაზრისით, მას გადამწყვეტი როლი ენიჭება მოსწავლის ცოდნის სისტემატიზებაში, პროფორიენტაციასა და „მთელი ცხოვრების მანძილზე სწავლის“ კონცეფციის რეალიზებაში. საშუალო საფეხურის მე-10 კლასის შინაარსობრივი კონცეფცია დაკავშირებულია საშუალო საფეხურის მისიასა და მიზნებთან: ინფორმირებული არჩევანის გაკეთებისთვის მზადება, მზადება უმაღლესი განათლებისთვის და შრომით ბაზარზე გასასვლელად. III თავი იმ მნიშვნელოვანი სამიზნე ცნებების შესახებ ცოდნის გაღრმავებას გულისხმობს, რომელიც ყველა აღნიშნული მიმართულებით აუცილებელია. მიმდინარეობს ცოდნის გაღრმავება სიდიდეებისა და რიცხვების შესახებ, წარმოდგენილია ფარდობა, პროპორცია, პროცენტი, პროცენტის მნიშვნელოვანი გამოყენების მაგალითები. ყველა აღნიშნულ სამიზნე ცნებასთან დაკავშირებული საკითხი აღიწერება დეტალურად მოსწავლეზე მორგებული ფორმითა და სათანადო დონით; სავარჯიშოები, მაგალითები, ამოცანები, კომპლექსური დავალებები ხელს უწყობს სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული კანონზომიერების ახსნას; მოსწავლემ შეძლოს მისვლა განზოგადებამდე, რომლებიც მკვიდრი წარმოდგენების სახით არის ჩამოყალიბებული.

III თავში წარმოდგენილი საკითხები, მკვიდრ წარმოდგენებთან და საკვანძო შეკითხვებთან მათი კავშირების გათვალისწინებით შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:



3.1. ფარდობა, ერთეულოვანი ფარდობა, სიჩქარე

<table>
<tr><td colspan="4">თემატური ბლოკი: რიცხვები და მოქმედებები
სავარაუდო დრო: 2 სთ</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნებები და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვები</th><th>დავალებები</th></tr>
<tr><td>სიდიდეები, რიცხვითი გამოთვლები. ერთეულოვანი ფარდობა გვეხმარება სიდიდეებსა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდობების აღწერაში. სიდიდეები შეიძლება ჩავწეროთ მათი რიცხვითი მახასიათებლებით; სიდიდეები შეიძლება შევადაროთ მათი რიცხვითი მახასიათებლების საშუალებით.</td><td>ფარდობა, ერთეულოვანი ფარდობა.</td><td>რას გვიჩვენებს ერთეულოვანი ფარდობა?
რა გამოყენება აქვს ერთეულოვან ფარდობას?</td><td>კლასში: 1-21
საშინაო: 1 - 18</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რაოდენობის ჩაწერა; სიდიდეებსა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდობის გამოთვლა; რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებებისა და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით (მათ. საშ. 1).</td></tr>
</table>

აქტივობები: პარაგრაფში წარმოდგენილი მასალა, ძირითადად, ნაცნობი უნდა იყოს მოსწავლეებისთვის; ამიტომ ახალი ცოდნის კონსტრუირება, ძირითადად, საკუთარ გამოცდილებაზე დაყრდნობით შეიძლება; მთავარი ხაზი მოსწავლის გამოცდილების მიზანმიმართული გამდიდრება და ახალი ასპექტის დაშენებაა. სასწავლო პროცესი, ცხადია, მასწავლებლის ხელმძღვანელობით მიმდინარეობს, რომელიც, საჭიროების შემთხვევაში, ჩაერთვება და გაახსენებს მოსწავლეებს სიდიდეების გაზომვასთან დაკავშირებულ მნიშვნელოვან მომენტებს. სიდიდეების დახასიათებისას, ხაზი უნდა გავუსვათ მათ მნიშვნელოვან თვისებებს, შეკრებისა და შედარების შესაძლებლობას. ამასთანავე, შედარების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მომენტი ფარდობის განხილვაა — სხვადასხვა სიდიდეების ფარდობა გვიჩვენებს I სიდიდის (გასაყოფის) იმ „წილს“, რომელიც მოდის მეორე სიდიდის (გამყოფის) ერთეულზე (ერთეულოვანი ფარდობა); ერთი და იმავე სიდიდეების ფარდობის გამოყენება გვიჩვენებს მეტ-ნაკლებობის ხარისხს (სიდიდეებს შორის). ერთეულოვანი ფარდობის გამოყენების მაგალითებით (საბუნებისმეტყველო საგნებში, ყოველდღიურ ცხოვრებაში) ხაზს ვუსვამთ ამ ფარდობის გამოყენების მნიშვნელობას ახალი სიდიდეების ჩამოყალიბების საქმეში — დროის ერთეულში გავლილი მანძილი გვაძლევს ახალ ფიზიკურ სიდიდეს — სიჩქარეს; რაიმე რეგიონის ტერიტორიაზე მცხოვრებთა რაოდენობის შეფარდება იმავე ტერიტორიის ფართობთან — ამ ტერიტორიაზე მცხოვრებთა სიმჭიდროვეს და ა. შ.

მოსწავლეებმა უნდა მოამზადონ პროექტი: საქართველოს სახელმწიფო დროშა; საქართველოს სახელმწიფო დროშის შექმნის ისტორია; აქ მნიშვნელოვანია საუბარი დროშის ფორმებსა და ზომებზე — ეს მნიშვნელოვანი ასპექტები, სხვა თვისებებთან ერთად, ბრძანებულებით არის დამტკიცებული. შედარებისთვის, შეიძლება სხვა სახელმწიფოების დროშების განხილვა. მაგალითად, დროშის გვერდებს შორის, ან დროშის ზოლების გვერდებს შორის ფარდობის განხილვა საფრანგეთის დროშის შემთხვევაში. მოსწავლეებმა შეიძლება ყურადღება გაამახვილონ ე. წ. ოქროს მართკუთხედებზე, რომლებშიც გვერდების ფარდობა ოქროს კვეთის რიცხვის ტოლია; რომელი ქვეყნის დროშაა უფრო ახლოს ასეთი ტიპის მართკუთხედთან.

ამოცანების გამოყენებით, მიმდინარეობს სამიზნე ცნებებისა (ფარდობა, ერთეულოვანი ფარდობა, სიდიდეების შედარება მახასიათებლების მიხედვით) და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენების გააზრება. ამასთანავე, ყურადღება გამახვილდება ფარდობის სხვადასხვა მოხერხებული ფორმით წარმოდგენის შესაძლებლობაზე; ერთეულოვანი ფარდობის გამოყენებაზე სიდიდეების წარმოდგენისას.

(1) და (2) ამოცანებით, მოსწავლეები გაიაზრებენ, რომ ფარდობა შეიძლება სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმით ჩაიწეროს და აუცილებელია სიდიდეების ერთსა და იმავე ერთეულებში გამოსახვა; მაგალითად, არ შეიძლება ვთქვათ, რომ 400 მ-ის ფარდობა 2 კმ-თან 200-ია, რომ 2 კმ არის 400 მეტრის $\frac{1}{200}$ ნაწილი; 400 მ = 0,4 კმ და, მაშასადამე, 400 მ 2 კმ-ის მეხუთედია. ეს ფარდობა რიცხვებით შეიძლება ასე ჩავწეროთ: 1:5 (400 მეტრის 5-ჯერ გადადებით შეიძლება 2 კმ-ის მიღება).

(3) ნინოს — 3 ნაწილი,
მარიამს — 4 ნაწილი,
ორივეს — 7 ნაწილი
მარიამს შეხვდა პიცის $\frac{4}{7}$.

(4) ამოცანის განხილვისას კიდევ ერთხელ გაამახვილეთ ყურადღება ნერგების დარგვაზე (და არა მოჭრაზე), ნარგავების რაოდენობის მნიშვნელობაზე; მოსწავლემ უნდა შეძლოს ფარდობების ეკვივალენტური ფორმით წარმოდგენა:
ილიკო:ნიკა — 4:6; ნიკა:ლევანი — 6:9;
ილიკო:მთელი თანხა — 4:19
ნიკა:მთელი თანხა — 6:19
ლევანი:მთელი თანხა — 9:19

(5)-(7) ამოცანებით მოსწავლეები განიმტკიცებენ ცოდნას რიცხვის მოცემული ფარდობით დაყოფის შესახებ. მაგალითად, აცრილების რიცხვი არის: $\frac{150000}{20}\cdot 7=52\,500$ (ამოცანა (7)).

(8) დ) 5 სმ:3 კმ=5 სმ:300 000 სმ=1:60000.

(9) 1 სმ-ის შესაბამისი მანძილი, ჩავწეროთ 1:n სახით:
2 სმ:15 კმ=2:1500000=1:750000.

(11) ვიპოვოთ ერთეულზე რა თანხა „მოდის“ — 282000:3=94000.
მეორეს შეხვდა — 94000·5=470000 (ლარი).

12 წინა ამოცანის ანალოგიურია, 1 ნაწილზე მოდის $600:3=200$ (მ), $200\cdot5=1000$ (მ).

13 ახალი მასალის ახსნაზე მოდის 7 ნაწილი (9-დან). ამასთანავე, 9 ნაწ. — 45 წთ; 1 ნაწ. — 5 წთ. 7 ნაწილი — 35 წთ.

14 გვაქვს მიახლოებითი ტოლობა:

$$23:17\cdot8\approx11.$$

მოსწავლემ შეიძლება გამოიყენოს კალკულატორი და დაამრგვალოს: $10{,}82\approx11$.

15 „ერთეულოვანი ფარდობა“ მოგვცემს:
$4{,}5:3=1{,}5$ (ლ) — ბროწეულის წვენი,
ყურძნის წვენი: $1{,}5\cdot40=60$ (ლ).

16 პირველ ავტობუსში: ბიჭების რაოდენობა: $30:5\cdot2=12$;
პირველ ავტობუსში მოსწავლეების რაოდენობა: $12+30=42$;
მეორე ავტობუსში გოგონების რაოდენობა: $42-15=27$;
მეორე ავტობუსში ბიჭებისა და გოგონების რაოდენობათა ფარდობა: 5:9.

17 2 სთ 15 წთ $=2\frac{1}{4}$ სთ $=2{,}25$ სთ.
მანძილი — $70\cdot2{,}25=157{,}5$ (კმ).

18 $420:8{,}75=48$ (კმ/სთ)
420:63 შეფარდების წილადის სახით ჩაწერისას მივიღებთ:
$\frac{420}{63}=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$ (სთ)$=6$ სთ 40 წთ.

კალკულატორის გამოყენების შემთხვევაში, მოსწავლე მიიღებს უსასრულო ათწილადს $420:63=6{,}666...$

მოსწავლემ უნდა დაასკვნას, რომ გვაქვს პერიოდული ათწილადი და ჩაწეროს ის წილადის სახით $6\frac{6}{9}=6\frac{2}{3}$ (სთ), $6\frac{2}{3}$ სთ $=6$ სთ 40 წთ.

19 $4:16+2:8=(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})$ სთ$=\frac{1}{2}$ სთ,
მოძრაობის საშუალო სიჩქარე$=6:\frac{1}{2}=12$ (კმ/სთ).

საშუალო სიჩქარე დაემთხვა საშუალო სიჩქარეების საშუალოს. ყოველთვის ხდება ასე? რატომ გვაქვს ამ შემთხვევაში ასეთი შედეგი? მათემატიკით დაინტერესებულ მოსწავლეებთან შეიძლება ამ საკითხის შესახებ მსჯელობა.

20 ა) 25 (მ/წმ)$=\frac{25\cdot3600}{1000}=25\cdot3{,}6=90$ (კმ/სთ).

21 ა) 24 (კმ/სთ)$=24\cdot(1000:36000)=24\cdot\frac{5}{18}=\frac{20}{3}$ (მ/წმ).

20 და **21** ამოცანების ამოხსნისას მოსწავლემ უნდა გაიაზროს სიჩქარის არსი a კმ/სთ — 1 სთ-ში გავლილი მანძილია a კმ;

1 სთ = 3 600 წმ;

3600 წმ-ში — a კმ, 3600 წმ — $1000a$ მ;

ერთეულოვანი ფარდობა — 1 წმ-ში $\frac{1000a}{3600}$ მ$=\frac{5}{18}a$ მ.

ანალოგიურია საშინაო დავალების 17, 18 ამოცანები; თუმცა, 17 ამოცანაში ოდნავ განსხვავებული სიტუაცია გვაქვს.

ა) 36 კმ/სთ ნიშნავს 1 საათში გავლილ 36 კმ-ს; მივიღებთ: 1 წთ-ში — (36 000:60) მეტრი. მაშასადამე, 36 კმ/სთ = 600 მ/წთ.

საშინაო დავალების სხვა ამოცანებიც ერთეულოვან ფარდობასა და მოცემული ფარდობით რიცხვის დაშლას შეეხება. მოსწავლეები განიმტკიცებენ ცოდნას საშუალო სიჩქარის პოვნისას და სიდიდეებს შორის თანაფარდობების განსაზღვრისას.

3.2. პროპორცია. სიდიდეებს შორის პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული დამოკიდებულებები

<table>
<tr><td colspan="4">თემატური ბლოკი: რიცხვები და მოქმედებები
სავარაუდო დრო: 2 სთ</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნებები და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვები</th><th>დავალებები</th></tr>
<tr><td>სიდიდეები, რიცხვითი გამოთვლები; პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული სიდიდეები; პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული დამოკიდებულების ამოცნობა გვეხმარება პრაქტიკული ამოცანებისა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებიდან მომდინარე პრობლემების გადაჭრაში.</td><td>პროპორცია; პირდაპირპროპრიციული და უკუპროპორციული სიდიდეები.</td><td>რა თვისება აქვს პირდაპირპროპორციულ სიდიდეებს?
რა თვისება აქვს უკუპროპორციულ სიდიდეებს?</td><td>კლასში: 1-14
საშინაო: 1-13</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეების წარმოდგენა სხვადასხვა რიცხვითი მახასიათებლებით, სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებების ამოცნობა და პრობლემის გადაჭრისას ამ დამოკიდებულებების თვისებების გამოყენება.</td></tr>
</table>

აქტივობები: ახალი მასალა უკავშირდება წინარე ცოდნას — ერთეულოვან ფარდობას. ერთეულოვანი ფარდობის მიხედვით შედგება ორი ფარდობის ტოლობა, რადგან თითოეული ფარდობა ერთსა და იმავე სიდიდეს სხვადასხვა რიცხვითი მახასიათებლებით წარმოადგენს. მოსწავლის ცოდნის გააქტიურება ერთეულოვანი ფარდობის შესახებ ეხმარება მას კარგად გაიაზროს პროპორციის შედგენის წესი. ეს საკითხიც არ არის ახალი მოსწავლეებისთვის, ისინი ხშირად იყენებდნენ პროპორციას, მაგალითად, პროცენტებზე ამოცანების ამოხსნისას, ამ დროს პროპორციის დაწერაც ერთეულოვანი ფარდობების სხვადასხვა წარმოდგენების ტოლობას უკავშირდება; მაგალითად, თუ 100%-ით წარ-

მოდგენილია რიცხვი 60; 30%-ით — x, მაშინ 1%-ზე მოდის ერთი მხრივ $\frac{60}{100}$, მეორე მხრივ — $\frac{x}{30}$ და გვაქვს პროპორცია: $\frac{60}{100}=\frac{x}{30}$.

თავიდან კი ასეთი სახით იყო ჩაწერილი:

$$60 - 100\%$$
$$x - 30\%$$

პირდაპირპროპორციული სიდიდეების განხილვა აღნიშნული ერთეულოვანი ფარდობების ტოლობის განხილვით შეიძლება დავიწყოთ. მოსწავლემ უნდა შეძლოს პასუხი გასცეს საკვანძო შეკითხვებს — რა არის პროპორცია, რას ეწოდება პირდაპირპროპორციული სიდიდეები, რას ეწოდება უკუპროპორციული სიდიდეები. მნიშვნელოვანია ამ დამოკიდებულებებს შორის განსხვავების გააზრება და ამოცანების ამოხსნის დროს მათი ამოცნობა.

ამოცანების ამოხსნა გვეხმარება ამ დამოკიდებულებების ამოცნობაში.

სწორი პროპორციის შედგენისა და ამოხსნის შესახებ ცოდნის განმტკიცებას ემსახურება 1-5 ამოცანებში სწორი პასუხების შერჩევა.

ყოველი ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლე უთითებს დამოკიდებულების ტიპს (დამოკიდებულება პირდაპირპროპორციულია, თუ — უკუპროპორციული); ამის შემდეგ ამოცანა ზეპირად იხსნება.

მაგალითად, 6-7 ამოცანების ამოხსნისას, მოსწავლე მიუთითებს: 6 ამოცანაში ერთი და იმავე მანძილის გავლისას, დრო სიჩქარის უკუპროპორციულია, ამიტომ სიჩქარის 3-ჯერ შემცირებისას, დრო გაიზრდება 3-ჯერ (მიიღება 90 წთ), სიჩქარის 5-ჯერ გაზრდის შემთხვევაში, დრო შემცირდება 5-ჯერ (მიიღება 6 წთ.). 7 ამოცანაში ერთეულის ფასისა და რაოდენობის ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა, ამიტომ ისინი უკუპროპორციული სიდიდეებია; თუ თითოეული ბარათის ფასი 3-ჯერ მეტი იქნება, მაშინ შესაძლებელი იქნება 3-ჯერ ნაკლები ბარათის (2-ის) ყიდვა.

8-9 ამოცანებში პირდაპირპროპორციული სიდიდეები გვაქვს; მოსწავლე მსჯელობს; რაც მეტია დრო, მით უფრო მეტი წყლის ამოტუმბვაა შესაძლებელი; 35 წმ 5-ჯერ მეტია 7 წმ-ზე, შეიძლება 5-ჯერ მეტი წყლის ამოტუმბვა — $5{\cdot}20=100$ ლიტრის (ამოცანა 9 ბ)).

10 ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლე მსჯელობს: რამდენჯერაც მეტია მილების რაოდენობა, მით უფრო ნაკლები დრო იქნება საჭირო აუზის ასავსებად (უკუპროპორციული სიდიდეები); თუ 2 მილით 6 საათში ივსება, 4 მილით აივსება 3 საათში (ამოცანა 10, ა)).

11 პრაქტიკული ამოცანაა. ანალოგიური დავალება კომპლექსური დავალებითაც არის წარმოდგენილი. გვაქვს პროპორციული სიდიდეები, რომელიც სხვადასხვა კერძის დამზადების დროს გაითვალისწინება. ინტერნეტის საშუალებით, მოსწავლეს შეუძლია მოიძიოს სხვადასხვა ტიპის ხაჭაპურისა და ღვეზელის, პიცის, ნამცხვრების დამზადებისას ინგრედიენტების პროპორციების ჩამონათვალი და ახსნას ამ პროპორციების გამოყენების მაგალითები. მოსწავლეს მოუწევს იმ ამოცანების მოძიებაც, რომლებიც ფიზიკისა და ქიმიის სახელმძღვანელოებში პროპორციის გამოყენებით იხსნება (ამოცანები თანაბარ მოძრაობაზე, შენარევებზე და ა. შ.).

11 ამოცანის ანალოგიურია პრაქტიკული ამოცანა, რომელიც მოსწავლემ შინ დამოუკიდებლად უნდა ამოხსნას (ამოცანა 9).

12-14 ამოცანები უკუპროპორციულ სიდიდეებზეა; უკუპროპორციულობის აღმოჩენის შემდეგ, მოსწავლე სწრაფად ხსნის ამოცანას.

მაგალითად, 12 ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლე ამოიცნობს უკუპროპორციულ სიდიდეებს და მსჯელობს: შეკვეთის 5 დღეში დასამთავრებლად საჭირო იქნება დღეში 3-ჯერ მეტის შეკერვა, რადგან 5 არის 15-ზე 3-ჯერ ნაკლები; მაშასადამე, ნაცვლად 10 ფორმისა, საჭირო იქნება დღეში 30 ფორმის შეკერვა (დღეში 20-ით მეტის შეკერვა). 13 ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლე მსჯელობს: დროის ერთეულში 20%-ით მეტი სამუშაოს შესრულება ნიშნავს, დროის ერთეულში 1,2-ჯერ მეტი სამუშაოს შესრულებას, შესაბამისად, ბრიგადას 1,2-ჯერ ნაკლები დრო დასჭირდება (უკუპროპორციული სიდიდეები): $18:1,2=15$ (დღე).

14 ამჯერად, $\frac{14}{8}=1,75$-ჯერ ნაკლები ბუჩქიდან იღებს იმდენივე მოსავალს. 8 ნაკლებია 14-ზე 1,75-ჯერ, შესაბამისად, მოსავლიანობა გაიზარდა 1,75-ჯერ; მაშასადამე, 75%-ით.

კლასში ყველა ამ ამოცანის დაწვრილებითი გარჩევა დაეხმარება მოსწავლეს, რომ დამოუკიდებლად იმსჯელოს, ამოიცნოს პროპორცია, პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული სიდიდეები. საშინაო დავალების წარმოდგენისას მოსწავლემ უნდა მიუთითოს, რომ, მაგალითად, 6 და 7 ამოცანები უკუპროპორციულ სიდიდეებზეა და პასუხის დასახელება ზეპირად შეიძლება; 8, 9, 12 ამოცანები პირდაპირპროპორციულ სიდიდეებზეა.

13 ამოცანაში, მაგალითად, იუპიტერზე ადამიანის წონის საპოვნელად, შეიძლება პროპორციის შედგენა:

$$\begin{array}{l} 100 - 264 \\ 80 - x \end{array} \qquad x=\frac{264\cdot 80}{100}=211,2 \text{ (კგ).}$$

3.3. პირდაპირპროპორციულ და უკუპროპორციულ სიდიდეებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნა

თემატური ბლოკი: რიცხვები და მოქმედებები
სავარაუდო დრო: 2 სთ

სამიზნე ცნებები და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	დავალებები
სიდიდეები, რიცხვები, რიცხვითი გამოთვლები; სიდიდეები და სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებები რიცხვების საშუალებით შეიძლება სხვადასხვა ეკვივალენტური სახით ჩავწეროთ.	პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული სიდიდეები, პროპორციის გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას.	რა სიდიდეებს ეწოდება პირდაპირპროპრციული სიდიდეები? რა სახით ჩაიწერება დამოკიდებულება პირდაპირპროპორციულ სიდიდეებს შორის? რა სახით ჩაიწერება დამოკიდებულება უკუპროპორციულ სიდიდეებს შორის?	**კლასში:** 1-10 **საშინაო:** 1-12

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს ყოველდღიური ცხოვრებიდან, ან სხვა მეცნიერებებიდან მომდინარე პრობლემების გადაჭრისას გამოიყენოს სიდიდეებისა და მათ შორის დამოკიდებულებების სხვადასხვა სახით ჩაწერა და პრობლემის გადაწყვეტა.

აქტივობები: წინარე ცოდნის გააქტიურება პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული სიდიდეების დახასიათებით იწყება. მივმართავთ მოსწავლეებს და ვიხსენებთ შესწავლილ საკითხებს:

— ვთქვათ, a და b დადებითი რიცხვებია, $a>b$. რას წარმოგვიდგენს $\frac{a}{b}$ შეფარდება? (შესთავაზეთ მოსწავლეებს დამხმარე კითხვები: ა) რამდენით მეტია a რიცხვი b-ზე, ბ) რამდენი %-ით მეტია a რიცხვი b-ზე; გ) რამდენჯერ მეტია a რიცხვი b-ზე?)

— რას წარმოგვიდგენს იმავე რიცხვებისთვის $\frac{b}{a}$ შეფარდება? (დამხმარე კითხვები: ა) რამდენჯერ ნაკლებია b რიცხვი a-ზე? ბ) რამდენით ნაკლებია b რიცხვი a-ზე? გ) a-ს რა ნაწილს შეადგენს b?).

— რას წარმოგვიდგენს სხვადასხვა სიდიდის შეფარდება? რა არის ერთეულოვანი შეფარდება?

— რას ეწოდება პროპორცია? რა თვისებას ვიყენებთ პროპორციის შედგენისას? (ერთეულოვანი შეფარდებები ტოლი რიცხვებით გამოისახება და მათი ტოლობა გვაძლევს პროპორციას).

— რა არის პროპორციის ძირითადი თვისება?

— რა სიდიდეებს ეწოდება პირდაპირპროპორციული სიდიდეები? როგორ ვიყენებთ პროპორციას მათ შორის დამოკიდებულების ჩასაწერად (თუ x_1 და x_2 არის x სიდიდის ორი მნიშვნელობა; y_1 და y_2 ამ სიდიდის პროპორციული y სიდიდის შესაბამისი მნიშვნელობებია, მაშინ $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}$; ამას ასეც ვწერთ:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{array}\right| \quad ?$$

— რა სიდიდეებს ეწოდება უკუპროპორციული სიდიდეები? როგორ ვიყენებთ პროპორციას მათ შორის დამოკიდებულების წარმოსადგენად (წინა პასუხის აღნიშვნების მიხედვით, გვაქვს: $x_1y_1=x_2y_2$ ანუ $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_1}{y_2}$)?

შემდეგ შეიძლება გადავიდეთ სახელმძღვანელოს ტექსტში განხილული ამოცანების გარჩევაზე. ამ შემთხვევაშიც, ძირითადი მოქმედი პირი მოსწავლეა, მსჯელობის ხაზის განვითარება, პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული სიდიდეების ამოცნობა და მათი თვისებების გამოყენება მოსწავლეს ევალება.

ძალიან მნიშვნელოვანია მსჯელობის ხაზის განვითარების მიგნება და წარმოდგენა მე-3 მაგალითის განხილვისას. ამოცანის ამოხსნისას, „ერთეულოვანი ფარდობის" პოვნა და პირდაპირპრორციული სიდიდეების თვისებაა გამოყენებული. მნიშვნელოვანია ადამიანების რაოდენობასა და შესრულებული სამუშაოს რაოდენობას შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების აღმოჩენა; თუ 16 კაცი 20 დღეში 180 ტონას ამოიღებს, მაშინ 1 კაცი 20 დღეში 16-ჯერ ნაკლებს ამოიღებს. 12 კაცი — 12-ჯერ მეტს (ვიდრე ერთი კაცი). სასურველია, მიღებული შედეგების წარმოდგენა:

16 კაცი — 20 დღე — 180 ტ

12 კაცი — 20 დღეში — $\frac{180}{16} \cdot 12$ ტ

12 კაცი — 1 დღეში — $\frac{180 \cdot 12}{16 \cdot 20}$ ტ

12 კაცი — 28 დღეში — $\frac{180 \cdot 12 \cdot 28}{16 \cdot 20}$ ტ.

ყოველი ამოცანის ამოხსნის დროს, სასურველია, სიდიდეების იმავე სქემით ამოწერა და პროპორციის თვისების გამოყენება.

მაგალითად, 1 ამოცანის ა) პირობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

5 ც — 40 კგ
6 ც — x

პირდაპირპროპორციულობის გამო, გვაქვს:

$$x=\frac{6 \cdot 40}{5}=48 \text{ (კგ)}.$$

გ) პირობა ასე ჩაიწერება:

5 ც — 40 კგ
x ც — 8 კგ.

აქ მოსწავლე ზეპირადაც მიხვდება — 5-ჯერ ნაკლები რძე იქნება საჭირო — 1 ც რძე.

ამოცანები, ძირითადად, ყოველდღიურ ცხოვრებაში პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული სიდიდეების თვისებების გამოყენებაზეა.

2-4 ამოცანებიც, პირდაპირპროპორციული სიდიდეების თვისების გამოყენებით, პროპორციის შედგენით იხსნება; მაგალითად, ამოცანების ამოხსნისას, მოსწავლე მსჯელობს: რამდენჯერაც მეტი ნაწილია ასავსები, იმდენჯერ მეტი კოვზი შაქარია საჭირო — 8 უნდა გავამრავლოთ იმ რიცხვზე, რამდენჯერაც 2 მეტია $\frac{2}{3}$-ზე; ე. ი. 3-ზე; $8 \cdot 3=24$ (კოვზი) (ამოცანა 2 ა)). თუმცა, ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება არჩიოს პროპორციის დაწერა:

$8 - \frac{2}{3}$
$x - 2$ | $x=16:\frac{2}{3}=24.$

წავახალისოთ მოსწავლეების ზეპირი ანგარიში, პროპორციის გამოყენების გარეშე, მსჯელობით პასუხის მიგნება. მაგალითად, 3 ამოცანის ამოხსნისას მოსწავლე მსჯელობს: 5 წთ = $5 \cdot 60$ წმ = 300 წმ. 300 არის 30-ზე 10-ჯერ მეტი, 10-ჯერ მეტ დროში 10-ჯერ მეტი სიტყვის აკრეფაა შესაძლებელი: $10 \cdot 20=200$ (სიტყვა).

4 10 ადამიანისთვის საჭირო იქნება — $\frac{1}{4} \cdot \frac{10}{6}=\frac{5}{12}$ (ჩაის კოვზი); იმდენჯერ მეტი $\frac{1}{4}$-ზე, რამდენჯერაც 10 მეტია 6-ზე; თუმცა, მოსწავლეთა ერთმა ნაწილმა შეიძლება არჩიოს პროპორციის დაწერა:

6 — $\frac{1}{4}$
10 — x

5 პირობა ასე წარმოვადგინოთ:

8 მ — 180
12 მ — x

აქ მოსწავლე მსჯელობს: რამდენჯერაც გრძელია თითოეული რელსის სიგრძე, იმდენჯერ ნაკლები რელსი იქნება საჭირო:

$180:\frac{12}{8}=120$ (ცალი), ანუ 60-ით ნაკლები.

ამოხსნისას შეიძლება უკუპროპორციული სიდიდეების თვისება გამოიყენოთ:

$8\cdot180=12\cdot x,\qquad x=\frac{8\cdot180}{12}=120,\qquad 180–120=60;$

ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება ასე იმსჯელოს: თითოეული რელსი 4 მ-ითაა ნაკლები; ამიტომ საძიებელი რიცხვისთვის გვექნება პროპორცია: $\frac{12}{4}=\frac{180}{x}$ (უკუპროპორციულობის თვისება); $x=\frac{4\cdot180}{12}=60$ (ცალი).

6 გვაქვს უკუპროპორციული სიდიდეები: პირველმა გაიარა 3,6 კმ, მეორემ — x;

2 სთ — 3,6	$2\cdot3{,}6=3\cdot x$
3 სთ — x	$x=2\cdot1{,}2=2{,}4$ (კმ)

აქ $\frac{2}{3}=\frac{x}{3{,}6}$, რამდენჯერაც მეტი დრო სჭირდება მეორეს რაიმე მანძილის გასავლელად, ვიდრე პირველს იმავე მანძილის გასავლელად, იმდენჯერ ნაკლებ მანძილს გაივლის იგი, ვიდრე პირველი (ერთსა და იმავე დროში).

7 როცა ახალი ბრიგადა იმავე სისწრაფით მუშაობს, გვექნება

3 კაცი — 4 მ — 8 სთ
4 კაცი — 10 მ — x სთ

აქედან გვექნება:

4 კაცი — 4 მ — $\frac{8}{4}\cdot3$ (სთ)
4 კაცი — 10 მ — $\frac{6}{4}\cdot10$ სთ = 15 სთ.

1,2-ჯერ სწრაფად მუშაობის შემთხვევაში დასჭირდებათ 1,2-ჯერ ნაკლები დრო:

$15:1{,}2=150:12=12{,}5$ (სთ).

8 ვთქვათ, ახალ ჯგუფში x წევრი უნდა იყოს.

4 დღ — 6 სთ — 700 გვ. — 3 წევრი
2 დღე — 2 სთ — 350 გვ. — x წევრი.

ვმსჯელობთ პირველი სტრიქონის მიხედვით, ვითვალისწინებთ პირდაპირპროპორციულობას (უკუპროპორციულობას) და ვწერთ

4 დღ — 6 სთ — 700 გვ. — 3 წევრი
2 დღ — 2 სთ — 350 გვ. — $3\cdot2\cdot3:2$

ახალ ჯგუფში უნდა იყოს 9 წევრი;
ოპერატორების რაოდენობა უნდა გაიზარდოს 6 წევრით.

შეიძლება ამოცანა ასეც ამოვხსნათ. 3 ოპერატორი 350 გვერდს 2 დღეში, დღეში 6 საათის მუშაობით ამზადებს. თუ დასამატებელ წევრთა რაოდენობას აღვნიშნავთ x-ით, მივიღებთ, რომ იმავე სამუშაოს $3+x$ წევრი 2 დღეში, დღეში 2 საათის მუშაობით შეასრულებდა: $(3+x)\cdot2\cdot2=3\cdot2\cdot6$, $x=6$.

9 ცივი წყლით 1 წთ-ში ივსება — $1:\frac{20}{3}=\frac{3}{20}$ ნაწ.

ცხელი წყლით 1 წთ-ში ივსება: $1:8=\frac{1}{8}$ ნაწ.

1 წთ-ში ივსება — $\frac{3}{20}+\frac{1}{8}=\frac{6+5}{40}=\frac{11}{40}$(ნაწ.)

1 წთ-ში იცლება — $1:\frac{40}{3}=\frac{3}{40}$ ნაწ.

ცარიელი აუზის რა ნაწილი აივსება 1 წთ-ში? $\frac{11}{40}-\frac{3}{40}=\frac{1}{5}$ ნაწ. პასუხი: 5 წთ-ში.

10 პირობის თანახმად, 1 წაბლისფერი იმდენივე რძეს იძლევა, რამდენსაც 2 თეთრი ძროხა. ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება „ერთეულოვანი ფარდობები" შემოიღოს და იმსჯელოს ტოლობიდან: $4x+3y=3x+5y$.

ვთქვათ, უნდა ვიპოვოთ წყლის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა 0,4 კგ ხსნარის დასამზადებლად, რომელშიც კალიუმის ქლორიდის მასური წილი 15%-ია.

აქ იწერება პროპორცია:

$$\begin{array}{l|l} 400 \text{ — } 100\% & \\ x \text{ — } 15\% & \quad x=60 \end{array}$$

მაშასადამე, 60 გ არის ქლორიდის მასა, 340 გ — წყლის მასა.

საშინაო დავალების ამოცანები, ცხადია, შინაარსის მიხედვით განსხვავდება კლასში ამოხსნილი ამოცანებისგან, მაგრამ ამოხსნის მეთოდი ანალოგიურია — უნდა ამოვიცნოთ პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული სიდიდეები და გამოვიყენოთ შესაბამისი პროპორციები.

მაგალითად, **1**-**3** ამოცანებში პირდაპირპროპორციული სიდიდეები გვაქვს. რამდენჯერაც მეტია საწვავი, იმდენჯერ მეტი მანძილის გავლა შეიძლება (ამოცანა **1**); რამდენჯერაც მეტია ადამიანების რაოდენობა, იმდენჯერ მეტი მარილი იქნება საჭირო (ამოცანა **2**), რამდენჯერაც მეტი იქნება მუშაობისთვის განკუთვნილი დრო, იმდენჯერ მეტი გვერდის დაბეჭდვა იქნება შესაძლებელი (ამოცანა **3**).

4 ამოცანაში კი უკუპროპორციული სიდიდეები გვაქვს. რამდენჯერაც მეტი იქნება ნახშირის ყოველდღიური მოხმარება, იმდენჯერ ნაკლები იქნება იმ დღეების რაოდენობა, როცა საკმარისი იქნება იგივე მარაგი.

$$30:\frac{0,6}{0,5}=30\cdot\frac{5}{6}=25 \text{ (დღე).}$$

ამოხსნა შეიძლება ამ განტოლებასაც დაუკავშიროთ: $30\cdot0,5=x\cdot0,6$

5 2,4 საათში $\frac{3}{5}$ ნაწილი გაიარა; $\frac{3}{4}$-ის გავლამდე დარჩა გზის $\frac{3}{20}$ ნაწილი. მის გავლას დასჭირდება 4-ჯერ ნაკლები დრო — 0,6 სმ= 36 წთ.

6 აქ უკუპროპორციული სიდიდეები გვაქვს: 1 საათში დასამთავრებლად საჭირო იქნება 90 მუშა, 6 საათში დასამთავრებლად — 15 მუშა; 6 მუშაა დასამატებელი. ასეთი მსჯელობები შეიძლება მოვუწონოთ მოსწავლეებს; თუმცა, არ უნდა ვთქვათ უარი ამოცანების ამოხსნის სხვა ხერხებზეც. ამასთანავე, მიზანშეწონილია, რამდენიმე სხვადასხვა ხერხის ილუსტრაცია.

7 აქაც უკუპროპორციული სიდიდეები გვაქვს. ცხადია, ნინოს მიერ წაკითხული გვერდების რაოდენობა ნაკლები იქნება $\frac{10}{6}$-ჯერ — $30:\frac{10}{6}=18$ (გვერდი).

8 5 ცხ — 1000 კგ — 30 დღ.
10 ცხ — 200 კგ — x

აქაც შეიძლება მოსწავლემ ზეპირად გამოიანგარიშოს:

$$x=30:(10:5)\cdot(200:1000)=3 \text{ (დღე)}$$

9 ა) 3 ტ — 3 დღ — 6 კგ
4 ტ — 9 დღ — x

აქ პირდაპირპროპორციული სიდიდეები გვაქვს:

$$x=6\cdot\frac{4}{3}\cdot(9:3)=24 \text{ (კგ)}$$

ან ასე: 1 ტ — 3 დღ — 2 კგ; 4 ტ — 9 დღ — $2\cdot4\cdot3=24$ (კგ).

10 წინა ამოცანის ანალოგიურად იხსნება.

11 რამდენჯერაც მეტი იქნება სიჩქარე, იმავე დროში ტურისტი იმდენჯერ მეტ მანძილს გაივლის: $12\cdot2{,}5=30$ (კმ).

12 პირობის თანახმად, ავსების მომენტში ცხელი და ცივი წყლის ოდენობების შეფარდება არის 3:2; მაშასადამე, აუზში არის $\frac{3}{5}$ ნაწილი ცხელი წყალი — $\frac{2}{5}$ ნაწილი ცივი წყალი. მაშასადამე, ცხელი წყლით შევსების დროს ასე ვიპოვით: $\frac{3}{5}:\frac{1}{23}$ (წთ).

$$\frac{3}{5}:\frac{1}{23}-\frac{2}{5}:\frac{1}{17}=\frac{69}{5}-\frac{34}{5}=\frac{35}{5}=7 \text{ (წთ.)}.$$

დაწვრილებით გავარჩიოთ ეს ამოცანა კლასში. ძირითადი აქცენტი კეთდება პირობაზე: სავსე აბაზანაში ცხელი წყალი 1,5-ჯერ მეტი აღმოჩნდება, ვიდრე ცივი წყალი; ცხელი წყლისა და ცივი წყლის მოცულობების შეფარდება არის 3:2; ცხელი წყალი არის აუზის $\frac{3}{5}$, ცივი — $\frac{2}{5}$.

3.4. პროცენტი. პროცენტული ცვლილება

თემატური ბლოკი: რიცხვები და მოქმედებები
სავარაუდო დრო: 2 სთ

სამიზნე ცნებები და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	დავალებები
სიდიდეები, რიცხვები, მათი თვისებები, რიცხვითი გამოთვლები. რიცხვები შეიძლება სხვადასხვა ეკვივალენტური სახით ჩაიწეროს; რიცხვების პროცენტის სახით ჩაწერა გვეხმარება სიდიდეებს შორის კავშირებისა და ცვლილების კანონზომიერებების აღწერაში	რიცხვის ჩაწერა პროცენტის სახით; რიცხვის პროცენტის პოვნა; პროცენტით რიცხვის პოვნა; პროცენტული ფარდობა, სიდიდის ცვლილების გამოსახვა პროცენტებში.	რა გამოყენება აქვს სიდიდეების ცვლილების პროცენტულ გამოსახვას?	**კლასში:** 1-13 **საშინაო:** 1 - 13

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეების რიცხვებით წარმოდგენისას, გამოიყენოს პროცენტი; აღწეროს პროცენტის გამოყენებით სიდიდეების ცვლილების კანონზომიერებები; დაახასიათოს რიცხვებით სიდიდეების ცვლილება.

აქტივობები: პროცენტისა და პროცენტთან დაკავშირებული ამოცანების განხილვა წინა წლებში დაიწყო; ეს საკითხები დაკავშირებულია ფარდობასა და პროპორციასთან; პროპორციის გამოყენებით პროცენტებზე ამოცანები ადვილად იხსნება, ამიტომ წინარე ცოდნის გააქტიურება, ძირითადად, პროპორციის სხვადასხვა გამოყენებას შეიძლება დაეთმოს, მაგალითად, პროპორციის გამოყენებით პროცენტებზე ამოცანების ამოხსნას; სასწავლო პროცესი მოსწავლეთა აქტიური მონაწილეობით მიმდინარეობს; ინტერაქტიულ რეჟიმში, მოსწავლეები იხსენებენ უკვე ნაცნობ მასალას რიცხვის პროცენტის, პროცენტით რიცხვის პოვნისა და ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდების პოვნის შესახებ. ცოდნის გაღრმავება მიმდინარეობს პროცენტულ ცვლილებაზე აქცენტის გამახვილებით — სიდიდეების ცვლილებას ვუკავშირებთ ამ ცვლილების პროცენტებით წარმოდგენას, რომელიც აადვილებს სიდიდეების ცვლილების კარგად გააზრებას — რამდენად დიდია, მაგალითად, ბენზინის ფასის პროცენტული მატება ზაფხულის თვეებში, სხვა თვეებთან შედარებით. პროცენტული შეფარდების პოვნა, შეიძლება პროპორციითაც წარმოვადგინოთ; მაგალითად, 54-ისა და 72-ის პროცენტული შეფარდება გვიჩვენებს 72-ის რამდენი პროცენტია 54 და პროპორცია შეიძლება გამოვიყენოთ:

$$54 - P\%$$
$$72 - 100\%.$$

შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ: დავსვათ კითხვა: 54 რა ნაწილს შეადგენს 72-ის? —

$$\frac{54}{72}=\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot 100\%=75\%.$$

თუ გვსურს გავიგოთ, რამდენი პროცენტით მეტია 72 54-ზე, ანუ 54-დან 72-ზე გადასვლისას რისი ტოლია პროცენტული ცვლილება (პროცენტული მატება), მაშინ შეიძლება გამოვიყენოთ პროპორცია:

$$\begin{aligned} 18 &\;—\; P\% \\ 54 &\;—\; 100\% \end{aligned}$$

მნიშვნელოვანია პრაქტიკული ამოცანების განხილვა, რომლებიც უადვილებს მოსწავლეს პროცენტული ცვლილების არსის გააზრებას. კომპლექსური დავალებაც პროცენტული ცვლილების პრაქტიკულ გამოყენებებთან არის დაკავშირებული. ამასთანავე, მოსწავლეს მოუწევს სტატისტიკური მონაცემების მოძიება და მათი საშუალებით სოციალური პაკეტის მქონე პირთა რაოდენობის ცვლილებაზე მსჯელობა; ამ ცვლილების პროცენტული წარმოდგენა ეხმარება მოსწავლეს კანონზომიერებების აღმოჩენასა და ანალიზში.

დავალებების დიდი ნაწილიც პროცენტული ცვლილების გამოთვლასა და გააზრებას ემსახურება.

კლასში ამოსახსნელ „ტესტებში" მოსწავლემ უნდა შეძლოს რიცხვის სხვადასხვა სახით ჩაწერა, რიცხვის პროცენტის და პროცენტული ცვლილების პოვნა. დაწვრილებით უნდა გავარჩიოთ ამოცანები, რომლებიც მოსწავლეებისგან მსჯელობის ხაზის განვითარებასა და სწორი დასკვნების გამოტანას მოითხოვს.

გთავაზობთ მითითებებს ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

10 ამ ამოცანაში უნდა დავადგინოთ, 12-ის რამდენი პროცენტია 1. 1 არის 12-ის $\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot 100\%=8\frac{1}{3}\%$.

11 ფასდაკლება პროცენტებით უნდა წარმოვადგინოთ; ფასის პროცენტული კლებაა — $\frac{15}{115}\cdot 100\% \approx 13\%$. ფასდაკლება 15%-ზე ნაკლებია.

12 მოსწავლე მსჯელობს: ფასები პროდუქტებზე 20%-ით გაიზარდა, ეს ნიშნავს, რომ ფასები გაიზარდა $(1+\frac{1}{5})$-ჯერ, ანუ ახალი ფასი $\frac{6}{5}$-ჯერ მეტია ძველზე; მაშასადამე, იმავე თანხით, რასაც ადრე ვხარჯავდით შეიძლება ძველის $(1:\frac{6}{5})$ ნაწილის ყიდვა, $\frac{5}{6}$ ნაწილის ყიდვა, ანუ $\frac{1}{6}$-ით ნაკლების ყიდვა; გამოვსახოთ პროცენტებში: $\frac{1}{6}\cdot 100\% \approx 16{,}7\%$.

ეს ამოცანა შეიძლება ჩაითვალოს კომპლექსურ დავალებად — საჭიროა პროცენტული ცვლილების პოვნა, უკუპროპორციულობის აღმოჩენა, შესაბამისი თვისების გამოყენება. მაშასადამე, ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას 600 ლარის გამოყენების გარეშე. შეიძლება ზოგიერთმა მოსწავლემ გამოიყენოს ეს რიცხვი: თუ 600 ლარად ყიდულობდნენ x პროდუქტს, ყოველ ერთეულზე მოდიოდა $\frac{600}{x}$ ლარი, ახლა ყოველ ერთეულზე დაიხარჯება $(1+\frac{1}{5})\frac{600}{x}$ ლარი $=\frac{6}{5}\cdot\frac{600}{x}$ ლარი.

600 ლარით შეგვეძლება ყიდვა:

$600:(\frac{6}{5}\cdot\frac{600}{x})=\frac{6}{5}x$ ერთეულის, $\frac{5}{6}x$ კი x-ზე $\frac{1}{6}x$-ით ნაკლებია:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{6}x &- P\% \\ x &- 100\% \end{aligned}\right| \qquad P\%=\frac{100\%}{6}\approx 16{,}7\%.$$

(13) წინა ამოცანის ამოხსნისას მსჯელობის დროს მოსწავლეთა ყურადღება გავამახვილოთ პროცენტით ცვლილების შემდეგ წარმოდგენაზე: 20%-ით გაზრდა ნიშნავს — $(1+\frac{1}{5})$-ჯერ გაზრდას.

შეიძლება კიდევ რამდენიმე მაგალითის განხილვა: 25%-ით გაზრდა ნიშნავს $\frac{5}{4}$-ჯერ გაზრდას.

ამ მსჯელობას გამოვიყენებთ (13) ამოცანის ამოხსნისას:

I ავზში წყლის რაოდენობა გაიზარდა — ჯერ 1,01-ჯერ, შემდეგ 1,02-ჯერ, 1,03-ჯერ... 1,25-ჯერ.

II ავზში: ჯერ 1,25-ჯერ, შემდეგი 1,24-ჯერ, შემდეგ — 1,23-ჯერ, ... 1,01-ჯერ.

პირველ ავზში წყლის რაოდენობა გაიზარდა:

$1{,}01\cdot1{,}02\cdot1{,}03\cdot...\cdot1{,}25$-ჯერ,

მეორეში: $1{,}25\cdot1{,}24\cdot1{,}23\cdot...\cdot1{,}01$-ჯერ.

ორივე ავზში კვლავ თანაბარი რაოდენობის წყალია.

საშინაო დავალებების ამოცანები, ძირითადად, კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია და კლასში კარგად უნდა მოვისმინოთ მოსწავლეთა მსჯელობები ყოველი ამოცანის ამოხსნისას. მაგალითად, 11 ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლემ შეიძლება ასე იმსჯელოს: პროდუქტებზე ახალი ფასი $\frac{5}{4}$-ჯერ მეტია; იმ თანხით, რითაც ვყიდულობდით პროდუქტის ერთეულს, ახლა შეიძლება ერთეულის $1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5}$ ნაწილის ყიდვა; $\frac{1}{5}$ ნაწილით ნაკლების ყიდვა, რაც შეადგენს ერთეულის 20%-ს; მაშასამადე, 20%-ით ნაკლების ყიდვაა შესაძლებელი.

ამჯერად განსხვავებული ამოცანის ამოხსნაც შევთავაზეთ მოსწავლეებს. 12 ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლე შეიძლება მიხვდეს, რომ, მაგალითად, 7-დან, ან 9-დან შემდეგ რიცხვზე „გადასვლის“ პროცენტული ცვლილება არ შეიძლება იყოს მთელი რიცხვი. მართლაც, არც $\frac{|a-7|}{7}\cdot100\%$ და არც $\frac{|a-9|}{9}\cdot100\%$ არ გამოისახება პროცენტების მთელი რიცხვით.

13 ამოცანაში მოსწავლე მსჯელობს: თუ ნინოს მიერ შეგროვილი სოკოების რაოდენობას 1 ერთეულად მივიღებთ, მაშინ მარიამის მიერ შეგროვილი რაოდენობაა $1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$ ერთეული.

მარიამის მიერ შეგროვილი სოკოების რაოდენობა თეას რაოდენობის 80%-ია:

$\frac{6}{5}$ — 80%

თეას — 100% თეას — $\frac{100\cdot6}{5\cdot80}=1{,}5.$

თეამ შეაგროვა ნინოსთან შედარებით 1,5-ჯერ მეტი, ე. ი. ნინოზე 50%-ით მეტი.

3.5. მარტივი და რთული პროცენტი

<table>
<tr><td colspan="4">თემატური ბლოკი: რიცხვები და მოქმედებები
სავარაუდო დრო: 3 სთ</td></tr>
<tr><td>სამიზნე ცნებები და მასთან დაკავშირე-ბული მკვიდრი წარ-მოდგენები</td><td>საკითხები</td><td>საკვანძო შეკითხვები</td><td>დავალებები</td></tr>
<tr><td>სიდიდეები, რიცხ-ვები, რიცხვითი გამოთვლები. რიცხ-ვებისა და რიცხვითი გამოსახულებების ჩაწერა შეიძლება სხვადასხვა ეკვივა-ლენტური ფორმით; მარტივი და რთული პროცენტის დარიცხ-ვის ფორმულები გვეხმარება პრაქტი-კული ამოცანების ამოხსნაში.</td><td>მარტივი და რთული პროცენტი (მარტი-ვი და რთული პრო-ცენტის დარიცხვის მეთოდი).</td><td>რა განსხვავე-ბაა მარტივი და რთული პროცენ-ტის დარიცხვის წესებს შორის? რა გამოყენება აქვს პროცენტს რეალურ ცხ-ოვრებაში?</td><td>კლასში: 1-13
საშინაო: 1 - 12</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეების წარმოდგენა სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმით; გამოიყენოს მარტივი და რთული პროცენტის ფორმულები საბანკო საქმესთან დაკავშირებული საკითხების გადაწყვეტისას.</td></tr>
</table>

აქტივობები: ტექსტში ზომიერად არის წარმოდგენილი ახალი ცნებები — მათი ახსნა ხდება მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით, წინარე ცოდნის გააქტიურებაზე დაყრდნობით. საკვანძო საკითხების — მარტივი და რთული პროცენტის წესით დარიცხვის წესის ახსნა-ილუსტრირება შესაბამისი ფორმულებისა და გამოყენების მაგალითებით ხდება. პარაგრაფის ტექსტი ეხმარება მასწავლებელს ახალ საკითხებთან დაკავშირებული ცნებების გამეორებაში. დასმულია კითხვები, რომლებიც მნიშვნელოვანია პროცენტთან დაკავშირებული ცოდნის გასააქტიურებლად; მოსწავლეს ევალება გაიხსენოს ყველა ის ამოცანა, რომელიც პროცენტს უკავშირდება — სიდიდის პროცენტის პოვნა, სიდიდის პოვნა მისი პროცენტით, სიდიდეების პროცენტული ფარდობა და სიდიდის პროცენტული ცვლილება. ამ უკანასკნელზე ბუნებრივად ხდება ახალი ცოდნის დაშენება, რომელიც პროცენტის დარიცხვის წესების გაცნობას უკავშირდება.

ორი წესის განხილვა და შესაბამისი ფორმულების მიღება საბანკო საქმიანობასთან დაკავშირებული ამოცანების განხილვით იწყება. მასწავლებელი აქცენტს აკეთებს დარიცხვის წესებს შორის არსებულ განსხვავებაზე. მაგალითად, მარტივი პროცენტის დარიცხვის წესის შემთხვევაში, ყოველი დარიცხვისას საწყის თანხას ემატება ამ თანხის პროცენტი — ერთი და იმავე სიდიდის მიმატება ხდება. მოსწავლეები თავად აღმოაჩენენ (მსჯელობა ინდუქციურია) სათანადო ფორმულას; აქცენტი გავაკეთოთ დარიცხულ სიდიდესა და საბოლოო სიდიდეებზე, დარიცხული სიდიდე (სარგებელი) გამოითვლება

ფორმულით: Prt, რომელშიც P საწყისი თანხაა, r არის პროცენტი (გამოსახული ათწილადებში), t — წლების რაოდენობა. საბოლოო თანხა კი გამოითვლება ფორმულით: $P+Prt$.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ r და t სიდიდეების გამოსახვა „შეთანხმებული" უნდა იყოს; თუ r წლიური დარიცხვის პროცენტია, მაშინ t უნდა გამოვსახოთ წლებით ან წლების ნაწილებით, მაგალითად, თუ t წარმოგვიდგენს 3 თვეს, მაშინ ვწერთ — $t=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$-ს, 3 თვე არის $\frac{1}{4}$ წელიწადი; თუ დარიცხვა, მაგალითად, ყოველდღიურია და r რიცხვით გამოისახება, მაშინ t დღეებით უნდა იყოს წარმოდგენილი; თუ r რიცხვით გამოსახულია ყოველთვიური პროცენტი, მაშინ t თვეების რაოდენობას უნდა აღნიშნავდეს.

ანალოგიური მსჯელობა ეხება რთული პროცენტის ფორმულასაც:

$$S=p(1+r)^t;$$

თუ r წლიური პროცენტია, მაშინ t წლების რიცხვს გამოსახავს; მაგრამ თუ დარიცხვა წელიწადში n-ჯერ ხდება, მაშინ ყოველი დარიცხვისას პროცენტი იქნება $\frac{r}{n}$, დარიცხვათა რაოდენობა — nt (t წლების რაოდენობაა); ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$S=p(1+\frac{r}{n})^{nt};$$

მაგალითად, თუ 8%-ის დარიცხვა ხდება ყოველდღიურად, მაშინ $\frac{r}{n}=\frac{0,08}{360}$,

2 წელიწადში — $nt=2\cdot360$.

შევახსენებთ მოსწავლეებს, რომ ნაკიან და არანაკიან წლებში დღეების რაოდენობათა განსხვავების გამო, რომ არ დამძიმებულიყო ამოცანათა პირობები, შეთანხმების თანახმად, წელიწადში დღეების რაოდენობად ვიღებთ 360-ს. თვეში დღეების რაოდენობად — 30-ს.

კლასში ამოცანების განხილვისას, ვაგრძელებთ მსჯელობას ფორმულების გამოყენების წესებზე.

1 მოსწავლეები იხსენებენ, რომ სარგებლისთვის გვაქვს ფორმულა: prt (p — საწყისი თანხაა, r — პროცენტი, t — პერიოდის შესაბამისი რიცხვი). ამასთანავე, r და t „ურთიერთშეთანხმებული" სიდიდეებით უნდა იყოს წარმოდგენილი. მაგალითად, თუ დარიცხვაა წლიური $12\frac{1}{2}$%, პერიოდი — 6 თვე, მაშინ

$$r=0,125,\ t=\frac{1}{2}.$$

შეგახსენებთ, რომ საპროცენტო განაკვეთს ათწილადებით გამოსახავენ ხოლმე, ამიტომ ბ) შემთხვევაში გვაქვს:

$$225,75\cdot0,125\cdot0,5\approx14,11 \text{ (ლარი)}$$

ა) აქ $p=375,\ r=0,045,\ t=3$

$prt=50,63$ (ლარი)

გ) $p=6742,75;\ r=0,0605;\ t=\frac{1}{4}=0,25$ (როგორც შევთანხმდით, წელიწადში დღეების რაოდენობად ვიღებთ 360-ს) და $prt=101,98$ (ლარი).

დ) $p=9752;\ r=0,0125,\ t=4$

$prt=487,6$ (ლარი)

აქ დარიცხვა თვიურია, პერიოდი — თვეები.

ე) $p=17\ 852;\ r=0,0175;\ t=12$

$prt=3748,92$ (ლარი)

2 მოსწავლეები იხსენებენ, რომ $S–p$ არის სარგებლის ოდენობა — prt (r არის წლიური დარიცხვის პროცენტი).

ა) $r=0{,}06;\ t=\frac{1}{6};\ prt=6$

$p=36:0{,}06=3600:6=600$ (ლარი)

ბ) $r=0{,}065;\ t=2,\ prt\ =124{,}5$

$p=124{,}5:0{,}13\ \approx\ 957{,}69$ (ლარი)

გ) $t=\frac{9}{12}=0{,}75;\ prt\ =84{,}53$

$980\cdot r\cdot 0{,}75=84{,}53$

$r=0{,}115$

გვაქვს: 11,5%.

3 ვიყენებთ ფორმულას: prt, რადგან პროცენტი ყოველდღიურია, ამიტომ t უნდა გამოვსახოთ დღეებში: $t=60$ დღ.

მაშასადამე, $prt\ =9000\cdot 0{,}000(3)\cdot 60=180$ (ლარი)

4 გადასახდელი თანხაა prt, სადაც $p=500;\ r=0{,}1;\ t=0{,}25$

$prt=500\cdot 0{,}1\cdot 0{,}25=12{,}50$ (ლარი)

ვანომ აიღო: $500-12{,}5=487{,}50$ (ლარი)

ახლა ვიპოვოთ ფაქტობრივი წლიური დარიცხვის პროცენტი:

აქ $prt=12{,}5,\ p=487{,}50,\ t=0{,}25,\ r=?$

$12{,}50=487{,}50\cdot r\cdot 0{,}25,\ 12{,}50=121{,}875\cdot r$

$r\approx 0{,}1026.$

ამრიგად, წლიური დარიცხვის პროცენტი არის $10{,}26\approx 10{,}3\%$, რაც მეტია 10%-ზე.

5* ვიპოვოთ დღეების რიცხვი 3 მარტიდან 2 აპრილამდე. პირველი გადახდის მომენტისთვის გასულია 30 დღე; მოცემულობის თანახმად,

$$p=500,\ r=0{,}16,\ t=\frac{30}{360}=\frac{1}{12};$$

მაშასადამე,

$$prt=500\cdot 0{,}16\cdot\frac{1}{12}\ \approx\ 6{,}67 \text{ (ლარი)}$$

2 აპრილს 200 ლარის შეტანის შემდეგ დარჩენილი ვალი იქნება:

$$500-(200-6{,}67)=306{,}67 \text{ (ლარი)}$$

ბ) 2 აპრილიდან 10 მაისამდე დღეების რიცხვი არის 38.

10 მაისისთვის გვაქვს:

$$prt=306{,}67\cdot 0{,}16\cdot\frac{38}{360}\approx 5{,}18 \text{ (ლარი)}$$

დარჩენილი თანხა იქნება:

$$306{,}67-(150-5{,}18)\approx 161{,}85 \text{ ლარი}$$

გ) ვადის ბოლომდე დარჩა 22 დღე, რადგან

$$90-(30+38)=22 \text{ (დღე)}$$

$$prt=161{,}85\cdot 0{,}16\cdot\frac{22}{360}\approx 1{,}58 \text{ (ლარი)}$$

მაშასადამე, გადასახდელია $(161{,}85+1{,}58)$ ლარი$=163{,}43$ ლარი.

6 თუ თანხა არის p, წლიური საპროცენტო განაკვეთი — 0,2, მაშინ 4 წელიწადში დაგროვდება: $p+prt=p(1+0{,}2\cdot 4)=1{,}8p$.

თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთი იქნება 0,4, მაშინ $p+prt=p(1+0{,}4\cdot 4)=2{,}6p$.

$$\frac{2,6p}{1,8p} \approx 1,44.$$

p-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის, დაგროვილი თანხა მიახლოებით 1,44-ჯერ იზრდება.

7 აქ უნდა გამოვიყენოთ რთული პროცენტის დარიცხვის ფორმულა:

$$p(1+r)^t,\ p=650,\ t=3,\ r=0,08$$

$$p(1+r)^t \approx 818,81 \text{ (ლარი)}$$

8 ამ ამოცანაში გვაქვს: $p=1500,\ r=0,125,\ t=0,5$

$$rt=0,125\cdot 0,5=0,0625$$

$$p(1+rt)=1500\cdot 1,0625=1593,75 \text{ (ლარი)}$$

9 მარტივი პროცენტის დარიცხვის წესის თანახმად, გვაქვს:

$$p(1+rt)=3000(1+0,15\cdot 1)=3450 \text{ (ლარი)}$$

რთული პროცენტის დარიცხვის წესის შესაბამისად, ვიყენებთ ფორმულას: $p(1+\frac{r}{n})^{nt}$. აქ $n=2,\ t=1,\ r=0,12,\ p=3000$. მაშასადამე,

$$p(1+\frac{r}{n})^{nt}=3000(1+0,06)^2\approx 3370,8.$$

ამრიგად, პირველ შემთხვევაში დაერიცხება 450 ლარი, მეორე შემთხვევაში 370,8 ლარი.

$$370,8<450.$$

10 ვიყენებთ ფორმულას

$$p(1+\frac{r}{n})^{nt},\ \text{სადაც } p=650,\ r=0,08,\ n=2,\ t=3.$$

მოსწავლეები იყენებენ კალკულატორს და პოულობენ გასახულების მნიშვნელობას.

11 აქ გვაქვს:

$$15000=p(1+\frac{0,085}{4})^{20}$$

$$p=\frac{15000}{(1,02125)^{20}}.$$

ზოგიერთი კალკულატორით სარგებლობისას, ხარისხის გამოთვლისას მოგვიწევს რიცხვის თავის თავზე 19-ჯერ გამრავლება; თუმცა შეიძლება გამოვიყენოთ ღილაკი $\boxed{y^x}$.

1,02125 $\boxed{y^x}$ 20 $\boxed{=}$ 1,5227948

საბოლოოდ, მივიღებთ:

$$p=9850,31 \text{ (ლარი)}.$$

12 ამ ამოცანაში ვიყენებთ ფორმულას:

$$S=p(1+\frac{r}{n})^{nt};$$

ა) $p=4500;\ n=4;\ t=4;\ r=0,12;$

ბ) $p=200;\ r=0,06;\ t=2;$

გ) $p=200,\ r=0,12,\ t=2,\ n=4;$

დ) $p=4500,\ t=3,\ r=0,12,\ n=360.$

13 1 ლარიდან მიიღება:

$$1\cdot(1+\frac{0,065}{4})^{4\cdot 1}\approx 1,067.$$

ეს კი 1 ლარზე მეტია ≈ 6,7%-ით.

საშინაო დავალების ამოცანები კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია; მაგალითად, 1-4 ამოცანებში ვიყენებთ ფორმულას: $S=p(1+rt)$, სადაც p საწყისი თანხაა, r — დარიცხული პროცენტი, რომელიც ათწილადით უნდა იყოს გამოსახული, t — პერიოდი.

ამასთანვე, t და r „შეთანხმებული სიდიდეები" უნდა იყოს, თუ r თვიური პროცენტია, მაშინ t თვეების რიცხვს მიუთითებს; თუ t წლების რაოდენობას მიუთითებს, მაშინ r უნდა იყოს წლიური პროცენტული განაკვეთი.

3 ამოცანის პირობის თანახმად, $30=pr\cdot\frac{1}{2}$, სადაც $p=300$, $\frac{r}{2}=0{,}1$; $r=0{,}2$, წლიური მარტივი პროცენტი არის 20%.

4 3 მარტიდან 3 მაისამდე პერიოდი შეიძლება მივიჩნიოთ $\frac{1}{6}$ წელი.

$$300\cdot 0{,}12\cdot\frac{1}{6}=6 \text{ (ლარი)}$$

5 ა) გადასახდელ თანხას ვპოულობთ გამოსახულებით: prt, აქ $p=5500$, $r=0{,}18$, $t=\frac{1}{6}$;

$$prt=5500\cdot\frac{0{,}18}{6}=165 \text{ (ლარი).}$$

ბ) ვანომ აიღო: $5500-165=5335$ (ლარი)

გ) ვიყენებთ ფორმულას:

$$165=5335\cdot r\cdot\frac{1}{6}$$

$$r=\frac{990}{5335}\approx 0{,}186$$

ფაქტობრივად დარიცხული პროცენტი არის მიახლოებით 18,6%.

6 უნდა ვიპოვოთ სხვაობა: $p\cdot(1+\frac{r_2}{4})^{4\cdot 2}-p(1+r_1t_1)$,

აქ $t_1=2$, $r_1=0{,}18$

$r_2=0{,}16$, $p=10000$.

$10000(1{,}04^8-1{,}36)=85{,}69$.

85,69 ლარით მეტია რთული დარიცხვის წესით მიღებული თანხა.

7-8 ამ ამოცანებში ვიყენებთ რთული პროცენტის დარიცხვის ფორმულას. მაგალითად, 8-ში $p=1000$; $r=0{,}12$; $t=5$; $n=4$; შესაბამისად, გვაქვს

$$p(1+\frac{r}{n})^{nt}=1000\cdot(1+\frac{0{,}12}{4})^{5\cdot 4}$$

ანალოგიური გამოთვლები, კალკულატორის გამოყენებით, კლასში გვაქვს ჩატარებული.

9-10 ამოცანებში ვიყენებთ რთული პროცენტის დარიცხვის ფორმულას.

11 ამ ამოცანაში ვპოულობთ 1 ლარიდან მიღებულ თანხას და ვადარებთ 1 ლარს. ეს ამოცანა კლასში ამოხსნილი 13 ამოცანის ანალოგიურია.

12 ვიყენებთ ფორმულას: $S=p(1+\frac{r}{n})^{nt}$; მოსწავლემ სწორად უნდა განსაზღვროს ამ ფორმულაში შემავალი ცვლადების მნიშვნელობები.

მაგალითად, დ) შემთხვევაში, გვაქვს: $p=4500$, $n=4$, $r=0{,}12$, $t=4$.

ვ) შემთხვევაში, $p=2000$, $t=2$, $r=0{,}06$; $n=12$ (დარიცხვა წელიწადში 12-ჯერ ხდება).

პროექტის შესრულება მოცემული მითითებების გამოყენებით მიმდინარეობს. სესხის გადასახადის გამოსათვლელი პროგრამის უკეთ გასააზრებლად, მოსწავლეებს ვუთითებთ შესაბამის ვებ-გვერდს, სადაც დეტალურად არის აღწერილი „ექსელის“ მეშვეობით საბანკო სესხის გადასახადის გამოთვლის პროგრამა. ამ პროგრამის გაცნობის შემდეგ მოსწავლე შეძლებს მითითებული ამოცანის ამოხსნის აღწერას.

მასწავლებელმა ეს საკითხები შეიძლება გამოიყენოს საბანკო ურთიერთობების უკეთ შესწავლის მიზნით.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

აღნიშნული რუბრიკით წარმოდგენილი დავალების მიზანია, მოსწავლემ შეაფასოს საკუთარი ცოდნა მე-3 თავში განხილულ სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული საკითხების ათვისებაში და მიმართოს მასწავლებელს დამატებითი კონსულტაციებისთვის. ძირითადი სამიზნე ცნება, რომელსაც III თავის საკითხები უკავშირდება, რიცხვები, რიცხვებზე მოქმდებები, სიდიდეების რიცხვების საშუალებით წარმოდგენა და სიდიდეებს შორის კავშირებია. დიდი ყურადღება ექცევა რიცხვებისა და სიდიდეების გამოყენებებს ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერებებში. ყურადღება გამახვილებულია ზუსტი ან მიახლოებითი გამოთვლების შესრულებისას მათემატიკური მეთოდების ან ტექნოლოგიების გამოყენებებზე.

მასწავლებელი იყენებს თვითშეფასების ტესტის შესრულების შედეგებს და წარმართავს დამატებით მუშაობას შემჩნეული ხარვეზების აღმოსაფხვრელად.

1 ამ ამოცანის საშუალებით, მოსწავლე ამოწმებს საკუთარ ცოდნას ე. წ. რთული სიდიდეების ერთეულებს შორის კავშირის შესახებ: სასურველია, ორივე სიჩქარე ერთი და იმავე ერთეულებით წარმოვადგინოთ; მაგალითად,

32 მ/წმ$=32\cdot3600:1000$ კმ/სთ$=(32\cdot3{,}6)$ კმ/სთ $=$ 115,2 კმ/სთ $>$ 115 კმ/სთ.

2 ალუბლის წვენი არის: $16\cdot\frac{3}{4}=12$ (ლ)

ვიყენებთ პროპორციას: $16+x$ – 100%
12 – 60% | $x=4$

შეგვეძლო დაგვეწერა: $4+x$ – 40%
12 – 60%

3 ა) მოსწავლეს უნდა შეეძლოს პირობის ასე ჩაწერა:

15 მ — 4 მუშა — 6 სთ
12 მ — 4 მუშა — x

თუმცა, შეიძლება ზეპირად იმსჯელონ.

12 მეტრის თხრილის გასათხრელად იმდენჯერ ნაკლები დროა საჭირო, რამდენჯერაც 15 მეტია 12-ზე; $\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$;

$$6:\frac{5}{4}=4\frac{4}{5}\text{ სთ}=4\text{ სთ }48\text{ წთ}.$$

ბ) ამ შემთხვევაშიც პირდაპირპრორციულ სიდიდეებთან გვაქვს საქმე: $15\cdot\frac{8}{6}=20$ (მ)

გ) 15 მ — 4 მუშა — 6 სთ

x — 3 მუშა — 16 სთ

$x=15\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{16}{6}=30$ (მ)

ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება „ერთეულოვანი ფარდობებით“ ისარგებლოს:

15 მ — 4 მუშა — 6 სთ

$\frac{15}{4\cdot6}$ — 1 მუშა — 1 სთ

3 მუშა — 16 სთ — $\frac{15}{4\cdot6}\cdot3\cdot16=30$ (მ).

4 ვაშლი — 1 ნაწილი

მანდარინი — 2 ნაწილი

კარტოფილი — 6 ნაწილი

1,8 ტ — 9 ნაწილი

x — 2 ნაწილი

$\frac{1{,}8}{9}\cdot2=0{,}4$ (ტ)

მოსწავლემ შეიძლება ცვლადები შემოიტანოს; გავარჩიოთ შემოთავაზებული ამოხსნაც.

5 დრო და სიჩქარეები უკუპრორპორციული სიდიდეებია ფიქსირებული მანძილის დროს.

მსუბუქის სიჩქარის შეფარდება ავტობუსის სიჩქარესთან არის 4:1,5=8:3.

S კმ მანძილს ავტობუსი იმავე დროში გადის, რაშიც ($S+150$) კმ მანძილს — მსუბუქი.

$\frac{S+150}{8}=\frac{S}{3}$; $8S=3(S+150)$, საიდანაც $S=90$ კმ.

6 უნდა ვიპოვოთ — სად უფრო იაფია მაცივარი, შევადაროთ 1250·0,85 და 1180·0,88.

7 ა) 60 თეთრი დამატებული ღირებულების 20%-ია; ე. ი. ფასზე დამატებული ღირებულება არის: $60:\frac{1}{5}=300$ (თეთრი) = 3 (ლარი).

ბ) პირობის თანახმად, 3 არის x-ის 25%; $\frac{3}{x}=\frac{1}{4}$ (x — ძველი ფასი); $x=12$ (ლარი).

გ) $60-60\cdot\frac{1}{5}=60-12=48$ (ლარი).

8 $p(1+rt)$, $p=5000$, $r=0{,}11$, $t=10$

$5000(1+1{,}1)=5000\cdot2{,}1=10500$ (ლარი)

9 $p=20000$; $r=0{,}12$; $n=4$; $t=4$. გამოვიყენოთ ფორმულა: $p(1+\frac{r}{n})^{nt}$.

10 თუ პირველ შემთხვევაში, p ლარის დოლარში გადაყვანის შემდეგ გვაქვს p_1 დოლარი, 3 წლის შემდეგ (მარტივი დარიცხვის პროცენტის შესაბამისად), გვექნება:

$p_1(1+0{,}03\cdot3)$ დოლარი (1)

მეორე შემთხვევაში, ლარებში გვექნება:

$p(1+0{,}12\cdot3)$ ლარი.

მაგრამ ახლა p ლარი იცვლება $p_1(1-\frac{1}{10})^3$ დოლარში.

ე. ი. გვექნება:

$p_1(1-\frac{1}{10})^3\ (1+0{,}12\cdot3)$ დოლარი (2)

მაშასადამე, უნდა შევადაროთ (1) და (2) რიცხვები.

III თავის დამატებითი ამოცანები

დამატებითი ამოცანები შეიცავს მასალას, რომელიც III თავის სამიზნე ცნებებსა და მკვიდრ წარმოდგენებთან არის დაკავშირებული; ძირითადი აქცენტი მათემატიკის გამოყენებებზეა გადატანილი; რიცხვების ჩაწერის სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმის გამოყენება (მათ შორის — პროცენტის სახით) გვეხმარება ამოვხსნათ საყოფაცხოვრებო საქმიანობიდან და სხვა მეცნიერებებიდან მომდინარე ამოცანები; გამოვიყენოთ მათემატიკური კანონზომიერებების აღმოჩენის და ჩაწერის ხერხები შენადნობებზე, ხსნარებზე, მასშტაბზე, სიდიდეების ერთეულების შემცველი ამოცანების ამოხსნისას.

1 „ერთეულოვანი ფარდობის“ პოვნის შემდეგ ამოცანა ადვილად იხსნება: 1 $მ^2$ ფართობის იატაკის შეღებვას სჭირდება $\frac{1,8}{5}=0,36$ (კგ) საღებავი.

46,8 $მ^2$-ს დასჭირდება 16,848 კგ

$$16,848:2,5\approx 6,7.$$

დაგვჭირდება, სულ მცირე, 7 ქილა.

2 მოსწავლემ უნდა შეძლოს ამ ამოცანის სწრაფად ამოხსნა: 120 ნერგი 3 ნაწილია, 1 ნაწილი — 40 ნერგი

$$4\cdot 40=160 \text{ (ნერგი)}.$$

კიდევ ერთხელ გავამახვილოთ ყურადღება მწვანე საფარისა და გახარებული ხეების მნიშვნელობაზე.

3 ვიმეორებთ სიჩქარის ერთეულებს შორის დამოკიდებულებებს; მაგალითად, 1 მ/წმ=3,6 კმ/სთ.

4 შეიძლება ერთეულოვანი ფარდობა გამოვიყენოთ; შეიძლება პროპორცია დავწეროთ:

$$12 \;—\; 300$$
$$9 \;—\; x$$
$$x=\frac{2700}{12}=225.$$

აქ საინტერესო შემთხვევასთან გვაქვს საქმე, ოქროს მასა გრამებითაა გამოსახული; არ იყო აუცილებელი კილოგრამებით გამოსახვა; გადაყვანის შემთხვევაში პასუხი კილოგრამებში იქნებოდა გამოსახული. არც შენადნობის მასის გრამებში გამოსახვაა აუცილებელი.

5 12 მუშა — 8 დღე

x მუშა — 6 დღე

აქ უკუპროპორციული სიდიდეები გვაქვს:

$$6x=96,\; x=16.$$

უნდა დავამატოთ 4 მუშა.

6 აქ პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია; ამოცანა შეიძლება ზეპირად ამოვხსნათ:

$$46<28\cdot\frac{5}{3}<47.$$

5 საათში მოასწრებს 46 დეტალის დამზადებას.

7 „ერთეულოვანი ფარდობები“ ვიპოვოთ:

I 1 საათში — $\frac{540}{36}=15$ გვერდს

II 1 საათში $\frac{540}{45}=12$ გვერდს

ორივე 1 საათში — 27 გვერდს

ა) $540:27=20$ (სთ).

ბ) $900-0,1\cdot900=810$

810 უნდა განაწილდეს 15-ისა და 12-ის პროპორციულად, ანუ 5-ისა და 4-ის პროპორციულად: $\frac{810}{9}\cdot5=450$ (ლარი), $\frac{810}{9}\cdot4=360$ (ლარი).

8 I-მა მაღაზიამ ფეხსაცმლის ფასი გაზარდა 20%-ით, ანუ 1,2-ჯერ;

II მაღაზიამ: გაზარდა $1,1^2=1,21$-ჯერ.

9 პროცენტული ზრდა: $\frac{1,5}{12}\cdot100\%=12,5\%$.

10 ა) $200+200\cdot0,2=240$ (ლარი)

ბ) $240(1-r)=200$, $1-r=\frac{5}{6}$, $r=\frac{1}{6}$,

$$\frac{1}{6}=\frac{100\%}{6}=16\frac{2}{3}\%.$$

11 უნდა შევადაროთ რიცხვები:

$$\frac{276-240}{240}\cdot100\% \text{ და } \frac{261-225}{225}\cdot100\%.$$

12 ა) $prt=288$, $r=0,12$, $t=5$, $p=?$

$$p=\frac{288}{0,6}=480 \text{ (ლარი)}$$

ბ) ყოველთვე ერიცხება:

$$r=\frac{0,12}{12}=0,01;$$

$prt=3600\cdot0,01\cdot4=144$ (ლარი).

13 უნდა ვიპოვოთ რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა: $1200(1+0,06)^3$

მიიღება: მიახლოებით, 1429,22 ლარი.

14 თვიური დარიცხვა 0,01.

$t=16$ თვე

$2400(1+0,01)^{16}=2814,19$ (ლარი)

15 რუკაზე 1 სმ-ის შესაბამისია რეალური 600 მ=60 000 სმ.

მასშტაბი: 1:60 000.

16 3 (სმ) — 2100000 (სმ) = 21 (კმ).

17 92700 კმ²=92700 კმ·კმ=$92700\cdot10^5$ სმ$\cdot10^5$ სმ.

რუკაზე ფართობი იქნება $92700\cdot\frac{10^5}{15\cdot10^5}\cdot\frac{10^5}{15\cdot10^5}=412$ სმ².

18 პირობით, $\frac{3}{4}a=\frac{30}{100}b$, საიდანაც $\frac{a}{b}=\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\cdot 100\%=40\%$.

19 ვთქვათ, 60%-იანი ხსნარი იყო a გ, x% — $3a$ გ. პირობით,

$\frac{60}{100}a+\frac{x}{100}\cdot 3a=\frac{36}{100}\cdot 4a$; $60+3x=144$; $20+x=48$; $x=28$.

20 სკოლაში არის $360\cdot 0{,}35=126$ გოგონა. სპორტზე დადის $360\cdot 0{,}60=216$ მოსწავლე, არ დადის — $360-216=144$ მოსწავლე. აქედან $144\cdot 0{,}25=36$ გოგონაა. 126-დან 36 გოგონა არ დადის სპორტზე, სპორტზე დადის $126-36=90$ გოგონა.

21 $1\,ნმ=10^{-9}\,მ=10^{-7}\,სმ$; $200\,ნმ=2\cdot 10^{-5}\,სმ$; $2\cdot 10^{-5}\cdot 5\cdot 10^{4}=1\,სმ$.

22 6 სმ — 4 მმ
60 მმ — 4 მმ
15 მმ — 1 მმ პასუხი: 15:1

23 ვთქვათ, მართკუთხედის მცირე გვერდი x სმ-ია. მაშინ მეორე გვერდია $(x+1)$ სმ, ფართობი — $x(x+1)$ სმ^2. რადგან მომდევნო ნატურალური რიცხვები თანამარტივია, ამიტომ მათი ნამრავლი მაშინ შეიძლება იყოს ნატურალური რიცხვის კვადრატი, როცა x და $(x+1)$ რიცხვებიც კვადრატებია. ეს კი შეუძლებელია. მართლაც, თუ $x=m^2$ და $x+1=m^2+1=k^2$, ტოლობებიდან მივიღებდით $k^2-m^2=1$, $(k-m)(k+m)=1$, მაშინ ნატურალური k და m რიცხვების ჯამი $k+m>1$. ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა, როცა $x+1$ არის ნატურალური რიცხვის კვადრატი.

პასუხი: შეუძლებელია.

შემაჯამებელი წერა №3

თემატური ბლოკი: რიცხვები და მოქმედებები.

სამიზნე ცნებები: სიდიდეები, რიცხვები, რიცხვითი გამოთვლები.

მკვიდრი წარმოდგენები: რიცხვები შეიძლება ჩავწერთო სხვადასხვა სახით; მათ შორის — პროცენტის სახითაც. რიცხვების სხვადასხვა სახით ჩაწერა გვეხმარება, წარმოვადგინოთ სიდიდეები შესაბამისი მახასიათებლებით, გამოვიყენოთ რიცხვები საყოფაცხოვრებო და მეცნიერებებიდან მომდინარე პრობლემების გადასაჭრელად, გამოვიყენოთ ფარდობა, პროპორცია, პროცენტის დარიცხვის წესები მოსწავლეთა ფინანსური წიგნიერების დასახვეწად.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რეალურ ცხოვრებაში სხვადასხვა საკვლევი, სამეცნიერო საკითხისა, თუ ყოფითი მოვლენის განხილვისას სიდიდეების წარმოდგენა (მათ შორის, ფულის ერთეულების) შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით; რაოდენობის ჩაწერა, რაოდენობის ცვლილების აღწერა, სიდიდეებისა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდობის გამოთვლა; რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებებისა და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით (მათ. საშ. 1).

ამოცანების ნიმუშები

შეარჩიეთ სწორი პასუხი:

1) ერთი ავტომობილი ყოველ წუთში 400 მ-ით მეტს გადის, ვიდრე მეორე. რამდენი კმ/სთ-ით მეტია პირველის სიჩქარე მეორის სიჩქარეზე?

ა) 0,4 კმ/სთ-ით; ბ) 4 კმ/სთ-ით; გ) 24 კმ/სთ-ით; დ) 40 კმ/სთ-ით.

2) ორ ქალაქს შორის მანძილი 72 კმ-ია, ხოლო რუკაზე მათ შორის მანძილი 18 სმ-ია. როგორია ამ რუკის მასშტაბი?

ა) 1:100000; ბ) 1:200000; გ) 1:180000; დ) 1:400000.

3) 20 მკერავი 4 საათში 20 კაბას კერავს. რამდენ კაბას შეკერავს 8 მკერავი 8 საათში? (ჩათვალეთ, რომ მკერავების შრომის ნაყოფიერება ერთნაირია და ერთნაირ კაბებს კერავენ).

ა) 4; ბ) 8; გ) 12; დ) 16.

4) ბანკში ანაბარს სარგებელი ერიცხება ყოველწლიური რთული 5 %-ით. შეტანილ ანაბარზე რამდენჯერ მეტი თანხა ექნება კლიენტს 4 წლის შემდეგ?

ა) 5^4-ჯერ; ბ) $0,05^4$-ჯერ;

გ) $1,05^4$-ჯერ; დ) დამოკიდებულია ანაბრის რაოდენობაზე.

5) 1200 ლარი ხელფასიდან ნატომ 150 ლარი კომუნალურ გადასახადებში გადაიხადა. ხელფასის რამდენი პროცენტი გადაიხადა ნატომ კომუნალურ გადასახადებში?

ა) 16%; ბ) 15%; გ) 12,5%; დ) 9,6%.

6) სკოლის 1080 მოსწავლიდან 75% გოგონაა. ბიჭების 30% დადის სპორტის წრეზე. რამდენი ბიჭი დადის სპორტის წრეზე?

ა) 360; ბ) 36; გ) 81; დ) 54.

ამოხსენით ამოცანები:

7) სპილენძისა და თუთიის შენადნობში მათი მასები, შესაბამისად, ისე შეეფარდება, როგორც 3:7. რამდენი კგ სპილენძი უნდა დავუმატოთ 24 კგ ასეთ შენადნობს, რომ მივიღოთ ახალი შენადნობი, რომელშიც სპილენძისა და თუთიის მასების შეფარდება იქნება 11:14?

8) მართკუთხედის სიგრძე შეამცირეს 20%-ით, სიგანე გაზარდეს 20%-ით და მიიღეს კვადრატი, რომლის პერიმეტრი 192 სმ-ია. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი.

პასუხები:

1	2	3	4	5	6
გ	დ	დ	გ	გ	გ

7) 6 კგ. 8) 200 სმ.

მითითებები:

1) ყოველ წუთში 400 მეტრით მეტს გადის, 60 წუთში (1 სთ-ში) გაივლის $60 \cdot 400 = 24000$ მ-ით, ანუ 24 კმ-ით მეტს — სიჩქარე 24 კმ/სთ-ით მეტია.

(2) 1 სმ-ის შესაბამისია $\frac{72}{18}$ კმ$=4$ კმ$=400000$ სმ. მასშტაბია 1:400000.

(3) შეიძლება პროპორციის თვისების გამოყენება
20 მკერავი 4 სთ 20 კაბა
1 მკერავი 4 სთ 1 კაბა
8 მკერავი 4 სთ 8 კაბა
8 მკერავი 8 სთ 16 კაბა

(4) შეტანილ p ლარზე 4 წლის შემდეგ ექნება $p(1+0{,}05)^4$ ლარი. ანუ $1{,}05^4$-ჯერ მეტი.

(5) $\frac{150}{1200}\cdot100\%=12{,}5\%$. (6) $1080\cdot0{,}25\cdot0{,}30=81$.

(7) შენადნობში სპილენძის რაოდენობაა $24\cdot\frac{3}{10}=7{,}2$ კგ. თუ დავამატებთ x კგ სპილენძს, პირობით გვექნება $7{,}2+x=(24+x)\cdot\frac{11}{25}$, საიდანაც $x=6$ (კგ).

(8) კვადრატის გვერდია $\frac{192}{4}=48$ სმ. ვთქვათ, მართკუთხედის გვერდები იყო x და y, მაშინ კვადრატის გვერდი იქნება $x\cdot1{,}2=y\cdot0{,}8=48$; $x=40$ სმ, $y=60$ სმ. მართკუთხედის პერიმეტრი $2(40+60)=200$ (სმ).

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა:

(1)-(6) ამოცანებიდან თითოეულის სწორი პასუხი ფასდება 1 ქულით.

(7) ამოცანაში სპილენძის რაოდენობის დადგენა შეიძლება შევაფასოთ 0,5 ქულით; პირობის მიხედვით განტოლების შედგენა — კიდევ 1 ქულით, პასუხის დადგენა — 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

(8) კვადრატის გვერდის დადგენა შეიძლება შევაფასოთ 0,5 ქულით. კვადრატის გვერდის მიხედვით მართკუთხედის ორი მეზობელი გვერდიდან თითოეულის გამოთვლა — 0,5 ქულით, მართკუთხედის პერიმეტრის დადგენა — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

წარმოდგენილი ამოცანების განმსაზღვრელი შეფასებები შეიძლება ვაქციოთ განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტებად. გთავაზობთ ზოგიერთ რეკომანდაციას ამ აქტივობის ჩასატარებლად.

განმავითარებელი შეფასების მაღალ ეფექტურობას განაპირობებს განსახილველი საკითხების მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით მრავალმხრივი და საფუძვლიანი განხილვა. აღსანიშნავია, რომ მოცემული დავალება საყურადღებო გამოყენებითი ასპექტებით გამოირჩევა. კერძოდ, თანამედროვე ახალგაზრდის ცოდნისა და უნარების არსენალში მნიშვნელოვან ადგილს უნდა იკავებდეს რიცხვებით, სიდიდეებით ოპერირება, ყოფასთან დაკავშირებული საკითხების, ფინანსური წიგნიერების ელემენტარული საკითხები.

(1) ამოცანის განხილვისას მიმართეთ კლასს, რა სახის მოძრაობაა აღწერილი პირობაში? რას ნიშნავს, რომ ვთქვათ, მოძრაობის სიჩქარეა a კმ/სთ? რამდენი მეტრით მეტს გაივლიდა პირველი ავტომობილი 60 წუთში, ანუ 1 საათში? ($60\cdot400=24000$ მ$=24$ კმ). ნიშნავს ეს, თუ არა, რომ პირველის სიჩქარე მეორის სიჩქარეზე 24 კმ/სთ-ით არის მეტი?

(2) ამოცანაში საყურადღებო საკითხია დასმული. ეს ცოდნა აქტუალურია მოსწავლისთვის სხვადასხვა საგნის, ან რეალურ ცხოვრებაში წამოჭრილი არაერთი საკითხის გარკვევისას. მიმართეთ კლასს, აღწერონ რუკის მასშტაბის არსი. მაგალითად, რას ნიშნავს, რომ რაიმე რუკის მასშატაბია 1:10000? ვთქვათ, ამ რუკაზე რაიმე ორ წერტილს შორის 1 სმ-ია. რა მანძილი იქნება მათ შესაბამის რეალურ ობიექტებს შორის? მოისმინეთ მათი მოსაზრებები ამოცანაში დასახელებული მონაცემების მიხედვით რუკაზე ორ წერტილს შორის 1 სმ მანძილს რამდენი სმ შეესაბამება რეალურ ობიექტებს შორის? ($\frac{72}{18}\cdot100000$ სმ). დასასრულ, დაასახელონ რუკის მასშტაბი.

(3) ამოცანის განხილვისას მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები პირდაპირპროპორციულ სიდიდეებზე. თუ 20 მკერავი 4 საათში 20 კაბას კერავს, რამდენ კაბას შეკერავდა იმავე დროში 1 მკერავი? (20-ჯერ ნაკლებს — ერთს); 8 მკერავი? (8 კაბას); ეს 8 მკერავი ორჯერ მეტ დროში, ანუ 8 საათში? (ორჯერ მეტ კაბას — 16 კაბას).

შეიძლება ასეთი ჩანაწერები გააკეთოთ:

20 მკერავი — 4 სთ — 20 კაბა;
1 მკერავი — 4 სთ — 1 კაბა;
8 მკერავი — 4 სთ — 8 კაბა;
8 მკერავი — 8 სთ — 16 კაბა.

ან ასე:

20 მკერავი 8 სათში — 40 კაბას;
8 მკერავი 8 საათში — $\frac{8\cdot40}{20}=16.$

(4) მიმართეთ კლასს დაასახელონ ანაბარზე რთული პროცენტის დარიცხვისას n წელიწადში დაგროვილი თანხის ფორმულა $p(1+r)^n$, სადაც p საწყისი თანხაა, r% — წლიური სარგებელი. მოსწავლეები ამ ფორმულის გამოყენებით მიიღებენ $p(1+0{,}05)^4$ ლარს. რამდენჯერ მეტია ეს თანხა საწყის p ლარზე? ($(1+0{,}05)^4$-ჯერ მეტია).

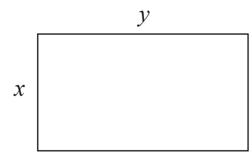
(5) ერთხელ კიდევ ხაზგასმით აღნიშნეთ თანამედროვე ახალგაზრდისთვის პროცენტის ცოდნის დიდი მნიშვნელობა, მისი გამოყენება სხვადასხვა საკითხში. მიმართეთ კლასს, გაიხსენონ რა ფორმულით ჩაიწერება a რიცხვის k პროცენტის მნიშვნელობა. ეს ცოდნა საკმარისია ამოცანის გადასაწყვეტად — 1200-ის რამდენ პრიცენტს შეადგენს 150?

(6) ამოცანა კვლავ პროცენტებს უკავშირდება. მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები ამოხსნის გზების შესახებ. როგორ ვიპოვოთ სკოლაში გოგონების რაოდენობა? შემდეგ — ბიჭების რაოდენობა? იქნებ სჯობს ბიჭების რაოდენობა ასე დავადგნოთ: ისინი კლასის 25%-ს შეადგენენ (100%−75%=25%) და შემდეგ ვიპოვოთ 1080-ის 25%? ამოცანის ამოხსნის დასასრულებლად რა მოქმედებებია შესასრულებელი?

(7) მიმართეთ მოსწავლეებს გამოთქვან მოსაზრებები რაიმე რიცხვის მოცემული პროპორციით დაყოფის შესახებ, ანუ ორ შესაკრებად, რომლებიც შეეფარდება, როგორც 2:3. თუ ეს საკითხი გაირკვა, მაშინ შეეცადეთ ამოცანაში დასახელებულ 24 კგ-იან შენადნობში სპილენძის მასაც იპოვოთ ($\frac{24}{10}\cdot3$კგ$=7{,}2$ კგ). ვთქვათ, ამ შენადნობს დაუმატეთ x კგ სპილენძი. დაასახელეთ ახალ შენადნობში სპილენძის მასა $(7{,}2+x)$ კგ. მეორე მხრივ, ამ მასის ტოლია $(24+x)$ კგ-იანი ახალი შენადნობის $\frac{11}{25}$ ნაწილი. რა განტოლება მიიღება?

$$(24+x)\cdot\frac{11}{25}=7{,}2+x$$

რა სახის განტოლება მივიღეთ? (წრფივი). როგორ ამოვხსნათ ის? ამ ამოცანის ამოხსნის სხვა არაერთი გზა შეიძლება შემოგვთავაზონ მოსწავლეებმა. საჯაროდ განიხილეთ ისინი, შეაფასეთ მათი სისწორე და ამოხსნის გზის სიმარტივე.



8 ამოხსნა შეიძლება მონაცემთა თვალსაჩინო აღწერით დაავალოთ მოსწავლეებს. შემდეგ კი დასახელებული ცვლილებები შევიტანოთ. მოსწავლეებს კვლავ პროცენტის ცოდნა დაეხმარება. კვადრატის გვერდი იქნება $y-\frac{y}{5}=\frac{4}{5}y$, რაც $x+\frac{x}{5}=\frac{6}{5}x$-ის ტოლია. მოსწავლეები გაიხსენებენ პერიმეტრის ცნებას და მიიღებენ $\frac{4}{5}y=48$, $y=60$ სმ; $\frac{6}{5}x=48$, $x=40$ სმ. მართკუთხედის პერიმეტრია $2(40+60)=200$ (სმ).

გირჩევთ თვალი გადაავლოთ ჩვენს რეკომენდაციებს ანალოგიური განმავითარებელი შეფასების ჩატარებისა და შემდგომი აქტივობის შესახებ. თქვენი შემოქმედებითი დამოკიდებულება ამ პროცესის მიმართ უთუოდ წაადგება სასწავლო ვითარებას, მოსწავლეთა ცოდნისა და უნარების გაღრმავებას.

ახლა დავაკონკრეტოთ სოლო ტაქსონმიის ზოგადი პრინციპები (დონეებით წარმოდგენილი) მესამე შემაჯამებელი წერის მიხედვით (იხ. გვ. 14).

პრესტრუქტურული დონე. მოსწავლემ ვერ გაართვა თავი ლოგიკის ცნებების გააზრებას, ლოგიკური ოპერაციების არსი მისთვის გაუგებარია, ვერ ერკვევა ტექსტური ამოცანების შინაარსში. არ შეინიშნება რაციონალური სვლები დავალებათა გადაჭრის.

უნისტრუქტურული დონე. ნაშრომში მარტივი სილოგიზმი სწორადაა გააზრებული, თუმცა ლოგიკური ამოცანების გადაჭრისას ვენის დიაგრამების ჩართვა უჭირს. ლოგიკის შესწავლილი ცნებების მხოლოდ ნაწილია გაცნობიერებული და, შესაბამისად, მხოლოდ მცდელობის დონეზეა სათანადო ამოცანების განხილვა. წარმოდგენილი ალგორითმი გაუმართავია, არ არის შედგენილი ბლოკ-სქემა.

მულტისტრუქტურული დონე. ნაშრომში იკვეთება ავტორის ფრაგმენტული ცოდნა განსახილველი საკითხების. დადგენილია მარტივი სილოგიზმის ჭეშმარიტება. ამოცანათა ამოხსნისას არის ცდა ვენის დიაგრამების სწორი გააზრების. იკვეთება ლოგიკური გამონათქვამების ლოგიკური ოპერაციებით აღწერის არასრული ცოდნა. ალგორითმისა და ბლოკ-სქემის აგება გასახვეწია.

მიმართებითი დონე. მოსწავლე ერკვევა სილოგიზმის არსში, ტექსტური ლოგიკური ამოცანის ამოხსნას სწორად უკავშირებს ვენის დიაგრამებს. გააზრებული აქვს სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი ლოგიკის ცნებები, ოპერაციები გამონათქვამებზე, თუმცა რთული გამონათქვამების აღწერისას არის ხარვეზები; შეუძლია ჭეშმარიტების ცხრილების შედგენა და სათანადო დასკვნების გაკეთება. მის მიერ შედგენილი ალგორითმი გამართულია, თუმცა სათანადო ბლოკ-სქემა დასახვეწია.

გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. ნაშრომი ზუსტად და დახვეწილად წარმოადგენს დასმული ამოცანების გადაჭრის გზებს, გადალახული ეტაპების მითითებით. ყველა ცნება კარგადაა გააზრებული, გამონათქვამის ჭეშმარიტება რამდენიმე გზითაა დასაბუთებული, რითაც ამტკიცებს მათემატიკური აპარატის მაღალ დონეზე ფლობის ტექნიკას. მკაფიოდ და გამართულადაა წარმოდგენილი ალგორითმი და სათანადო ბლოკ-სქემა.

IV თავი

სტატისტიკა და ალბათობა

<table>
<tr><td colspan="4">თემა: სტატისტიკა და ალბათობა.

საათების სავარაუდო რაოდენობა: 22 სთ</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: მონაცემთა მოპოვება და წარმოდგენა; ცენტრალური ტენდენციის საზომები; დაწყვილებული მონაცემები; ფარდობითი სიხშირე და ალბათობა</td></tr>
<tr><td>სამიზნე ცნებები და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</td><td>საკითხები</td><td>საკვანძო შეკითხვები</td><td>კომპლექსური დავალება</td></tr>
<tr><td>მონაცემები; ხდომილობის ალბათობა. მონაცემების უკეთ აღქმისა და გაანალიზების მიზნით, მათი მოწესრიგება და ორგანიზებაა საჭირო; მონაცემების ორი ერთობლიობის განხილვისას მათ შორის შეიძლება სხვადასხვა კავშირი აღმოვაჩინოთ. ხდომილობის სტატისტიკური ალბათობისა და თეორიული ალბათობის შეფასება გვეხმარება პროცესების შედეგების პროგნოზირებაში</td><td>მონაცემები; მონაცემების შეგროვება, ორგანიზირება, წარმოდგენა; ხდომილობის ალბათობა, ალბათობის გამოთვლა; ფარდობითი სიხშირე და ალბათობა</td><td>რაში გვეხმარება მონაცემების სხვადასხვა ხერხით წარმოდგენა. როგორ შევაფასოთ ფარდობითი სიხშირით ხდომილობის ალბათობა?</td><td>მონაცემთა ერთობლიობის ანალიზი</td></tr>
</table>

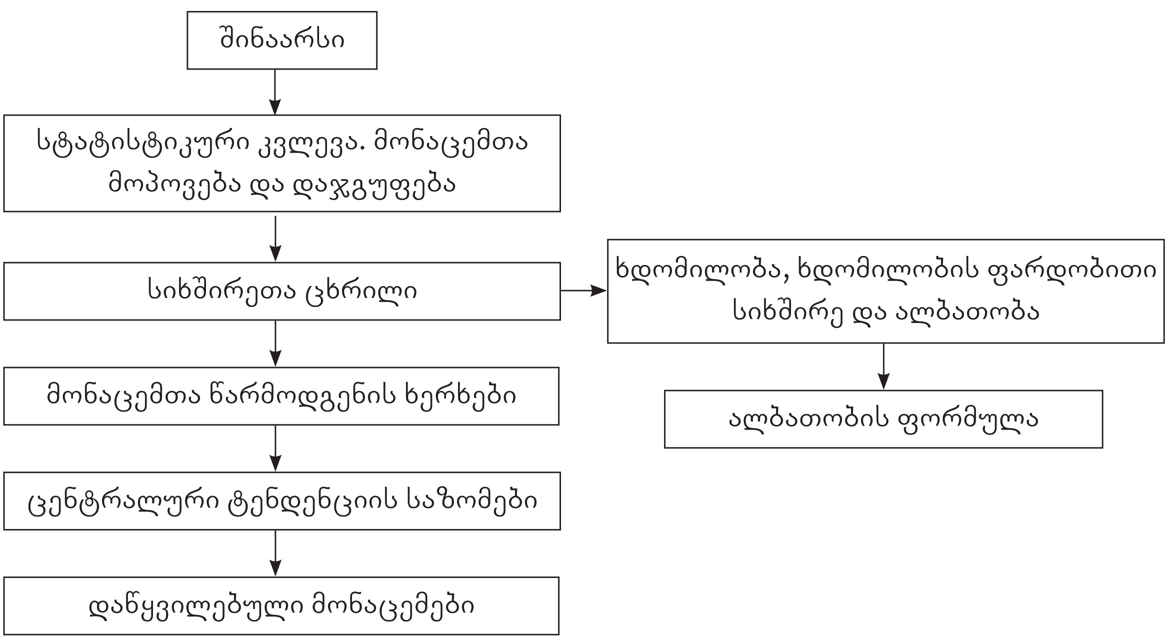
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს საკვლევი თემის განსაზღვრა, კვლევის დაგეგმვა, მონაცემების შეგროვება, მოწესრიგება, დამუშავება, ანალიზი, წარმოდგენა და შემოწმება (მათ. საბ. 6). ხდომილობის სტატისტიკური ალბათობისა და თეორიული ალბათობის შეფასება და ამ გზით პროცესების შედეგების პროგნოზირება (მათ. საბ. 7).

IV თავში წარმოდგენილი მასალა სტატისტიკისა და ალბათობის მნიშვნელოვან სამიზნე ცნებებს — მონაცემებსა და ხდომილობის ალბათობას უკავშირდება. ამ ცნებებთან დაკავშირებული საკითხები — მონაცემთა შეგროვება და ანალიზი, ხდომილობის ალბათობა — სხვა მიმართულებების გათვალისწინებითა და მათემატიკის ერთიანობის სულისკვეთებითაა გადმოცემული. მაგალითად, ხდომილობის ალბათობა სიმრავლეთა თეორიაზე დაყრდნობითა და გამოყენებით არის აღწერილი; ალბათური მოდელები ელემენტარულ ხდომილობათა სასრული სიმრავლის შემთხვევაში აღიწერება.

IV თავს განსაკუთრებული დატვირთვა აქვს — ემსახურება მოსწავლეებში ე. წ. ალბათურ-სტატისტიკური აზროვნების სტილის განვითარებას, ახლებურად აღმოაჩენს მათემატიკის გამოყენებებს სხვადასხვა სფეროში.

სტატისტიკის განხილვა დაწყებითი საფეხურიდან იწყება, გრძელდება საბაზო საფეხურზე და ამ მიმართულებით ცოდნის გაღრმავება და განმტკიცება საშუალო საფეხურზე მიმდინარეობს. სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი მასალით, კომპლექსური დავალებების გამოყენებით, დამოუკიდებელი მუშაობის საშუალებით, მოსწავლეები ეცნობიან სხვადასხვა სფეროში (მაგალითად, მედიცინაში, განათლებაში, სპორტში) სტატისტიკური კვლევის დაგეგმვისა და მოპოვებული მასალის დამუშავების ხერხებს.

IV თავში წარმოდგენილი საკითხები, მკვიდრ წარმოდგენებთან და საკვანძო შეკითხვებთან მათი კავშირების გათვალისწინებით, შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:



4.1. სტატისტიკური კვლევის დაგეგმვა. მონაცემთა მოპოვება

<table>
<tr><td colspan="4">თემატური ბლოკი: სტატისტიკა და ალბათობა
სავარაუდო დრო: 2 სთ</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნებები და სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვები</th><th>დავალებები</th></tr>
<tr><td>მონაცემები: პოპულაცია; შერჩევა. მონაცემი შეიძლება იყოს ფიზიკური გაზომვის შედეგი, გარკვეული გამოკითხვისას მიღებული პასუხები, ან რაიმე ნიშნით კლასიფიკაციის შედეგი.</td><td>პოპულაცია, შერჩევა, სტატისტიკური კვლევა, სტატისტიკური კვლევის დაგეგმვა; მონაცემების შეგროვების ხერხები.</td><td>რა არის პოპულაცია? რა არის შერჩევა?
რა მნიშვნელობა აქვს სტატისტიკურ კვლევას მედიცინაში, განათლებაში, სოფლის მეურნეობაში? რაში გვეხმარება მონაცემების შეგროვება და დამუშავება?</td><td>კლასში: 1-5
საშინაო:
1-6</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს აღწეროს მონაცემების სახეები, მონაცემების შეგროვებისა და დამუშავების სტადიები (მათ. საშ. 6).</td></tr>
</table>

აქტივობები: მონაცემების შესახებ წარმოდგენა მოსწავლეებს წინა წლებში შესწავლილი მასალიდან უნდა ჰქონდეთ; წინარე ცოდნის გააქტიურება, სასურველია, ინტერაქტიული ფორმით ჩავატაროთ; მოსწავლეები იყენებენ საკუთარ გამოცდილებას, წინა კლასებში გავლილ მასალას და პასუხობენ კითხვებზე:

— რა შეიძლება იყოს მონაცემი? არის თუ არა მონაცემი ფიზიკური სიდიდეების მასური წილები, გეომეტრიული ფიგურების კლასიფიკაცია ბრტყელ და სივრცულ ფიგურებად, მოსწავლეთა გამოკითხვის შედეგები რაიმე მოვლენის შეფასებისას, ინფიცირებულთა ყოველდიური აღრიცხვის შედეგები? კიდევ რა მონაცემების აღნიშვნა შეგიძლიათ?

— რა სახის აქტივობების ჩატარებით მიმდინარეობს სტატისტიკური კვლევა?

ამ შემთხვევაშიც, მოსწავლეები საკუთარი გამოცდილებისა და ცოდნის ხარჯზე პასუხობენ ამ კითხვებს. მასწავლებელი ერთვება საუბარში და აზუსტებს სტატისტიკურ კვლევასთან დაკავშირებული სამუშაოების ჩამონათვალს — როგორ შეიძლება კვლევის ზოგადი მიზნებისა და ამოცანების პრაქტიკულ, საკვლევ თემებად გარდაქმნა.

ჩვენი დახმარებით, მოსწავლეები შეძლებენ სტატისტიკური კვლევის ეტაპების გამოყოფას — შემზადება (პრობლემის განსაზღვრა, კვლევის თემის ფორმულირება, კვლევის მიზნებისა და ამოცანების განსაზღვრა), I ეტაპი — კვლევის პროგრამისა და გეგმის შედგენა, II ეტაპი — საჭირო მონაცემების შეგროვება; III ეტაპი — მონაცემების დამუშავება, ანალიზი, შედეგებისა და წინადადებების (ზოგჯერ კი — პროგნოზების) ფორმულირება.

სტატისტიკური კვლევა, უპირველეს ყოვლისა, კვლევის ობიექტების (ე.წ. კვლევის ერთეულების) განსაზღვრით იწყება, რაც მათი მახასიათებლების აღწერას გულისხმობს. საერთო მახასითებლების მქონე ობიექტების სრულ ერთობლიობას პოპულაციად მოვიხსენიებთ. მიმდინარეობს საუბარი, პოპულაციის შესწავლის მიზნით, მისი ნაწილის გამოყოფის მიზანშეწონილობაზე. მოსწავლეებს მოჰყავთ მაგალითები ე.წ. „შერჩევის" შედგენის შესახებ.

მოსწავლეები ახერხებენ მონაცემების შეგროვების მაგალითების დასახელებასაც. ამასთანავე, პოპულაციის ნაცვლად შერჩევის განხილვის აუცილებლობამდე მივყავართ იმ შემთხვევებს, როცა ვერ ხერხდება პოპულაციის სრული გამოკვლევა. თუმცა შერჩევისას გარკვეული წესების დაცვისკენ მიგვითითებს, მაგალითად 1 ამოცანის განხილვა. წარმოდგენილი შერჩევების შესწავლის შემდეგ გამოკითხვის შედეგების გავრცელება არ შეიძლება ქალაქის მოსახლეობაზე თუ: გამოიკითხება რომელიმე უბნის სხვადასხვა სახლში მცხოვრებლები, რომელიმე გზაჯვარედინზე მდგომი ზოგიერთი მოქალაქე — მათი პასუხების გავრცელება მთელი ქალაქის მცხოვრებთა აზრის დონემდე შეიძლება მნიშვნელოვან ცდომილებას შეიცავდეს.

2 მოსწავლეები ეცნობიან ჟურნალის მიერ გამოკითხვის წესებს — როცა კანდიდატის დასახელება ხდება სხვადასხვა ქვეყნის ნაკრები გუნდის მთავარი მწვრთნელისა და კაპიტნის მიერ. მოსწავლემ შეიძლება მიზანშეწონილად ჩათვალოს თითოეული ქვეყნის ნაკრები გუნდის სამი მოთამაშის ჩართვა გამოკითხვაში (მეკარის, მცველის, თავდამსხმელის), რომ უფრო ობიექტური იყოს კანდიდატის შერჩევა — მათ შორის იშიათია მეკარის დასახელება, რაც მოსწავლემ შეიძლება არამიზანშეწონილად მიიჩნიოს.

3 აქ მოსწავლეები გამოთქვამენ სხვადასხვა მოსაზრებებს ექსპერიმენტების ჩატარების შესახებ —ზოგიერთმა შეიძლება, მაგალითად, არჩიოს ფიზიკურ ვარჯიშამდე და ფიზიკური ვარჯიშის შემდეგ ექსპერიმენტის ჩატარების მიზანშეწონილება.

4 მოსწავლემ უნდა შეძლოს დიაგრამის წაკითხვა, კვლევის შედეგების ანალიზი მონაცემების წარმოდგენის მიხედვით. მას მოუწევს ორი სიმრავლის თანაკვეთის ელემენტთა რაოდენობის დადგენა.

5 თითოეული შემთხვევისთვის შეიძლება შეირჩეს მონაცემთა შეგროვების შესაბამისი ხერხი; მაგალითად, ა) ექსპერიმენტის დროს შეიძლება ვისარგებლოთ დაკვირვებით (მაგალითად, საკუთარი ოჯახის ავტომანქანაზე); შეიძლება გამოვიყენოთ გამოკითხვა, ან ინტერნეტში არსებული სათანადო ინფორმაცია.

მოსწავლეს არ გაუჭირდება, გამოთქვას საკუთარი აზრი საშინაო დავალების ამოცანებში დასმულ კითხვებზე. ბევრი საინტერესო მონაცემის შეგროვება შეიძლება მარტივი რიცხვების თვისებების შესახებ ინტერნეტის საძიებო სისტემის გამოყენებით. მაგალითად, ყოველ მოცემულ ნატურალურ რიცხვზე მეტი მარტივი რიცხვის არსებობის შესახებ. შეიძლება მსჯელობა — რატომ ახასიათებს ეს თვისება კარგად მარტივ რიცხვებს? შეიძლება მონაცემების მოძიება ცნობილი მარტივი რიცხვებისა და კომპიუტერის სა-

შუალებით მათი აღმოჩენის შესახებ. ზოგიერთი ამოცანა უბიძგებს მოსწავლეს მდგრადი განვითარების პრინციპების გააზრებისკენ, ცხოვრების ჯანსაღი წესის დამკვიდრებისკენ, კერძოდ, თამბაქოს წევის უარყოფითი გავლენის შესახებ.

მოსწავლემ უნდა შეძლოს კითხვარის მომზადება სხვადასხვა ტიპის გამოკითხვის ჩასატარებლად („ჩემი საყვარელი სპორტის სახეობა“, „ჩემი საყვარელი მწერალი“, „ჩემი საყვარელი მომღერალი“ და ა.შ.). მოსწავლემ უნდა შეძლოს გამოკითხვისას ფოკუს-ჯგუფების სწორად შერჩევის აუცილებლობაზე საუბარი; მაგალითად, არ შეიძლება სარწმუნოების მაღალი ხარისხი ჰქონდეს ინტერნეტის საშუალებით ჩატარებულ გამოკითხვის შედეგებს (ფოკუს-ჯგუფის ამ ხერხით გამოყოფა). 2 ამოცანაში წარმოდგენილი კითხვებისთვის ფოკუს-ჯგუფი ავტომობილის მფლობელები შეიძლება იყოს. თუმცა, გამოკითხვის შედეგები არ გამოდგება მოსახლეობის მყიდველობითი უნარის შესასწავლად. ფოკუს-ჯგუფების შესადგენად შერჩევა შეიძლება იყოს შემთხვევითი, მაგრამ წინასწარ განსაზღვრული წესის მიხედვით — მთისა და ბარის, ქალაქების, სოფლების, სხვადასხვა რეგიონის ჩართვით. ცხადია, ასეთი ფოკუს-ჯგუფის შედგენა და კითხვარის შევსება არ არის ადვილი, მაგრამ დასმული ამოცანის შესასწავლად აუცილებელია.

4.2. მონაცემთა მოპოვება და დაჯგუფება. სიხშირეთა ცხრილი

თემატური ბლოკი: სტატისტიკა და ალბათობა სავარაუდო დრო: 2 სთ.			
სამიზნე ცნებები და სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდ-რი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
მონაცემები, მონაცემთა მოპოვება; სიხშირეთა ცხრილი. მონაცემთა წარმოდგენა სიხშირეთა ცხრილით გვეხმარება მონაცემების შესახებ წარმოდგენების ჩამოყალიბებაში.	მონაცემთა მოპოვება და წარმოდგენა სიხშირეთა ცხრილით; ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.	რა მნიშვნელობა აქვს მონაცემთა წარმოდგენას სიხ-შირეთა და ფარდო-ბით სიხშრეთა ცხ-რილებით? რატომ ვახდენთ მონაცემ-თა დაჯგუფებას?	**კლასში:** 1-5 **საშინაო:** 1-5
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს მონაცემების მოპოვება და მათი სიხშირეთა ცხრილების სახით წარმოდგენა (მათ. საშ. 6).			

აქტივობები: მონაცემთა მოპოვებისა და წარმოდგენის ხერხების შესწავლა საშუალო საფეხურზეც გრძელდება. მოსწავლეები მონაცემთა სიხშირისა და ფარდობითი სიხშირის ცნებებსაც გაეცნენ. ამიტომ წინარე ცოდნის გააქტიურება მათი აქტიური ჩართულობით მიმდინარეობს.

— გაიხსენეთ, რა სახის მონაცემებს იცნობთ.

— რა მათემატიკური ობიექტებით წარმოვადგენთ რაოდენობრივ მონაცემებს?

მოსწავლეების ყურადღება გადაგვაქვს იმ ცხრილზე, რომელიც სახელმძღვანელოშია წარმოდგენილი.

— რა რიცხვებით არის შევსებული სტრიქონები?

— რას ვუწოდებთ მონაცამთა ერთობლიობაში თითოეული მონაცემის სიხშირეს?

— რას ეწოდება ფარდობითი სიხშირე? როგორ ხდება მონაცემთა ფარდობით სიხში-რეთა ცხრილის შევსება?

1 ამოცანის განხილვის მაგალითზე მოსწავლეებთან ერთად ვმსჯელობთ მონაცემ-თა დაჯგუფების მნიშვნელობაზე და შესაბამის სიხშირეთა ცხრილებზე. იმ კომპლექსურ დავალებასთან ერთად, რომელიც სახელმძღვანელოშია წარმოდგენილი, შეიძლება შევ-თავაზოთ მოსწავლეებს დავალება თბილისში მწვანე ნარგავების რაოდენობასთან დაკავ-შირებით; მოიძიონ ინტერნეტის გამოყენებით მონაცემები ქ. თბილისში მწვანე ნარგავების რაოდენობის შესახებ; მაგალითად, 1921 წელს ქალაქ თბილისში მიახლოებით 19 000 000 ხე, 15 000 000 ბუჩქი, 7 000 000 ფოთლოვანი და 12 000 000 წიწვოვანი ნარგავია. შეიძლება მო-ვითხოვოთ ერთ სულ მოსახლეზე მწვანე ნარგავების წილის გამოთვლა, წინა წლებში ამ მაჩვენებლების მოძიება და ცვლილების ტენდენციაზე საუბრის ჩატარება. მოსწავლეები გამოიყენებენ საკუთარ ცოდნას სიხშირეთა ცხრილის შედგენაზე და იმსჯელებენ მწვანე ნარგავების მნიშვნელობაზე, ერთ სულ მოსახლეზე მითითებული წილის ზრდის აუცილებ-ლობაზე.

მთავარი საკვანძო შეკითხვა, რომელზეც პასუხი ამოცანების განხილვის დროს უნდა გაიაზროს მოწავლემ, არის: რა მიზნით ხორციელებდა მონაცემების შეგროვება და შესაბამისი სახით წარმოდგენა? საკითხის შესახებ მონაცემების შეგროვება და შესაბამისი ფორმით წარმოდგენა გვეხმარება განსახილველი საკითხის შესწავლასა და სწორი დასკვნების გამოტანაში. ამასთანავე, ხშირად, მონაცემების დიდი რაოდენობის გამო, მიზანშეწონილია მონაცემების დაჯგუფება და სიხშირეთა ცხრილების შედგენა დაჯგუფებული მონაცემებისთვის, მათი საშუალებით საკითხის ანალიზი და დასკვნების გამოტანა უფრო მოსახერხებელია. სახელმძღვანელოში წარმოდგენილია დაჯგუფების მაგალითები ტექსტში განხილული ამოცანებისთვის. ეს აადვილებს გარკვეული დასკვნების გამოტანას — მაგალითად, ხშირად, მნიშვნელოვანია მოსწავლეთა სიხშირეების ანალიზი „ძალიან კარგი", „კარგი", „საშუალო". „დაბალი" მაჩვენებლების მიხედვით. ასეთი დაჯგუფებები და შესაბამისი სიხშირეების გამოთვლა ეხმარება ეროვნული გამოცდების ორგანიზატორებს შეაფასონ მოცემული დავალების სირთულის ხარისხი.

მოსწავლეები მსჯელობენ დაჯგუფების ინტერვალების სიგრძის შერჩევის შესახებ, გამოთქვამენ საკუთარ მოსაზრებებს ამ ინტერვალის სიგრძის განსაზღვრის შესახებ. ამასთანავე მათ მოუწევთ პროცენტის სახით რიცხვების ჩაწერის წესების გახსენება (ფარდობითი სიხშირის პროცენტული გამოსახვა) და გამოსახვის მოხერხებულობაზე საუბარი. მაგალითად, 1 ამოცანაში პროცენტებით გამოსახვა გვეხმარება გავიაზროთ, რომ შეფასება „მაღალი" დაიმსახურა 12%-მა, „დაბალი" — 24%-მა. ასევე, 2 ამოცანაში უფრო მიზანშეწონილია მსჯელობა ბ) წესის მიხედვით; აქ შედარებით „მაღალი" მაჩვენებლებით (8-10 ქულა) გამოირჩევა მოსწავლეების მიახლოებით 20% (გოგონები — 17,5%, ვაჟები — 20%.).

3 ამოცანის საშუალებით, მოსწავლეებს ვამზადებთ სიხშირეებისა და ფარდობითი სიხშირეების ცნებების გამოყენებისთვის ალბათობის თეორიაში.

5 ამოცანის მიხედვით, კარგად ჩანს, დაჯგუფების გამოყენების მიზანშეწონილება მონაცემთა ერთობლიობის ანალიზისას, მოსწავლე მსჯელობს ინტერვალის შერჩევის მნიშვნელობაზე, — რომელი დაყოფაა უფრო მიზანშეწონილი? ყოველი მოსწავლე წარმოადგენს საკუთარ ვერსიას და ასაბუთებს არჩევანს. მაგალითად, 10 ქულიანი სხვაობის განხილვა შეიძლება უფრო მიზანშეწონილი იყოს.

გ) შემთხვევა კარგად აღწერს თითოეულ მატჩში წარმატებულ, თუ წარუმატებელ გამოსვლას.

ა) შემთხვევა ძალიან დანაწევრებულია და დასკვნების გამოტანა ძნელდება.

პროექტის შესრულებისას, მოსწავლეები ყურადღებას ამახვილებენ გრძელი წინადადებების დიდი რაოდენობის უარყოფით გავლენაზე ტექსტის აღქმადობაზე. მითითებულია მიხეილ ჯავახიშვილი და დავით კლდიაშვილი, ქართული პროზის თვალსაჩინო წარმომადგენლები.

მოსწავლეებისთვის საყურადღებო იქნება სტატისტიკური კვლევის მნიშვნელობის გაცნობა მხატვრულ ნაწარმოებთა დახასიათებისა და ავტორის წერის მანერის დასადგენად. შედგენილია გამოჩენილ ქართველ მწერალთა თხზულებებში ნახმარ სიტყვათა ნუსხა (სიმფონია). მაგალითად, არსებობს „ვეფხისტყაოსნის სიმფონია".

4.3 მონაცემთა წარმოდგენის ფორმები

თემატური ბლოკი: სტატისტიკა და ალბათობა
სავარაუდო დრო — 2 სთ

სამიზნე ცნებები და სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	დავალებები
მონაცემები, მონაცემების წარმოდგენა დიაგრამებით; მონაცემების უკეთ აღქმისა და გაანალიზების მიზნით, მათი მოწესრიგება და თვალსაჩინო წარმოდგენაა საჭირო.	მონაცემთა წარმოდგენის ფორმები; სიხშირეთა ცხრილი, ჰისტოგრამა, პიქტოგრამა, პოლიგონი, წერტილოვანი დიაგრამა, ხაზოვანი დიაგრამა, წრიული დიაგრამა.	რა შემთხვევაში ვიყენებთ წრიულ დიაგრამას? რას გვიჩვენებს ჰისტოგრამაზე თითოეული მართკუთხედის სიმაღლე? რა შემთხვევაშია ხელსაყრელი ჰისტოგრამის გამოყენება?	**კლასში:** 1-11 **საშინაო:** 1-13

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს მონაცემების მოპოვება და, მათი გაანალიზების მიზნით, თვალსაჩინოდ წარმოდგენის სხვადასხვა ხერხის შერჩევა და გამოყენება (მათ. საშ. 6).

აქტივობები: მონაცემების წარმოდგენის ხერხების განხილვა წინა პარაგრაფში დავიწყეთ. ყველა ის ფორმა, რომელიც განიხილება, მოსწავლეებისთვის, ძირითადად ნაცნობია. საშუალო საფეხურის პროგრამის შესაბამისად, მიმდინარეობს მონაცემთა წარმოდგენის ხერხების შესახებ ცოდნის გამეორება და განმტკიცება; დაწვრილებით განიხილება და შეჯამდება ცოდნა ყველა იმ დიაგრამის შესახებ, რომელიც მონაცემთა წარმოდგენისას გამოიყენება — სიხშირეთა ცხრილი, ჰისტოგრამა, წერტილოვანი დიაგრამა, ხაზოვანი დიაგრამა, პოლიგონი, პიქტოგრამა, წრიული დიაგრამა — ყველა ეს ფორმა მაგალითების საშუალებით, დაწვრილებით აღიწერება. მოსწავლეები მსჯელობენ ყოველ კონკრეტულ სიტუაციაში ამა თუ იმ ფორმის გამოყენების მიზანშეწონილების შესახებ; ამის შესახებ სახელმძღვანელოს ტექსტშიც არის საუბარი; მაგალითად, წრიული დიაგრამით კარგად ჩანს გამოსაკვლევ ერთობლიობებს შორის თანაფარდობები; სიხშირეთა ცხრილებთან შედარებით, ჰისტოგრამებით კარგად გამოიყოფა შუალედები, რომლებშიც მონაცემთა მაქსიმალური, ან მინიმალური რაოდენობა იყრის თავს; ხაზოვანი დიაგრამა კარგად უჩვენებს ცვლილების დინამიკას. კლასში დაწვრილებით განვიხილავთ ტექსტში წარმოდგენილ ყველა მაგალითს და ვსაუბრობთ დიაგრამებისთვის დამახასიათებელ ნიშნებზე, იმ ფაქტორებზე, რომელმაც შეიძლება იმოქმედოს მონაცემთა ზრდასა თუ კლებაზე (მაგალითად, ფეხბურთის მატჩზე დამსწრეთა რაოდენობის შემცირება შეიძლება შედეგით უკმაყოფილებამ გამოიწვიოს — პიქტოგრამაზე კარგად ჩანს ეს ტენდენცია). დიაგრამების შედგენისა და ანალიზის შესახებ საუბარი გრძელდება კლასში განსახილველი ამოცანების საშუალებით.

(1) მოსწავლეები იხსენებენ წინა გაკვეთილზე კლასში ამოხსნილ 4.2 პარაგრაფის (4) ამოცანას. სიხშირეთა ცხრილი შეესაბამებოდა 56 ოჯახში ბავშვების რაოდენობის აღრიცხვას, მაგალითად, ყველაზე მეტი ოჯახი ორბავშვიანი აღმოჩნდა, რაც კარგად გამოჩნდება შესაბამის დიაგრამაზე. ამ შემთხვევაში მართკუთხედების ფუძეები ოჯახში ბავშვების რაოდენობებს შეესაბამება, სიმაღლეები — ოჯახების რაოდენობებს. ეს ის შემთხვევაა, როცა მონაცემების დაჯგუფება არ მოხდა; მოსწავლემ უნდა შეძლოს, ამ შემთხვევაშიც შესაბამისი ჰისტოგრამის შედგენა.

(2) ამ შემთხვევაში ოჯახების დაჯგუფება კლასებად ამოცანით არის განსაზღვრული; ჰისტოგრამით ძალიან კარგად ჩანს, რა შემოსავლის მქონე ოჯახების რაოდენობაა შედარებით მეტი, შედარებით ნაკლები.

(3) ამ ამოცანაში მოსწავლეები სიხშირეთა ცხრილის გამოყენებით, შეადგენენ შესაბამის ჰისტოგრამას; კლასებად დაყოფა სიხშირეთა ცხრილითაა წარმოდგენილი, თითოეული კლასი 5 მონაცემისგან შედგება, კლასების რიცხვი შვიდია. მაქსიმალურია 50-54 შუალედის შესაბამისი დავალებების რაოდენობა.

(4) დაჯგუფება მოგვცემს ინტერვალებსა და შესაბამის ცხრილს:

20-21	22-23	24-25	26-27
9	4	9	18

ცხრილიდანაც კარგად ჩანს, რომ მეტი ახალგაზრდა 26-27 ინტერვალს ეკუთვნის; ჰისტოგრამაზეც კარგად გამოჩნდება, რომ შესაბამისი მართკუთხედის სიმაღლე გაცილებით მეტია დანარჩენების სიმაღლეზე.

(5) ამ ამოცანით კიდევ ერთხელ ვეხმიანებით მწვანე ნარგავების მნიშვნელობას ჩვენ ცხოვრებაში; მოსწავლემ უნდა შეძლოს დიაგრამის აღწერა და დასკვნების გამოტანა; ამასთანავე, ამოცანაში დასმულ კითხვებზე პასუხების გასაცემად, საჭიროა არითმეტიკული მოქმედებების განსაზღვრა და ჩატარება.

მაგალითად, პირველ კითხვაზე პასუხის გასაცემად, მოსწავლეს მოუწევს სახლების რაოდენობის (სვეტების სიმაღლეების) დადგენა და შეკრება — $3+7+8+6+4+1=29$.

დიაგრამაზე კარგად ჩანს, ყველაზე მეტი ნარგავი — 12, აღმოჩნდა 1 სახლთან, 11 ნარგავი არც ერთ სახლთან არაა.

მოსწავლემ შეიძლება იმსჯელოს ჰისტოგრამის სხვა სახით შედგენის მიზანშეწონილებაზეც, როცა კარგად გამოჩნდება ნარგავების რაოდენობების ცვლილება სახლების რაოდენობების მიმართ.

ნარგავების როდენობების საპოვნელად, საჭირო იქნება ჯამის გამოთვლა:

$$6\cdot3+7\cdot7+8\cdot8+9\cdot6+10\cdot4+12\cdot1=237$$

(6) დიაგრამები ერთნაირი თვალსაჩინოებით გამოირჩევა, თუმცა, ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება არჩიოს სვეტოვანი დიაგრამის აგება — წერტილების დასმის ნაცვლად მართკუთხედებს ააგებს. ორივეზე კარგად ჩანს, რომ ყველაზე მეტი მოსწავლე მეტროთი სარგებლობს.

მოსწავლეებმა შეიძლება იმსჯელონ — რა შეიძლება იყოს ამის მიზეზი; ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება ეჭვიც შეიტანოს მონაცემებში — თუ მეტროთი 9 მოსწავლე სარგებლობს, მაშასადამე ეს მოსწავლეები სკოლიდან საკმაოდ შორს ცხოვრობენ, მაშინ, როცა 7 მოსწავლე ფეხით მიდის სკოლაში. პასუხიც შეიძლება მოიძებნოს — ზოგიერთ სკოლაში ქალაქის სხვადასხვა უბნის ბავშვები სწავლობენ.

(7) ჰისტოგრამის აგების შემდეგ, კარგად ჩანს, რომ ყველაზე მაღალი მართკუთხედი შეესაბამება 6:00 — 6:30 ინტერვალს.

(8) ასეთი დიაგრამები ხშირად ქვეყნდება განათლების სამინისტროს მიერ; მოსწავლემ უნდა შეძლოს მათი მოძიება და ანალიზი. მოსწავლემ უნდა შეძლოს გამოთვალოს, დიაგრამის მიხედვით, რომ, მაგალითად, მათემატიკაში 500-მა ვერ მიიღო დადებითი შეფასება, მაშასადამე, დადებითი შეფასება მიიღო 9 500-მა აბიტურიენტმა; დადებითი შეფასება ვერ მიუღია მიახლოებით 5,3%-ს.

(9) მოსწავლე შეადგენს სიხშირეთა ცხრილს, ინტერვალების გამოყენებით: $t\leq12$; $12<t\leq12{,}5$; $12{,}5<t\leq13$, $t>13$.

ფარდობით სიხშირეებს გამოსახავს პროცენტებში; მაგალითად, $12<t\leq12{,}5$ ინტერვალის შესაბამისი ფარდობითი სიხშირე ასე გამოითვლება: $\frac{39}{200}\cdot100\%=19{,}5\%$.

ყველაზე მეტი ფარდობითი სიხშირე შეესაბამება ინტერვალს: $t>13$; $\frac{84}{200}\cdot100\%=42\%$; შესაბამისი მართკუთხედიც ყველაზე მაღალია.

სიხშირეთა ცხრილი ასე გამოიყურება:

დრო t (წმ)	$t\leq12$	$12<t\leq12{,}5$	$12{,}5<t\leq13$	$t>13$
სიხშირე	32	39	45	84

წრიული დიაგრამის შესადგენად, 360^0 უნდა დავყოთ 32, 39, 45 და 84-ის პროპორციულ ნაწილებად.

სიხშირე	32	39	45	84	ჯამი=200
ცენტრული კუთხე	$\frac{360^0}{200}\cdot32$	$\frac{360^0}{200}\cdot39$	$\frac{360^0}{200}\cdot45$	$\frac{360^0}{200}\cdot84$	

მაშასადამე, უნდა ვიპოვოთ რიცხვები: $1{,}8^0\cdot31$; $1{,}8^0\cdot39$; $1{,}8^0\cdot45$; $1{,}8^0\cdot84$.

მიიღება მიახლოებითი ზომები: 58^0, 70^0, 81^0, 151^0

(10) მაგალითად, ახალგაზრდა ფეხბურთელთა ვარჯიშზე მონაწილეები ერთმანეთს ეჯიბრებოდნენ 11-მეტრიანების გატანაში. 30 მოსწავლიდან თითოეული ასრულებდა 3 დარტყმას. დიაგრამაზე ნაჩვენებია თითოეულის მიერ გატანილი 11-მეტრიანის რაოდენობები.

მაგალითად, პირველმა ვერცერთი ვერ გაიტანა, მეორემ — 1, მესამემ — 1, მეოთხემ —2. მხოლოდ ერთმა შეძლო სამივეს გატანა. 12-მა შეძლო ორი 11-მეტრიანების გატანა, 16-მა — ერთის, ერთმა — ვერცერთის.

დაჯგუფებაც გატანილი 11-მეტრიანების რაოდენობის მიხედვით შეიძლება, რაც წარმოდგენას მოგვცემს მოვარჯიშეთა გუნდის საერთო მომზადებაზე.

(11) იმ შემთხვევაში, როცა შესარჩევი სექტორების რაოდენობა შეიძლება დიდი იყოს, წრიული დიაგრამის გამოყენება არაა მიზანშეწონილი.

მოცემული დიაგრამის კლასები 2-ელემენტიანია; მათგან შეიძლება შედგეს 4-ელემენტიანი კლასები, მაგრამ 5-ელემენტიანი კლასების შესადგენად ინფორმაცია არ არის საკმარისი.

პროექტის სახით შემოთავაზებული დავალება შეიცავს საქართველოს ეკოლოგიური პრობლემების მრავალ ასპექტს. შეიძლება ყურადღება გავამახვილოთ იმ საკითხებზე,

რომლებიც უფრო აქტუალურია თქვენი რეგიონისთვის — მაგალითად, რადგან ხშირია მეწყერები, წყალდიდობები. ამ შემთხვევების ანალიზი უნდა გაკეთდეს კომპიუტერული სისტემის გამოყენებით. ზღვისპირა ქალქებში შეიძლება გაკეთდეს ანალიზი და დიაგრამებით წარმოდგენა ზღვასთან დაკავშირებული ეკოლოგიური მოვლენების მიხედვით.

პროექტი შეიძლება შესრულდეს რაიმე ერთი მიმართულებით — მაგალითად, ენერგეტიკული კომპლექსის განვითარების ეკოლოგიური საკითხები.

შეიძლება შედგეს დიაგრამები ელექტროენერგიის გამომუშავებაში წყლის, ნახშირის, ნავთობისა და ბუნებრივი აირის წილზე. ყურადღება შეიძლება გამახვილდეს ენერგორესურსების (ნახშირი, გაზი, ნედლი ნავთობი, ჰიდროენერგია, ქარის ენერგია) მოხმარების ოდენობაზე წლების მიხედვით. ამასთანავე, შეიძლება ცალკე გამოიყოს წარმოება და ექსპორტი და წლების მიხედვით მათი მოხმარების ცვლილება. საინტერესოა მიწის ფართობის პროცენტული განაწილება — რა ფართობი მოდის 1 სულ მოსახლეზე, მათგან რამდენია სასოფლო-სამეურნეო სავარგული, რამდენია სახნავი.

საშინაო დავალების ამოცანები განხილული ამოცანების ანალოგიურია და მათი შესრულება უნდა შეძლოს მოსწავლემ.

4.4. ცენტრალური ტენდენციის საზომები სტატისტიკაში

თემატური ბლოკი: სტატისტიკა და ალბათობა
სავარაუდო დრო — 2 სთ

სამიზნე ცნებები და სამიზენე ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	დავალებები
მონაცემები, მონაცემების შეგროვება და ანალიზი. მონაცემთა აღსაწერად დიაგრამებით წარმოდგენების გარდა გამოიყენება ცენტრალური ტენდენციის საზომები; მათი საშუალებით შეიძლება შევადაროთ ერთმანეთს მონაცემთა ერთობლიობები; რიცხვით მონაცემთა გაფანტულობა აღიწერება გაბნევის დიაპაზონით.	ცენტრალური ტენდენციის საზომები: საშუალო, მოდა, მედიანა. გაფანტულობის საზომი: გაბნევის დიაპაზონი.	რა არის რიცხვით მონაცემთა საშუალო, მოდა, მედიანა? რა შემთხვევაში ვირჩევთ საშუალოს, მოდას, მედიანას რიცხვით მონაცემთა დასახასიათებლად? რა არის რიცხვით მონაცემთა გაფანტულობის საზომი? არსებობს თუ არა ყოველთვის მონაცემთა მოდა? შეიძლება თუ არა, რომ არცერთი მონაცემი არ იყოს საშუალოს ტოლი?	**კლასში:** 1-10 **საშინაო:** 1 - 10

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს მონაცემების შეგროვება, გამოიყენოს ცენტრალური ტენდენციისა და გაფანტულობის საზომები მათ აღსაწერად (მათ. საშ. 6).

აქტივობები: მონაცემების აღსაწერად ვსარგებლობდით ისეთი მახასიათებლებით, როგორიცაა სიხშირეთა ცხრილები, დიაგრამები (მაგალითად, ჰისტოგრამა, პოლიგონი). წინარე ცოდნის გააქტიურება მონაცემთა მოპოვების შემდეგ მათ აღსაწერად აღნიშნული გრაფიკული წარმოდგენების გამეორებასთან არის დაკავშირებული. ტექსტში განხილული მაგალითიც ცხრილებით წარმოდგენილი მონაცემების აღწერით იწყება. შესწავლილის განმტკიცების მიზნით, შეიძლება ეს მონაცემები ცხრილისგან განსხვავებული დიაგრამითაც წარმოვადგონოთ.მაგალითად, გამოვიყენოთ ხაზოვანი დიაგრამა, რომლითაც ტემპერატურის ცვლილების ტენდენციებზეც შეიძლება ვისაუბროთ; შეიძლება შესაბამისი ცხრილით წარმოდგენაც და ამ ცხრილის განხილვა. შემდეგ შეიძლება, მივმართოთ მოსწავლეებს:

— თქვენი აზრით, რა ტემპერატურით შეიძლება დახასიათდეს თითოეული თვის პირველი 9 დღე, საშუალოდ რა ტემპერატურა იყო?

კლასში საკითხის განხილვა დაუკავშირდება ტემპერატურათა საშუალოს პოვნას. ამ რიცხვით შეიძლება გარკვეულად დახასიათდეს ტემპერატურა მოცემულ პერიოდში; ამ ორ პერიოდში საშუალო ტემპერატურათა გამოთვლის შემდეგ შეიძლება ვთქვათ — საშუალოდ, რომელ პერიოდში იყო უფრო მაღალი ტემპერატურა.

აქვე შეიძლება შევამოწმოთ, რომ საშუალოდან გადახრების ჯამი ნულის ტოლია; საშუალოს ნამრავლი მონაცემთა რაოდენობაზე მონაცემების ჯამის ტოლია. საშუალოს არსის კარგად გასააზრებლად, შეიძლება მოსწავლეებს ფირმაში მოსამსახურეთა ხელფასების საშუალოზე ვესაუბროთ; თუ ფირმაში ჯამური ხელფასი არის p, მუშაკების რაოდენობა — n, მაშინ საშუალო ხელფასი არის $\frac{P}{n}$ და იგი არის ერთ მუშაკზე მოსული ის ხელფასი, რომელიც ექნებოდა თითოეულს, ხელფასების ჯამის მათზე თანაბრად განაწილებისას.

ცენტრალური ტენდენციის მეორე საზომზეც — მოდაზე საუბარი პრაქტიკული მაგალითების განხილვით მიმდინარეობს; აქ ყურადღებას ვამახვილებთ ტერმინზე — ყოველდღიურ ცხოვრებაში „მოდის“ მნიშვნელობა, შეიძლება ითქვას, ანალოგიურია. ის რაც „მოდაშია“ (ანუ ყველაზე ხშირადაა, გავრცელებულია) შეიძლება სრულად არ აღწერდეს საერთო ტენდენციებს; თუმცა, იძლევა მნიშვნელოვან ინფორმაციას პრაქტიკულ მაგალითებში; მაგალითად, ტანსაცმლისა და ფეხსაცმლის მაღაზიების მფლობელებმა უნდა იცოდნენ აღნიშნული საქონლის ყველაზე გავრცელებული ზომები.

ერთ-ერთი საკვანძო შეკითხვა დაკავშირებულია შემთხვევასთან, როცა მოდა არ არსებობს. საკვანძო შეკითხვაა საშუალოს არ არსებობაც მონაცემთა ერთობლიობაში. მოსწავლეს ორივე შეკითხვაზე უნდა ჰქონდეს პასუხი და შეეძლოს მსჯელობა ორივე შემთხვევასთან დაკავშირებით.

მედიანის შემოტანას წინ უძღვის საშუალოს მგრძნობიარობის აღნიშვნა რომელიმე მონაცემის მიმართ — ერთი მონაცემის უფრო დიდით ან მცირეთი შეცვლა გავლენას ახდენს საშუალოს მნიშვნელობაზე. ამ ცვლილებისადმი უფრო „მდგრადია“ ცენტრალური ტენდენციის ერთ-ერთი საზომი — მედიანა. იგი ხშირად უფრო კარგად აღწერს მონაცემთა ერთობლიობას, ვიდრე საშუალო. მაგალითისთვის ისეთი შემთხვევის განხილვაა საინტერესო, როცა რომელიმე ფირმაში თანამშრომელთა შორის ერთ-ერთის ხელფასი დიდია,

სხვა თანამშრომლების ხელფასებთან შედარებით — როცა ერთ-ერთი მაჩვენებელი „გამორჩეულია“. ეს მომენტი ტექსტში ხაზგასმულია, მაგრამ სასურველია მისი გამაგრება მაგალითით. თუ ფირმის თანამშრომელთა ხელფასები ლარებში გამოისახება რიცხვებით:

2800, 10900, 2600, 3200, 3000, 2600, 2900,

მაშინ, როგორც ვხედავთ, აქ ერთ-ერთს სხვებთან შედარებით მაღალი ხელფასი აქვს; ამ რიცხვების საშუალო 4000-ია. როგორც ვხედავთ, ყველა მონაცემი გარდა ერთისა 4000-ზე ნაკლებია, ვერ ვიტყვით, რომ ეს რიცხვი (საშუალო) აღწერს ფირმის „ტიპობრივ“ შემოსავალს. ამ მხრივ, მედიანა ცენტრალური ტენდენციის მდგრადი საზომია. მონაცემების მედიანა რომ ვიპოვოთ, რიცხვები ზრდის მიხედვით უნდა დავალაგოთ: 2600, 2600, 2800, 2900, 3000, 3200, 10900.

აქ მონაცემების რიცხვი კენტია და მედიანა — 2900 უფრო დამახასიათებელია, უფრო „ტიპობრივი“ შემოსავალია ამ ფირმის თანამშრომლებისთვის, ვიდრე 4000. ამ შემთხვევაში მედიანა უკეთ აღწერს „ტიპობრივ“ შემოსავალს. როგორც წესი, ასეთი ამოვარდნები მონაცემებში იშვიათია, ამიტომ საშუალოც ხშირ შემთხვევაში კარგი საზომია. მონაცემთა საშუალო მედიანასთან ერთად იძლევა მონაცემთა შესახებ საყურადღებო (მნიშვნელოვან) ინფორმაციას.

ცენტრალური ტენდენციის საზომების განხილვის შემდეგ ვსაუბრობთ მონაცემთა გაფანტულობის საზომზე — გაბნევის დიაპაზონზე (განზე). ცენტრალური ტენდენციის საზომებთან ერთად გაფანტულობის საზომიც გვეხმარება მონაცემთა ერთობლობის უკეთ აღწერაში. მაგალითად, შეიძლება მონაცემთა ორი ერთობლიობის საშუალოები ტოლი იყოს, ხოლო ამ ერთობლიობებში სხვადასხვანაირი იყოს ე.წ. „ცვალებადობა“. მაგალითების სახით, ტექსტში განხილულია მონაცემთა ორი ერთობლიობა: (1) და (4), რომელთაგან მეორეში ცვალებადობა გაცილებით ძლიერია. უფრო საინტერესოა იმ შემთხვევის განხილვა, როცა ორი ერთობლიობის საშუალოები ტოლია, მაგრამ ერთ-ერთის გაფანტულობა უფრო ძლიერია, შესაბამისად, გაბნევის დიაპაზონი მეტია. მასწავლებელს ვთავაზობთ შემდეგ მაგალითს: ვთქვათ, გვაქვს მონაცემთა ორი ერთობლიობა:

I: 9 9 10 10 12 — საშუალო არის 10;

II: 1 6 9 16 18 — საშუალო არის 10;

ერთი შეხედვითაც ჩანს, რომ მეორეში ცვალებადობა უფრო ძლიერია — მისი გაბნევის დიაპაზონი არის 17, I-ის გაბნევის დიაპაზონი არის 3.

ეს საზომი ძალიან სწრაფად გამოითვლება და უფრო იმ შემთხვევაში გამოიყენება, როცა გამოთვლის სისწრაფე გადამწყვეტია, თუმცა, ე. წ. „ამოვარდნილი“ მონაცემები დიდ გავლენას ახდენს აღნიშნულ საზომზე და ხელს უშლის ამ საზომით მონაცემთა ერთობლიობების სწორ შედარებას; ის არ შეიცავს ინფორმაციას იმის შესახებ, თუ როგორაა გაბნეული ორი „კიდურა“ მნიშვნელობისგან განსხვავებული მონაცემები — გაბნევის დიაპაზონის გამოთვლისას მხოლოდ ორ მონაცემს ვიყენებთ.

ამოცანების გამოყენებით მოსწავლეები იძენენ სტატისტიკური საზომების გამოთვლისა და ამ საზომების საშუალებით მონაცემთა ერთობლიობის დახასიათების ჩვევებს. ამასთანავე, მოსწავლემ უნდა შეძლოს დაჯგუფებული სახით წარმოდგენილი სიხშირეთა ცხრილის გამოყენება საშუალოს გამოთვლისას — ამ დროს ვიყენებთ ტექსტში წარმოდგენილ მაგალითებში გამოყენებულ საშუალოს გამოთვლის წესს. მაგალითად, 1 ამოცანაში საშუალო ჯობს შემდეგი რიცხვითი გამოსახულების მიხედვით გამოვთვალოთ:

$$\frac{11\cdot 6+13\cdot 22+14\cdot 16+18\cdot 6}{6+22+16+6}$$

ამ რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა არის მოცემულ მონაცემთა საშუალო.

(2) ამ ამოცანაში შეჯამებულია წინა ამოცანასა და ტექსტში განხილულ მაგალითში საშუალოს პოვნის წესი და წარმოდგენილია საშუალოს პოვნის ფორმულა 4 მონაცემის შემთხვევაში

$$\frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 m_2 + x_3 \cdot m_3 + x_4 \cdot m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

მოსწავლემ უნდა ახსნას ამ ფორმულის მიღების წესი და განაზოგადოს იგი მონაცემთა ნებისმიერი k რიცხვისთვის (ამოცანა (3)).

განზოგადება შეიძლება კიდევ რამდენიმე კერძო შემთხვევის განხილვას მოჰყვეს.

(4) მოსწავლე იყენებს საშუალოს გამოთვლის წესს და წერს:

$$\frac{x + (2x-1) + 2x + 3x + 1}{4} = 6$$

$$2x = 6, \; x = 3.$$

(5) გამოვთვალოთ საშუალო:

$$\frac{87 + 96 + 76 + 82 + 93}{5} = 86{,}8.$$

ქულების ჯამი არის 434.

თუ ექვსი შეფასების საშუალო 90 ქულაა, მაშინ ქულათა ჯამი უნდა იყოს $90 \cdot 6 = 540$.

ეს ჯამი მხოლოდ იმ შემთხვევაში მიიღება, თუ მეექვსე შეფასება იქნება 106, რაც შეუძლებელია. ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება სწრაფად გაიაზროს — თუ მეექვსე შეფასება მაქსიმალური, ე. ი. 100 იქნება, მაშინ ქულათა ჯამი მიაღწევს 534-ის, რაც ნაკლებია 540-ზე. თუ 540-ს არ გამოვთვლით, მაშინ ვიტყვით: 534-ის შემთხვევაში საშუალო არის მხოლოდ 89.

(6) მოსწავლეები მსჯელობენ და აგებენ მონაცემებს: ა) საშუალოსა და მედიანის მიხედვით; ბ) საშუალოს, მოდისა და მედიანის მიხედვით.

(7) აქ ის შემთხვევაა განხილული, როცა არცერთი მონაცემი საშუალოს არ ემთხვევა, მაგრამ საშუალო უფრო „ახლოსაა" სამ დიდ მონაცემთან; რიცხვითი მონაცემები შეიცავს მოდას და მედიანას.

(8) მივცეთ საშუალება მოსწავლეებს იმსჯელონ და სხვადასხვა ხერხით მოიძიონ პასუხი დასმულ კითხვაზე. ერთ-ერთი პასუხი შეიძლება ასეთი იყოს: ერთ-ერთ ტესტში 1-ქულით შეფასების მომატება საშუალოს მხოლოდ $\frac{1}{10}$-ით გაზრდის. მოსწავლემ შეიძლება აღმოაჩინოს, რომ საშუალოს 1-ით გაზრდა შესაძლებელია ყველა შეფასების 1-ით გაზრდით. შეიძლენა სხვა შემთხვევებიც დასახელდეს.

(9)-(10) ანალოგიური ამოცანები ხშირად განიხილება ეროვნული გამოცდების ბილეთებში; მე-10 კლასში მათემატიკის სწავლების ერთ-ერთი მიზანი გამოცდებისთვის მზადებაცაა.

(9) ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლე მსჯელობს: მედიანის პოვნისას, რიცხვებს ვალაგებთ ზრდის მიხედვით.

მედიანა (შესაბამისად, საშუალო) შეიძლება იყოს 3, 4 ან რიცხვი 3-სა და 4-ს შორის. თუ მედიანა არის 4 (საშუალოც არის 4), მაშინ ყველა რიცხვის ჯამი არის 20, x რიცხვი არის 9 $(20-11=9)$. ეს რიცხვი აკმაყოფილებს პირობას. თუ მედიანა არის 3, ან რიცხვი 3-სა და 4-ს შორის, მაშინ საშუალოც არის 3 ან რიცხვი 3-სა და 4-ს შორის, მაშასადამე, ყველა რიცხვის ჯამი არის 15, ან რიცხვი 15-სა და 20-ს შორის, უცნობი რიცხვია 4 ან 4-ზე მეტი რიცხვი, მაგრამ ამ შემთხვევაში მედიანა (მაშასადამე, საშუალო) უნდა იყოს 4, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ამოცანა შეიძლება სხვა ხერხითაც ამოიხსნას, ნუ დავუშლით მოსწავლეებს ზეპირ მსჯელობას და ალგებრული გამოსახულების შედგენისა და განტოლების დაწერის გარეშე მსჯელობით პასუხის მიღებას.

თუმცა, ცხადია, მისაღებია ასეთი ამოხსნაც, როცა განვიხილავთ შემთხვევებს: მედიანა არის 3, $x \leq 3$ და $\frac{11+x}{5}=3$; მედიანა არის 4, $x \geq 4$ და $\frac{11+x}{5}=4$; მედიანა არის x, $3 \leq x \leq 4$ და $\frac{11+x}{5}=x$. მხოლოდ მეორე შემთხვევა გვაძლევს პასუხს.

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, ანალოგიური დავალებებისგან შედგება.

2 და 6 ამოცანების ამოხსნისას, მოსწავლე კარგად გაიაზრებს ცენტრალური ტენდენციის საზომების დამახასიათებელ თვისებებს, რომლებზეც ზემოთ გვქონდა საუბარი; შესაბამისი ამოცანებიც შემოგთავაზეთ კლასში ამოსახსნელად.

10 ამოცანის ამოხსნა შეიძლება ზოგიერთმა მასწავლებელმა კომპლექსურ დავალებად გამოიყენოს; შემოთავაზებული კომპლექსური დავალება კი ორ ნაწილად დაყოს მოსწავლეებს. მეორე ნაწილი კი — დაწყვილებული მონაცემების შესწავლის შემდეგ (მონაცემთა ორი ერთობლიობის შედარება) კლასს დაავალოს.

4.5. დაწყვილებული მონაცემები. კორელაცია. კლასტერი.

თემატური ბლოკი: სტატისტიკა და ალბათობა **სავარაუდო დრო** — 2 სთ			
სამიზნე ცნებები და სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
მონაცემები; მონაცემთა ორი ერთობლიობა; მონაცემთა ორ ერთობლიობას შორის კავშირის დახასიათება შეიძლება კორელაციის კოეფიციენტის მიხედვით; მონაცემთა ორ ერთობლიობას შორის შეიძლება იყოს წრფივი, ამასთანავე სრულყოფილი, ძლიერი, საშუალო ან სუსტი დადებითი ან უარყოფითი კავშირები; შეიძლება ორ ერთობლიობას შორის არ გვქონდეს კავშირი.	მონაცემთა ორ ერთობლიობას შორის კავშირის დახასიათება; წრფივი კავშირის დახასიათება კორელაციის კოეფიციენტით.	როგორ აღვწერთ კავშირს მონაცემთა ორ ერთობლიობას შორის, რას მიუთითებს კორელაციის კოეფიციენტი?	**კლასში:** 1-15 **საშინაო:** 1-12

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს მოიპოვოს მონაცემები და იმსჯელოს მონაცემთა ერთობლიობაზე, მონაცემთა ორი ერთობლიობის შედარებისას გამოიყენოს კორელაციის კოეფიციენტი და დაახასიათოს კავშირი (წრფივია, არ არის წრფივი, ძლიერია, სუსტი, თუ არ არსებობს კავშირი); გამოიყენოს სტატისტიკური ანალიზი დასკვნების გამოტანისას.

აქტივობები: მონაცემთა ორი ერთობლიობის მოპოვება და მათი შედარება წინა მასალის გავლის დროსაც გვქონდა; წინარე ცოდნის გააქტიურება ამ მაგალითებზე ყურადღების გამახვილებით იწყება. მაგალითად, ვითვლით მონაცემთა ორი ერთობლიობის საშუალოს, ისინი ტოლია, მაგრამ ერთ-ერთი ერთობლიობა უფრო „გაფანტულია" — მისი გაფანტულობის კოეფიციენტი მეტია; კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ სტატისტიკური საზომების გამოთვლის მნიშვნელობას მონაცემთა დახასიათებისას; ახალ საკითხებზე გადასვლა მონაცემთა ორ ერთობლიობას შორის კავშირის აღწერას უკავშირდება. განსაკუთრებული ყურადღებით განვიხილოთ პრაქტიკული ამოცანა, რომელიც ტექსტში მაგალითის სახით არის წარმოდგენილი. ამ მაგალითში აღწერილია მონაცემთა ორ ერთობლობას შორის კავშირის სიძლიერის დასადგენად კორელაციის კოეფიციენტის გამოთვლის წესი.

მოსწავლეები, ჩვენს კითხვებზე პასუხების გაცემით აღწერენ კავშირს მუშების რაოდენობასა და ყოველ საათში წარმოებული მაგიდების რაოდენობას შორის. მოსწავლეები თავიდანვე გამოთქვამენ ჰიპოთეზას: მუშების რაოდენობის ზრდასთან ერთად იზრდება წარმოებული მაგიდების რაოდენობა; აგებენ შესაბამის გრაფიკულ გამოსახულებას, აკეთებენ საინტერესო აღმოჩენას — მუშებისა და მაგიდების რაოდენობების გამომსახველი წერტილები, მიახლოებით ერთი წრფის გასწვრივ განლაგდება. მოსწავლეები აღწერენ გამზადებულ ცხრილს და იმ ოპერაციებს, რომლებიც ხორციელდება — ვითვლით თითოეული ერთობლიობის საშუალოს; თითოეული ერთობლიობის მონაცემებისთვის „გადახრებს" საშუალო მნიშვნელობიდან; ამ გადახრების ნამრავლთა ჯამს ვწერთ მრიცხველში, ხოლო ორივე ერთობლიობისთვის გადახრების კვადრატების ჯამიდან ფესვების ნამრავლს (ანუ ფესვს ან ჯამების ნამრავლიდან) ვწერთ მნიშვნელში.

მოსწავლეები შეძლებენ საბოლოო ფორმულის დაწერას:

$$\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}}.$$

ამ რიცხვის გამოთვლის შემდეგ ვრწმუნდებით, რომ ჩვენო ჰიპოთეზა (დიაგრამის მიხედვით გამოთქმული) ემთხვევა ზოგად წესს — კორელაციის კოეფიციენტი „ახლოსაა" 1-თან, მონაცემები თავს იყრიან წრფესთან, რომლის საკუთხო კოეფიციენტი (დახრა) დადებითია, კავშირი მონაცემებს შორის წრფივია, გვაქვს დადებითი კავშირი და ეს კავშირი ძლიერია, სიძლიერეს ახასიათებს კორელაციის კოეფიციენტი, იგი 1-თან „ახლოსაა".

დაწვრილებით განიხილება მონაცემთა ერთობლიობის აღსაწერად წარმოდგენილი დიაგრამები; ყოველი დიაგრამის მიხედვით ვახასიათებთ წერტილთა ერთობლიობებს. გამოვყოფთ „ამოვარდნილ უბნებს", რომლებშიც არ გვხვდება წერტილები, აგრეთვე „იზოლირებულ წერტილებს" და კლასტერებს — წერტილთა დაჯგუფებებს, რომლებიც ერთადაა თავმოყრილი. გაკვეთილზე ყველა დიაგრამის განხილვის შემდეგ მოსწავლეები შეძლებენ ამოცანებში წარმოდგენილი შემთხვევების აღწერას; პრაქტიკულ ამოცანებში მივუთითებთ კლასტერის, იზოლირებული წერტილის, „ამოვარდნის" შესაძლო მიზეზებს.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

1 სურათიდან კარგად ჩანს, რომ (2;2) წერტილი იზოლირებული წერტილია.

მოსწავლეები ადვილად პოულობენ პასუხებს 2-6 ტესტებზე; შეიძლება პასუხების დასაბუთებაც ვთხოვოთ, მაგალითად 5 — კორელაციის კოეფიციენტი დადებითია — x-ის ზრდასთან ერთად y-იც იზრდება.

7 გაბნევის დიაგრამიდან ჩანს, კავშირი (დამოკიდებულება) უარყოფითია, ასაკის მატებასთან ერთად ავარიების რიცხვი მცირდება. მოსწავლე მეორე კითხვაზე პასუხით, ახსნის ამ ფაქტს — უფროსი მძღოლები უფრო ყურადღებიანები არიან, არ აკეთებენ სახიფათო მანევრებს და ერიდებიან სიჩქარის გადამეტებას.

8 ამ ამოცანის ამოხსნის დროსაც, სასურველია, აიხსნას პასუხები. ფასი იცვლება 10-დან 25 ლარის ჩათვლით, უმეტესად, 15-20 ლარიანი წიგნები იყიდება. იზოლირებული წერტილები (10; 44) და (20; 50) — 10-ლარიან და 20-ლარიან წიგნებს მიანიშნებენ. შესაძლოა, ეს მკითხველთა ფართო წრისთვის გამიზნული ე. წ. ბესტსელერებია. ისინი მოთხოვნადია და, შესაბამისად, უფრო მეტი რაოდენობით იყიდება.

9 მოსწავლე, ჰორიზონტალურ ღერძს გამოიყენებს ჰუმანიტარული სპეციალობებისთვის, ვერტიკალურს — ზუსტი და საბუნებისმეტყველო სპეციალობებისთვის. გაბნევის დიაგრამის შედგენა მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ. ამ დიაგრამის მიხედვით კარგად ჩანს, რომ კავშირი (დამოკიდებულება) დადებითია, მაგრამ გვაქვს იზოლირებული წერტილები (6;11) და (45;20). მოსწავლეები ასახელებენ შესაძლო გამომწვევ მიზეზებს, მაგალითად, ეს შეიძლება იყოს კერძო უმაღლესი სასწავლებელი მცირე კონტინგენტით. დიდ განსხვავებასაც შეიძლება მოვუძებნოთ ახსნა – მაგალითად, ზოგიერთი უმაღლესი სასწავლებელი აქცენტს ჰუმანიტარულ სპეციალობებზე აკეთებს.

10 მოსწავლეებს ინტუიცია კარნახობს, რომ კორელაცია დადებითია და ახლოსაა 1-თან; რაც მეტია წიგნების რაოდენობა, მით მეტი იქნება ჩანთის მასა.

11 გაბნევის დიაგრამის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ არ არის კავშირი (დამოკიდებულება) მკურნალობის ხანგრძლივობასა და ამ წამლის რაოდენობას შორის.

12 გაბნევის დიაგრამა გვიჩვენებს, რომ კავშირი წრფივია, უარყოფითია, ძლიერია, კორელაციის კოეფიციენტი (–1)-თან არის ახლოს.

კორელაციის კოეფიციენტის გამოთვლა შეიძლება ცხრილის გამოყენებით:

x	$x-\bar{x}$	y	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
6	–2	80	26	4	676	–52
7	-1	60	6	1	36	–6
8	0	70	16	0	256	0
9	1	40	–14	1	196	–14
10	2	20	–34	4	1156	–68
$\bar{x}=8$	$\bar{y}=54$			$\sum=10$	$\sum=2320$	$\sum=-140$

$$\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}=\sqrt{23200}\approx 152,32$$

$$r\approx\frac{-140}{152,32}\approx -0,92.$$

(13) გაბნევის დიაგრამა გვიჩვენებს, რომ კავშირი (დამოკიდებულება) წრფივია, ძლიერია და უარყოფითი.

(14) გაბნევის დიაგრამა გვიჩვენებს, რომ კავშირი არ არის წრფივი, წერტილები განლაგებულია პარაბოლის გასწვრივ.

(15) დიაგრამის მიხედვით შეიძლება ითქვას, რომ კავშირი წრფივია, დადებითია და, დიაგრამის მიხედვით, შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ 6-სულიანი ოჯახის საშუალო კვირეული სამედიცინო ხარჯები შეიძლება იყოს 30-35 ლარი.

მოსწავლეებს არ უნდა გაუჭირდეთ საშინაო დავალების ამოცანების დამოუკიდებლად ამოხსნა. „ტესტებში" პასუხების შერჩევისას, მათ უნდა გამოავლინონ იზოლირებული წერტილის, კლასტერის, მონაცემებს შორის დადებითი და უარყოფითი კავშირების, კორელაციის კოეფიციენტის არსის ცოდნა, კერძოდ, თუ ერთის მნიშვნელობების ზრდისას მეორის მნიშვნელობებიც იზრდება, მაშინ კორელაცია დადებითია.

△8 გაბნევის დიაგრამის მიხედვით მონაცემებს შორის დადებითი და წრფივი დამოკიდებულებაა, ამ დამოკიდებულებას ყველაზე მეტად აღწერს წინადადება — მაღალ ყვავილებს, როგორც წესი, უფრო გრძელი ფოთლები აქვს (მაღალი ყვავილების ზრდა-განვითარებას გრძელი ფოთლები უზრუნველყოფენ).

△9 იზოლირებული წერტილებია (6; 360) და (12; 30); მაგალითად, პირველ შემთხვევაში დამთვალიერებელთა სიმრავლე განსაკუთრებულად საინტერესო გამოფენამ გამოიწვია; მეორე შემთხვევაში კი შესაძლებელია, რომ არაერთხელ გამოფენილი სურათები იყო გალერეაში.

△10 მოსალოდნელიც იყო, რომ კავშირის შესაბამისად, კორელაცია უარყოფითია, კოეფიციენტი ახლოს არის (−1)-თან, გვაქვს წრფივი, უარყოფითი, ძლიერი კორელაცია — ფასის ზრდა იწვევს მგზავრთა რაოდენობის შემცირებას.

△11 ეს ამოცანა კლასში ამოხსნილი (12) ამოცანის ანალოგიურია, მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ, კალკულატორის გამოყენებით, საჭირო სიდიდეების პოვნის შემდეგ, კორალაციის კოეფიციენტის პოვნა — $r \approx -0{,}9$; ეს კი გვიჩვენებს, რომ კორალაცია ძლიერი და უარყოფითია.

△12 წინა ამოცანის ანალოგიურია, აქ კორელაციის კოეფიციენტი 1-თან არის ახლოს, კავშირი წრფივი დადებითი და შეიძლება ითქვას, რომ ძლიერია.

დაწვილებულ მონაცემებს შორის კავშირების გამოკვლევაზე კომპლექსური დავალება შეიძლება გამოვიყენოთ — როცა მოსაძიებელია ბენზინისა და დიზელის საწვავების ფასები და გვაინტერესებს მათ შორის კავშირის აღწერა. მოსწავლეებს დასჭირდებათ ამ ფასების მოძიება და კავშირის გამოკვლევა. მოსალოდნელია, რომ კავშირი ზაფხულის თვეებში დადებითია და წრფივია (როგორც წესი, ორივე საწვავზე ფასები ზაფხულის თვეებში იზრდება).

მასასა და სიმაღლეს შორის კავშირის გამოკვლევა, სასურველია ჩატარდეს თანატოლებში. მოსწავლემ შეიძლება მოიძიოს სხვადასხვა ფორმულა, სიმაღლის მიხედვით ე.წ. „იდეალური წონის" გამოსათვლელად როგორც მამაკაცისთვის, ასევე ქალბატონებისთვის. უმჯობესია კლასში სტატისტიკური მონაცემების შეგროვება ვაჟებისთვის და გოგონებისთვის ცალ-ცალკე ჩატარდეს.

გამოკვლევების შედეგებმა შეიძლება იზოლირებული წერტილებიც გამოავლინოს. შეიძლება გამახვილდეს ყურადღება ცხოვრების ჯანსაღი წესის დაცვის მნიშვნელობაზეც.

ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისთვის

(ამოცანების გამოყენება შეიძლება შემაჯამებელი წერისთვისაც)

თემატური ბლოკი: სტატისტიკა და ალბათობა

საміზნე ცნებები: მონაცემები, მონაცემთა ცენტრალური ტენდენციის საზომები; მონაცემთა ორ ერთობლიობას შორის კავშირის დახასიათება.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს მონაცემთა მოპოვება, წარმოდგენა სხვადასხვა ფორმით, ცენტრალური ტენდენციის საზომების გამოთვლა; დაწყვილებულ მონაცემებს შორის კავშირის დადგენა გაბნევის დიაგრამით; მონაცემთა ორი ერთობლიობის შედარებისას კორელაციის კოეფიციენტის გამოთვლა და მისი გამოყენება კავშირის დასახასიათებლად (მათ. საშ. 6).

ამოცანების ნიმუშები

ამოხსენით ამოცანები:

1. სიხშირეთა ცხრილით წარმოდგენილია მონაცემები ერთ-ერთი ორგანიზაციის თანამშრომლების ხელფასების შესახებ. ცხრილში ზოგიერთი მონაცემი წაშლილია.

ხელფასი	550	700	870	1200	2100
სიხშირე	12		10		
ფარდობითი სიხშირე		30%	20%	18%	

ა) შეავსეთ ცხრილის ცარიელი უჯრები;

ბ) ააგეთ სიხშირეთა განაწილების სვეტოვანი დიაგრამა;

გ) გამოთვალეთ საშუალო ხელფასი;

დ) გამოთვალეთ ამ მონაცემთა ერთობლიობის მოდა, მედიანა და გაბნევის დიაპაზონი.

2. ცნობილია, რომ x; 12; –3; $x+10$; $x–1$; $x+4$ მონაცემების საშუალო არის 5. იპოვეთ ამ მონაცემთა მედიანა და გაბნევის დიაპაზონი.

3. x და y სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება წარმოდგენილია დაწყვილებული მონაცემების ცხრილის სახით:

x	8	9	10	10	12	14	15	15	16	21
y	43	40	45	43	30	52	55	60	62	60

ა) ააგეთ გაბნევის დიაგრამა;

ბ) დაასახელეთ იზოლირებული წერტილი და რომელიმე კლასტერი;

გ) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი და დაადგინეთ დამოკიდებულება x და y მონაცემებს შორის.

პასუხები

1. ა)

550	700	870	1200	2100
12	15	10	9	4
24%	30%	20%	18%	8%

გ) 900.

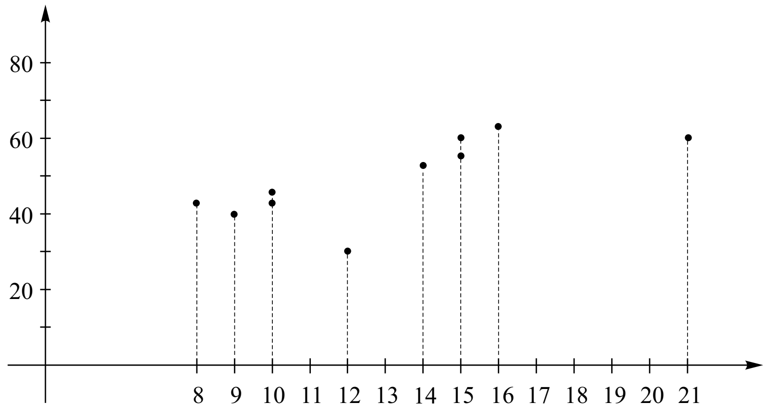
დ) მოდა — 700

მედიანა — 700

გაბნევის დიაპაზონი — 1550

(2) მედიანა — 4, გაბნევის დიაპაზონი — 15.

(3)



ბ) იზოლირებული წერტილებია (12; 30) და (21; 60); კლასტერს ქმნიან, მაგალითად, (8; 43), (9; 40), (10; 45), (10; 43) წერტილები და (14; 52), (15; 55), (15; 60), (16; 62) წერტილები.

გ) $r \approx 0{,}75$; დამოკიდებულება არის საშუალო (ძლიერთან მიახლოებული), დადებითი.

მითითებები:

(1) ა) ცხრილიდან ჩანს, რომ მთელი რაოდენობის 20% არის 10 მონაცემი, ე. ი. ცხრილში სულ 50 თანამშრომლის ხელფასია წარმოდგენილი. 12 არის 50-ის 24%.

ბ) მოსწავლეებს შეუძლიათ დიაგრამის სვეტების სიმაღლეები დაუკავშირონ სიხშირეებს, ან ფარდობით სიხშირეებს.

გ) ზრდით დალაგებული 50 მონაცემიდან შუა მონაცემებია 25-ე და 26-ე, ორივე 700-ის ტოლია, მედიანა მათი არითმეტიკული საშუალოა — 700.

(2) არითმეტიკული საშუალოს გამოსათვლელი ფორმულის მიხედვით შედგენილი განტოლების ფესვია $x=2$. ზრდის მიხედვით დალაგებული ეს მონაცემებია

$$-3;\ 1;\ 2;\ 6;\ 12;\ 12.$$

მედიანა ტოლია $\frac{2+6}{2}=4$-ის, დაიპაზონი $12-(-3)=15$-ის.

(3) გ) კორელაციის კოეფიციენტის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ცხრილით:

$x-\bar{x}$	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
8	43	−5	−6	25	36	30
9	40	−4	−9	16	81	36
10	45	−3	−4	9	16	12
10	43	−3	−6	9	36	18
12	30	−1	−19	1	361	19
14	52	1	3	1	9	3
15	55	2	6	4	36	12
15	60	2	11	4	121	22
16	62	3	13	9	169	39
21	60	8	11	64	121	88
ჯამი 130	ჯამი 490			ჯამი 142	ჯამი 986	ჯამი 279

$$\bar{x}=13, \quad \bar{y}=4, \quad r=\frac{279}{\sqrt{142\cdot 986}}\approx 0{,}75.$$

კერძოდ, x და y ცვლადებს შორის კავშირი საშუალოა (ძლიერთან მიახლოებული).

შეფასების რუბრიკა

(1) ამოცანაში ცხრილის ცარიელი უჯრების შევსება შეფასდეს 1 ქულით, დიაგრამის აგება —1 ქულით, საშუალოს გამოთვლა —1 ქულით, მედიანის — 1 ქულით, მოდა და გაბნევის დიაპაზონი — $0{,}5+0{,}5=1$ ქულით, სულ — 5 ქულა.

(2) არითმეტიკული საშუალოს ფორმულის გამოყენებით განტოლების შედგენა შეფასდეს 0,5 ქულით, მისი ამოხსნა — კიდევ 0,5 ქულით. $0{,}5+0{,}5$ ქულა დაემატოს მედიანისა და დიაპაზონის გამოთვლისთვის, სულ — 2 ქულა.

(3) დიაგრამის აგება შეფასდეს 1 ქულით; იზოლირებული წერტილებისა და რომელიმე კლასტერის დასახელება — 0,5 ქულით; კორელაციის კოეფიციენტის გამოთვლა და მონაცემებს შორის კავშირის აღწერა — 1,5 ქულით. სულ — 3 ქულა.

დამოუკიდებელი მუშაობისთვის განკუთვნილი ეს დავალება (წინა დავალებების მსგავსად) შეიძლება გამოვიყენოთ განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტად — კიდევ ერთ შესაძლებლობად კლასში საჯაროდ განვიხილოთ დასმული საკითხები, მათი პრაქტიკული ღირებულება; აღმოვფხვრათ ხარვეზები მოსწავლეთა ცოდნაში.

(1) ამოცანაში საყურადღებოა, რომ მოსწავლეებმა შეძლონ ამ ცხრილის “წაკითხვა”. მიმართეთ მოსწავლეებს გაიხსენონ მონაცემთა სიხშირე და ფარდობითი სიხშირე. შეიძლება დასვათ ასეთი შეკითხვა: რამდენად ახასიათებს რაიმე მონაცემის მხოლოდ სიხშირის ცოდნა ამ მონაცემის წილს მონაცემთა ერთობლიობაში. მაგალითად, ვთქვათ, ხელოსნის მიერ დამზადებულ დეტალებში 2 წუნდებულია. როგორ ახასიათებს ეს ინფორმაცია ხელოსნის კვალიფიკაციას? აქ საყურადღებოა მოსწავლეთა მოსაზრებების მოსმენა. ალბათ, მოსწავლეთა აზრები გაიყოფა, თუმცა ბოლოს მაინც დაისმება კითხვა: სულ რამდენი დეტალი დაამზადა ხელოსანმა? თუ სულ 3 დეტალი იყო დამზადებული, მაშინ მათგან 2 წუნდებულის არსებობა საკმაოდ ცუდი მაჩვენებელია, თუ 1000 დეტალი იყო დამზადებული, მაშინ მათგან 2 წუნდებულის არსებობა, ხელოსნის მაღალ დონეზე მიუთითებს. ეს მაგალითი ფარდობითი სიხშირის მნიშვნელობაზე მიუთითებს. უშუალოდ (1) ამოცანის განხილვისას, მოსწავლეები ერთობლივი მსჯელობით მიაგნებენ მისი ამოხსნის „გასაღებს“ — ერთ-ერთი მონაცემის სიხშირითა და ფარდობითი სიხშირით მონაცემთა n რაოდენობას ასე ვიპოვით: $\frac{10}{n}=0{,}02$, $n=50$. ამის შემდეგ მოსწავლეები თანამიმდევრობით (პირველი მონაცემიდან დაწყებული) შეავსებენ ცარიელ უჯრებს.

(2) ამოცანის განხილვამდე მიმართეთ მოსწავლეებს, გაიხსენონ მონაცემთა საშუალოს ცნება. საშუალოს ძიება მოსწავლეებს მიიყვანს წრფივ განტოლებამდე. მონაცემთა დადგენის შემდეგ მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები მედიანის ცნების შესახებ. დაუსვით საინტერესო შეკითხვა მოსწავლეებს: ვთქვათ, მონაცემთა რაოდენობაა n. რომელ ადგილზეა ზრდის მიხედვით დალაგებულ მონაცემებში მედიანა? კლასი იმსჯელებს თქვენთან ერთად და დაადგენს:

თუ n კენტია, მაშინ მედიანა ემთხვევა შუა მონაცემს — მონაცემს რომლის რიგითი ნომერია $\frac{n+1}{2}$.

თუ n ლუწია, მაშინ მედიანა შუა ადგილზე მდგომი ორი მონაცემის საშუალოა — იმ ორი მონაცემის საშუალო, რომელთა რიგითი ნომრებია $\frac{n}{2}$ და $\frac{n}{2}+1$.

ნებისმიერი n-ისათვის ზრდის მიხედვით დალაგებულ ერთობლიობაში მედიანა არის ამ ერთობლიობის შუაში მდგომი რიცხვი.

3 ამოცანაში მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ გაბნევის დიაგრამის აგება, რადგან ეს აქტივობა ანალოგიურია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში წერტილის კოორდინატე-ბის მიხედვით თვით წერტილის აგების.

აგებულ დიაგრამაში მოსწავლეები იოლად დაადგენენ იზოლირებულ წერტილებს და რომელიმე კლასტერს. ამის შემდეგ მიმართეთ მოსწავლეებს, კიდევ ერთხელ გაიაზრონ კორელაციის კოეფიციენტის პოვნის ალგორითმი და გამოთვალონ ეს კოეფიციენტი. ამოხსნა უნდა დასრულდეს კორელაციის შეფასებით.

განვიხილოთ კორელაციის კოეფიციენტის შეფასება: მიჩნეულია, რომ, თუ $|r| \leq 0{,}4$, მა-შინ ცვლადებს შორის კავშირი (დამოკიდებულება) სუსტია; თუ $0{,}4<|r| \leq 0{,}75$, მაშინ აღნიშ-ნული კავშირი ზომიერია (საშუალოა). სწორედ ეს შედეგია მიღებული მე-3 ამოცანაში. თუ $0{,}75<|r|<1$, მაშინ კავშირი ძლიერია — ცვლადებს შორის მაღალი სიმჭიდროვეა; თუ $|r|=1$, მაშინ კავშირი სრულყოფილია — დიაგრამაზე წერტილები წრფეზეა განლაგებული.

ამ განმავითარებელი შეფასების, როგორც ყოველი განმავითარებელი შეფასების და-სასრულს, ჩაინიშნეთ თქვენი დაკვირვების შედეგები, შენიშნული ხარვეზები და ის აქ-ტივობები, რომლებიც უნდა დაგეგმოთ მიმდინარე და მომავალ სასწავლო პროცესებში.

4.6 ალბათობის ფორმულა

თემატური ბლოკი: სტატისტიკა და ალბათობა **სავარაუდო დრო:** 2 სთ.			
სამიზნე ცნებები და სამიზნე ცნებებთან და-კავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
ხდომილობა, ხდომი-ლობის ალბათობა; შეუ-ძლებელი ხდომილობა. ხდომილობის ალბათობა არის რიცხვი, რომელიც აფასებს ხდომილობის განხორციელების შესაძ-ლებლობის შანსს; ხდომილობის ალბათობა შეიძლება იყოს ნული, ერთი და რიცხვი 0-სა და 1-ს შორის.	ხდომილობა; აუცილებელი ხდომილობა; შეუძლებელი ხდომილობა; ხდომილობის ალბათობა; ალბათობის ფორმულა.	შეიძლება თუ არა, რომ ხდომილობის ალბათობა იყოს 1-ზე მეტი? რატომ არის ხდომილობის ალ-ბათობა არაუარყ-ოფითი რიცხვი, რომელიც არ აღე-მატება 1-ს?	**კლასში:** 1-13 **საშიანო:** 1-12
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს შემთხვევითი მოვლენის ამოცნობა და მისი განხორციელების შეფასება — ალბათობის ფორმულის გამოყენება (მათ. საშ. 7).			

აქტივობები: საშუალო საფეხურზე ალბათობის შესახებ ცოდნის გამეორება და განმტკიცება მიმდინარეობს. წინარე ცოდნის გასააქტიურებლად შეიძლება შემთხვევითი მოვლენების აღმწერი ის ხელსაწყოები გავიხსენოთ, რომლებზეც წინა კლასებშიც ვისაუბრეთ. კიდევ ერთხელ შევახსენებთ მოსწავლეებს, რომ ალბათობის თეორიის წარმოშობა უკავშირდება აზარტულ თამაშებს და შემთხვევითობის შემქმნელ სათანადო საგნებს (მოწყობილობებს: მონეტა, კარტი, კამათელი). მოსწავლეებს მივმართავთ კითხვებით და ისინი იხსენებენ, რომ ფეხბურთის მატჩის დაწყება კენჭისყრით იწყება — მონეტის აგდებით განისაზღვრება მატჩის დამწყები გუნდი, შეირჩევა მინდვრის ნახევრები; მონეტის ერთგვაროვნებამ უნდა უზრუნველყოს წილისყრის სამართლიანობა — მონეტაზე თითოეული მხარის „მოსვლა" ტოლშესაძლებელი (თანაბარშესაძლებელი) უნდა იყოს. ამის გააზრება ალბათობის ცნების გაგების მნიშვნელოვანი მომენტია; ალბათობის კლასიკური ფორმულის ჩამოყალიბება მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული ამ ცნების გააზრებაზე. შემდეგი მაგალითების განხილვით, მოსწავლემ უნდა გაიაზროს შემთხვევითი ექსპერიმენტი (მაგალითად, კამათლის გაგორება, კარტის დასტიდან ერთ-ერთი კარტის ამოღება), როგორც ისეთი ქმედება, რომელიც ერთსა და იმავე პირობებში შეიძლება მრავალჯერ გავიმეოროთ და მათი შედეგების წინასწარმეტყველება შეუძლებელია; მნიშვნელოვანია შედეგების „ტოლშესაძლებლობა". ეს ცნება აღწერილია მაგალითებში და მოითხოვს მის ინტუიციურ გააზრებას. ალბათობის ფორმულის შემოტანა, რომელიც ცდის შედეგებიდან „ხელშემწყობი შედეგების" გამოყოფის მაგალითების განხილვის შემდეგ ხდება, ცხადია, არ შეიძლება ჩაითვალოს ამ ცნების ზუსტ მათემატიკურ განსაზღვრებად. მასწავლებლებმა უნდა იცოდნენ, რომ ამ სიძნელეების დაძლევის მიზნით, მეცნიერებმა სტატისტიკური განსაზღვრება შემოიტანეს, მაგრამ ლოგიკური სიძნელეების დაძლევა მხოლოდ აქსიომური თეორიის შემოტანის შემდეგ მოხერხდა.

პროექტში მოსწავლეებმა უნდა ისაუბრონ ალბათობის თეორიის წარმოშობის ისტორიასა და მის განვითარებაზე. ეს კპროექტი შეიძლება მოსწავლეს ორ ნაწილად შევთავაზოთ — ალბათობის წარმოშობის ისტორიული მიმოხილვა, წინააღმდეგობები ალბათობის კლასიკურ განსაზღვრებაში; შემდეგ შეიძლება ვისაუბროთ ალბათობის სტატისტიკურ განსაზღვრებასა და მის მნიშვნელობაზე.

სახელმძღვანელოს ტექსტში წარმოდგენილი მაგალითები ნაცნობია მოსწავლეებისთვის, ისინი შეუძლებელ და აუცილებელ ხდომილობებსაც იცნობენ; მოსწავლე შეძლებს ამ ტიპის ხდომილობების სხვა მაგალითების დასახელებასაც და შეძლებს იმსჯელოს ერთ-ერთ საკვანძო შეკითხვაზე — რატომ არის ხდომილობის განხორციელების შესაძლებლობის შეფასებისთვის შემოღებული ალბათობა წარმოდგენილი არაუარყოფითი რიცხვით, რომელიც არ აღემატება 1-ს; მოსწავლემ უნდა შეძლოს, გაიაზროს ცნებები — ხდომილობის შესაძლებელი შედეგი, ხდომილობის ხელშემწყობი შედეგი; ხდომილობის განხორციელების „შანსს", ხდომილობის ალბათობას, ამ რიცხვების საშუალებით განვსაზღვრავთ.

მნიშვნელოვანია საწინააღმდეგო ხდომილობის ცნების შემოტანა, იგი ხშირად გვეხმარება სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნისას.

კლასში ამოსახსნელ „ტესტებში" პასუხების ამოცნობა, ძირითადად, ალბათობის ფორმულაში მონაწილე რიცხვების პოვნას უკავშირდება.

შემთხვევითობის წარმომქმნელი მოწყობილობების სხვადასხვა სახით წარმოდგენა 7 ამოცანითაა მოცემული; ორსექტორიანი რულეტით მონეტის აგდების იმიტაცია გვაქვს, ექვსსექტორიანი რულეტით — კამათლის გაგორება; თუ ამ რულეტის სამ-სამ სექტორს გავაერთიანებთ, მაშინ ამ უკანასკნელით ორსექტორიანი რულეტის იმიტაცია გვექნება.

8 ამ ამოცანაში ოთხსექტორიანი რულეტია წარმოდგენილი, რადგან ორი სექტორი მწვანე ფერს შეესაბამება, ამიტომ P(მწვანე)$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. ხოლო P(თეთრი)$=\frac{1}{4}$, რადგან მხოლოდ 1 სექტორია თეთრად წარმოდგენილი.

9 მოსწავლემ უნდა შეძლოს ხელშემწყობი შედეგების რაოდენობის დათვლა, აქ შედეგების რაოდენობა ექვსია, $n=6$; ა) $m=4$ (1, 2, 3, 4); $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; ბ) $P(\bar{A})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$;

შეიძლება მოსწავლემ ასეც იმსჯელოს, აქ $m=2$ (5 და 6);

$$P(\bar{A})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

არჩევანი A-ს სასარგებლოდ $\bar{A}$-თან მიმართებაში $\frac{P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{2}{1}$, ანუ 2:1.

10 ამ ამოცანით, ფაქტობრივად, ვიწყებთ ალბათობის სტატისტიკურ განსაზღვრებაზე ყურადღების გამახვილებას, ტოლშესაძლებლობა ხომ არ ნიშნავს იმას, რომ მონეტის 10-ჯერ აგდებისას 5-ჯერ გერბი უნდა მოვიდეს და 5-ჯერ საფასური? ცხადია, არა; როცა აგდებათა რიცხვი დიდია, მაშინ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ გერბის (საფასურის) მოსვლათა რაოდენობა „მიახლოებით“ ნახევარი იქნება; ანუ ფარდობითი სიხშირე, ცდათა მრავალი გამეორებისას, შეიძლება მიახლოებით იყოს ალბათობის ტოლი; მოსწავლემ შეიძლება ისიც აღნიშნოს, რომ, მაგალითად, 11-ჯერ აგდებისას ხომ არ შეიძლება გერბისა და საფასურის მოსვლათა რიცხვი ტოლი იყოს.

მაშასადამე, იმის გამო, რომ მონეტის 10-ჯერ აგდებისას 7-ჯერ მოვიდა გერბი და 3-ჯერ საფასური, ვერ დავასკვნით, რომ „საფასურისა და გერბის მოსვლა არ არის ტოლშესაძლებელი“. ჩვენ შევთანხმდით, მონეტა ისეა გაკეთებული, რომ თანაბარია შესაძლებლობა (შანსი), რომ მოვიდეს გერბი, ან საფასური. შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ ამ საკითხზე უფრო დაწვრილებით ვისაუბრებთ; მოსწავლემაც კომპლექსურ დავალებაში უნდა გაამახვილოს ყურადღება ამ საკითხზე.

11 სურათის მიხედვით, კარგად ჩანს, რომ $P(z)>P(x)>P(y)$.

12 აქ მოსწავლე იხსენებს, რომ თუ არჩევანი A ხდომილობისა $\bar{A}$-ს მიმართ $\frac{P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{a}{b}$,

მაშინ $$P(A)=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{4}.$$

მოსწავლე ყოველგვარი ფორმულის გამოყენების გარეშე, სწრაფად იპოვის აღნიშნული წამლით განკურნების ალბათობას — $\frac{1}{4}$-ს.

განკურნება — 1 ნაწილი,
წარუმატებლობა — 3 ნაწილი,
განკურნება ან წარუმატებლობა — 4 ნაწილი,
განკურნების ალბათობა — $\frac{1}{4}$.

13 სიტყვაში 8-ასოა, ხმოვანი — 4 ასო;

$$P(\text{ხმოვანი})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

საშინაო დავალების ამოცანები ანალოგიურია — შემთხვევითობის წარმომქმნელი მოწყობილობების შესაბამისი შედეგების დათვლა, ალბათობის ფორმულის გამოყენება, ალბათობის ფორმულაში შემავალი რიცხვების პოვნა.

8 ბ) კენტი რიცხვები: 1, 3, 5, 7, 9. P(კენტი რიცხვის მოსვლა)$=\frac{5}{10}=50\%$.

დ) P(არანაკლებ 5-ის მოსვლა)$=\frac{6}{10}=0,6=60\%$.

9 მოსწავლეს მოუწევს მარტივი რიცხვების რაოდენობის დადგენა 1-დან 100-მდე ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რაოდენობა არის 25; $P=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.

შევნიშნოთ, რომ არსებობს მარტივ რიცხვთა ცხრილები, რომელთა მოძიება შეიძლება ინტერნეტშიც. 2022 წელს მძლავრი კომპიუტერების გამოყენებით აღმოაჩინეს იმ დროისთვის უდიდესი მარტივი რიცხვი $2^{82589933}$-1 მისი ათობითი ჩანაწერი 24862048 — ნიშნაა.

10 P(ბიჭი)$=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$.

11 შეიძლება თუ არა ლატარიის შედეგის პროგნოზირება?

P(კოტე მოიგებს პრიზს)$=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$,

P(კოტე ვერ მოიგებს პრიზს)$=\frac{11}{12}$.

უფრო მეტია შანსი, რომ კოტე ვერ მოიგებს პრიზს.

აქ $\frac{P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{1}{11}$.

მოგების „არჩევანი“ მხოლოდ $\frac{1}{11}$-ია.

12 29 მაისამდე (პირველი 28 დღე) კვირის ყოველი დღე 4-ჯერ იყო. 29-ში შეიძლება იყოს კვირის ნებისმიერი დღე (7 შედეგი).

აქ მოსწავლემ უნდა გაიაზროს, მაისში რა შემთხვევაში გვექნება მე-5 პარასკევი. მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა 29-ში გვექნება პარასკევი, ხუთშაბათი ან ოთხშაბათი. მრიგად, კვირის 7 დღიდან ხელშემწყობია ეს 3 დღე.

მოსწავლემ შეიძლება ასე იმსჯელოს: მე-5 პარასკევი მაისში მხოლოდ იმ შემთხვევაში იქნება, თუ თვე დაიწყება პარასკევით (მაშინ 29 იქნება მე-5 პარასკევი), ან — ხუთშაბათით (მაშინ 30 იქნება მე-5 პარასკევი), ან ოთხშაბათით (მაშინ 31 იქნება მე-5 პარასკევი), ხელშემწყობი შემთხვევების რიცხვი არის 3, კვირაში დღეების რიცხვი არის შვიდი.

ამ შემთხვევაში, მოსწავლეებს საშინაო დავალებად მივეცით ამოცანა, რომლის ამოსახსნელად გარკვეული არასტანდარტული მსჯელობის ჩატარება მოუწევთ.

არ შეიძლება მხოლოდ ანალოგიური ამოცანებით შემოფარგვლა.

4.7. ხდომილობათა სივრცე

თემატური ბლოკი: სტატისტიკა და ალბათობა **სავარაუდო დრო:** 2 სთ			
საამიზნე ცნებები და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
ხდომილობათა სივრცე, ელემენტარული ხდომილობა, ხდომილობა; ყოველი ხდომილობა ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლეა და მისი ალბათობა მასში შემავალი ელემენტარული ხდომილობების ალბათობების ჯამია.	ხდომილობათა სივრცე, ხდომილობა, ექსპერიმენტის შესაბამისი ხდომილობათა სივრცის აგება; ხდომილობის ალბათობის პოვნა.	რას ნიშნავს ხდომილობათა არათავსებადობა? რა არის მოცემულ ექსპერიმენტთან დაკავშირებული ხდომილობათა სივრცე?	**კლასში:** 1-11 **საშინაო:** 1-11
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს შემთხვევითი მოვლენის ურთიერთგამომრიცხავი შედეგების ამოცნობა, ხდომილობათა სივრცის შედგენა, აღწერა და სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით მოცემული ხდომილობის აღწერა, მასში შემავალი ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობის დადგენა, ალბათობის გამოთვლა (მათ. საშ. 7).			

აქტივობები: ახალი ცნების (ხდომილობათა სივრცის) გააზრებას და გამოყენებას ხდომილობის წარმოსადგენად და მისი ალბათობის გამოსათვლელად, წინ უნდა უძღოდეს ხდომილობის ალბათობის გამოთვლის მაგალითების განხილვა. ამ მხრივ, მნიშვნელოვანია იმ ამოცანის დაწვრილებითი ანალიზი, რომელმაც შეიძლება მოსწავლეების ინტერესი გამოიწვიოს; მაგალითად, წინა საშინაო დავალების 12 ამოცანა — უნდა ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული წელიწადის მაისის თვეში 5 პარასკევი იქნება. მოსწავლეები მსჯელობენ: რა არის აქ ხდომილობა? რა ხდომილობის ალბათობას ვეძებთ? პოულობენ პასუხებს აღნიშნულ კითხვებზე — ხდომილობაა ის, რომ მაისის თვეში რამდენი პარასკევი შეიძლება იყოს, ეს შემთხვევითი მოვლენაა — პარასკევი დღეების რაოდენობა შეიძლება იყოს 4 ან 5; სხვა შემთხვევა არ გვაქვს. პარასკევი დღეების რაოდენობა შეიძლება იყოს 4 (4 შემთხვევა), როცა მაისის პირველი დღე არის შაბათი, კვირა, ორშაბათი, სამშაბათი; პარასკევი დღეების რაოდენობა არის 5, როცა მაისის პირველი დღე არის ოთხშაბათი, ხუთშაბათი, პარასკევი. აქ ხდომილობა — მაისში 5 პარასკევია — განისაზღვრება 3 ხდომილობით, მაისის პირველი დღე ოთხშაბათია, ხუთშაბათია, პარასკევია. პირველ მაისს კვირის დღეების სრული რაოდენობა ყველა შესაძლო შედეგის სიმრავლეა.

ამ მაგალითში ყველა შედეგი (მაისის პირველი დღე კვირის რა დღეა) 7 შედეგით წარმოგვიდგება, მათგან ხელშემწყობია 3 შედეგი, 3 ელემენტარული ხდომილობა; თითოეულს,

7 შედეგიდან, შეიძლება ვუწოდოთ, ელემენტარული ხდომილობა — ისინი არათავსებადი ხდომილობებია (ერთდროულად არ შეიძლება მოხდეს), ხოლო ხდომილობა — მაისში 5 პარასკევია, შეიძლება წარმოვადგინოთ ელემენტარული ხდომილობების სიმრავლით, რომელიც შედგება ელემენტარული ხდომილობებისგან — მაისის პირველი დღე ოთხშაბათია, მაისის პირველი დღე ხუთშაბათია, მაისის პირველი დღე პარასკევია. უფრო ადვილია ელემენტარული ხდომილობებისა და ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობის შედგენა და აღწერა იმ ექსპერიმენტებში, რომლებიც კარტის დასტიდან ერთ-ერთი კარტის ამოღებას, მონეტის აგდებას ან კამათლის გაგორებას უკავშირდება. ეს კლასიკური მაგალითები კარგად გამოიყენება ალბათობის თეორიის სხვადასხვა ცნების წარმოსადგენად. ისინი აადვილებს ხდომილობათა სივრცის დემონსტრირებას და სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებას ალბათობის თეორიაში — ცდას (ექსპერიმენტს) ვუკავშირებთ ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეს (ხდომილობათა სივრცეს), რომლის ელემენტარული ხდომილობები არათავსებადია. თუ ისინი „ტოლშესაძლებელიცაა“, რაც ინტუიციურად განისაზღვრება, მაშინ თითოეულის ალბათობა არის $\frac{1}{n}$ (n ხდომილობათა სივრცეში ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობაა). ყოველი ხდომილობა ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლეა. იგი შეიძლება იყოს ცარიელი სიმრავლე, მაშინ მისი ალბათობა ნულია; იგი შეიძლება იყოს თვით ხდომილობათა სივრცის ტოლი სიმრავლე — ე. ი. აუცილებელი ხდომილობაა და მისი ალბათობა 1-ია; მათგან განსხვავებული ყოველი ქვესიმრავლის ალბათობა, თუ ეს ქვესიმრავლე შედგება m ელემენტარული ხდომილობისგან, არის $\frac{m}{n}$; სიმრავლეთა თეორიის ენა, ხდომილობათა სივრცის აგება და ხდომილობის შედგენა აადვილებს ალბათობაზე ამოცანის ამოხსნას.

ხდომილობათა სივრცის, ელემენტარული ხდომილობების, ხდომილობის, როგორც ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლისა და ხდომილობის ალბათობის განსაზღვრის გააზრებისთვის წარმოდგენილია მაგალითები, რომლებიც შეიძლება, მოსწავლეების აქტიური მონაწილეობით, ინტერაქტიული მიდგომით გაირჩეს.

მოსწავლეები, დასმული ამოცანის პირობის მოსმენის შემდეგ პასუხობენ ჩვენ კითხვებს და თავად აგებენ ცოდნის შენობას, რომელიც ალბათობის განსაზღვრის ახალ წესთან არის დაკავშირებული:

— 36 კარტიანი დასტიდან შემთხვევით ვიღებთ 1 კარტს. გვსურს ვიპოვოთ წითელი კარტის მოსვლის ალბათობა.

— რამდენი კარტია ამ დასტაში? რამდენია მათ შორის წითელი? რისი ტოლი იქნება წითელი კარტის მოსვლის ალბათობა? ($p=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$).

— ჩამოთვალეთ — რა სახის კარტებისგან შედგება დასტა („ჯვარი“, „ყვავი“, „გული“, „აგური“). ამ ოთხიდან რომელია ჩვენი ხდომიდლობისთვის ხელშემწყობი? რისი ტოლი იქნება ჩვენთვის საინტერესო ალბათობა? ($p=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$).

— ახლა კარტების ფერების მიხედვით ვიმსჯელოთ. რა ფერებია გამოყენებული? („შავი“, „წითელი“).

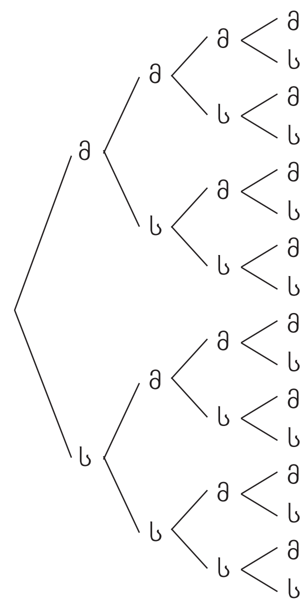
— რომელია ხელშემწყობი? რისი ტოლია ალბათობა? ($p=\frac{1}{2}$).

მოსწავლეები მსჯელობენ, რომ მოცემული ექსპერიმენტის შესაბამისად შედგენილი სიმრავლეები ურთიერთგამომრიცხავი და „ტოლშესაძლებელი“ ხდომილობებისგან შედგება. თითოეული ამ სიმრავლეთაგან შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მოცემული ექსპერიმენტის ხდომილობათა სივრცე (შედგება ელემენტარული ხდომილობებისგან). თითოეულ შემთხვევაში ვეძებთ იმ ხდომილობის ალბათობას, რომელიც ამ სივრცის ქვესიმრავლეა

— პირველ შემთხვევაში შედგება 18 ელემენტარული ხდომილობისგან, მეორე შემთხვევაში — 2, მესამე შემთხვევაში — 1. სამივე შემთხვევაში, ალბათობა არის $\frac{1}{2}$ — ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობის შეფარდება ხდომილობათა სივრცის ყველა ხდომილობის რაოდენობასთან.

სასარგებლოა იმ შემთხვევის აღნიშვნაც, როცა ელემენტარული ხდომილობები არ არის ტოლშესაძლებელი (H_2 სივრცე).

ხდომილობათა სივრცის გამოყენებით, ხდომილობის ალბათობის პოვნის განხილვა (ცოდნის განმტკიცება) მთავრდება მაგალითით ორი კამათლის გაგორების შესახებ. აქ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე მართკუთხოვანი ცხრილით (მართკუთხოვანი მატრიცით) წარმოვადგინეთ. განვიხილეთ ორი ხდომილობა, შესაბამისი ელემენტარული ხდომილობების მითითება და მათი რაოდენობის დადგენა მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ. ამ ექსპერიმენტს უკავშირდება 1-3 ამოცანებში სწორი პასუხის შერჩევა — მოსწავლეები იყენებენ წარმოდგენილ ცხრილს და ადვილად პოულობენ ალბათობის გამოთვლისათვის საჭირო პარამეტრებს. ამასთანავე, 3 მაგალითში ხდომილობა ცარიელი სიმრავლეა, ალბათობა — 0.



4 ხისებრი დიაგრამა გვეხმარება წარმოვიდგინოთ ხდომილობათა სივრცის ყველა ელემენტარული ხდომილობა.

ხდომილობა: სამი გერბი, ერთი საფასური — შედგება 4 ელემენტარული ხდომილობისგან, $m=4$. სულ 16 ელემენტარული ხდომილობა გვაქვს; ალბათობა $=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

შეიძლება მოსწავლემ მსჯელობით მიაგნოს m და n რიცხვებს; 4-დან 1 საფასური უნდა იყოს, რაც ოთხ შემთხვევაში ხდება. მონეტის თითოეული აგდებისას ორი შემთხვევაა, სულ 4 აგდებისას — $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$ შემთხვევა.

5 სასარგებლოა ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის წარმოდგენა კამათლის შემთხვევის ანალოგიურად; $(x;\ y)$ წყვილებში გვაქვს: $1\leq x\leq4$, $1\leq y\leq4$.

ამ წყვილებში $x\neq y$, პირველი ბარათის ამოღების 4 შემთხვევის შემდეგ, მეორე ბარათზე შეიძლება იყოს სხვა 3 რიცხვიდან ერთ-ერთი. ამიტომ, ელემენტარული ხდომილობების ცხრილით წარმოდგენისას, იმ უჯრებს, რომლებშიც ტოლი რიცხვები უნდა იყოს, ვერ ვიყენებთ. სულ 12 ელემენტარული ხდომილობა გვექნება, $5=1+4=2+3=4+1=3+2$; $m=4$, $p=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

7 მოსწავლემ შეიძლება გაზარდოს ან შეამციროს ბარათების რაოდენობა.

8 ვიყენებთ ცხრილს, რომელიც ტექსტშია წარმოდგენილი: ექვსიანი შედის ცხრილის ბოლო სტრიქონსა და ბოლო სვეტში, მათ ერთი საერთო ელემენტი აქვს: $m=6+6-1=11$,

$p=\frac{11}{36}$. თუმცა, შეიძლება მოსწავლემ m და n პარამეტრები მსჯელობის გამოყენებით დაადგინოს:

I კამათელზე რიცხვის მოსვლის 6 შესაძლებლობაა, მეორეზეც — 6, სულ 6·6 შემთხვევა, $n=36$. ხელშემწყობი ხდომილობების რაოდენობისთვის: I-ზე მოვა 6, II-ზე არა — 5 შესაძლებლობა; I-ზე არ მოვა 6, II-ზე 6 მოვა — 5 შესაძლებლობა; 6 ორივეზე მოვა — 1 შესაძლებლობა, $m=5+5+1$.

9 ყოველ ათეულში, გარდა 80-89-ისა, არის 9 რიცხვი, რომლის ჩანაწერში არ გვხვდება ციფრი 8. სულ 9 ასეთი ათეულია, $m=9\cdot 9=81$.

თუმცა, შეიძლება უფრო ადვილი იყოს ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობის დათვლა, რომლებიც 8-ის შემცველ რიცხვებს შეესაბამება (8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 80-89, 98), მათი რიცხვი არის 19. ე. ი. 8 არ გვხვდება $100-19=81$ რიცხვის ჩანაწერში.

10 20-თეთრიანების რაოდენობა — 1 ნაწილი
10-თეთრიანების რაოდენობა — 3 ნაწილი
სულ — 4 ნაწილი

$$P(10\text{-თეთრიანი})=\frac{3}{4};$$
$$\frac{P(10\text{-თეთრიანია})}{P(\text{არ არის } 10\text{-თეთრიანი})}=\frac{3}{1}.$$

11 აქ საინტერესოა ე), ვ) და ზ) შემთხვევები; ე) შესაბამისი ხდომილობა არის არათავსებადი ორი ხდომილობის გაერთიანება — ეს ხდომილობებია, A (მანქანა), B (ტელევიზორი); ცხადია, ამ შემთხვევაში, შესაბამისი ხდომილობა — $A\cup B$ — შეიცავს (1+3) ელემენტარულ ხდომილობას:

$$P=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}.$$

საშინაო დავალების 1-3 ამოცანების ამოხსნისას, მოსწავლეები იყენებენ ორი კამათლის გაგორების შესაბამის ცხრილს. 1-ში გამახვილებულია ყურადღება იმაზე, რომ კამათლები, არსებული მითითებების გარეშეც, „გარჩევადი“ უნდა იყოს. ამოცანების უმეტესობა კლასში ამოხსნილის ანალოგიურია. ამასთანავე, მოსწავლემ უნდა გაიაზროს, რომ ერთი კამათლის 2-ჯერ გაგორება იგივე ექსპერიმენტია, რაც ორი კამათლის გაგორება.

9 ამ ამოცანაში ხდომილობა — „წიწვოვანი“, შედგება ელემენტარული ხდომილობებისგან: „ნაძვია“, „ფიჭვია“; $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

10 სამკუთხა პრიზმას 9 წიბო აქვს, (3+3) — ფუძეებში, 3 — გვერდითი წიბოები; $P=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

11 ხუთკუთხა პირამიდას 10 წიბო აქვს. ნახევარი — გვერდითი წიბოა; $P=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

4.8. ფარდობითი სიხშირე და ალბათობა

თემატური ბლოკი: სტატისტიკა და ალბათობა **სავარაუდო დრო:** 2 სთ			
სამიზნე ცნებები და მასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	**საკითხები**	**საკვანძო შეკითხვები**	**დავალებები**
მონაცემები, ხდომილობის ალბათობა; ხდომილობის სტატისტიკური ალბათობის შეფასება; დაკვირვებათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში ხდომილობის ფარდობით სიხშირეს აქვს წონასწორობის ტენდენცია — ის „უახლოვდება“ იმ რიცხვს, რომელიც ამ ხდომილობის ალბათობაა.	ხდომილობის სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე, ფარდობითი სიხშირით ალბათობის შეფასება	შეიძლება თუ არა ცდათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში ფარდობითი სიხშირით ალბათობის შეფასება?	**კლასში:** 1-7 **საშინაო:** 1 - 8
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რეალური მოვლენის დაკვირვების შედეგად, ცდების ჩატარებით ხდომილობის სტატისტიკური ალბათობის შეფასება და ამ გზით პროცესების შედეგების პროგნოზირება (მათ. საშ. 7).			

აქტივობები: წინარე ცოდნის გააქტიურებას ვახდენთ ექსპერიმენტთან დაკავშირებული ცნებების გამეორებითა და მათ შესახებ ცოდნის განმტკიცებით — ეს ცნებებია ექსპერიმენტი, ხდომილობა, ხდომილობის სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე. მოსწავლეები, ჩვენ მიერ დასმულ კითხვებზე პასუხების მოფიქრებით, იხსენებენ აღნიშნულ ცნებებს და ამ ცნებებთან დაკავშირებულ მდგრად წარმოდგენებს — შემთხვევითი ექსპერიმენტი (ცდა) (მაგალითად, კარტის დასტიდან ერთ-ერთი კარტის ამოღება, მონეტის აგდება, კამათლის გაგორება) ისეთი ქმედებაა, რომელიც ერთსა და იმავე პირობებში შეიძლება მრავალჯერ გამეორდეს და ჩატარებამდე შესაძლებელია ყველა შესაძლო ურთიერთგამომრიცხავი შედეგის მითითება. ამ ურთიერთგამომრიცხავი შედეგების (ელემენტარული ხდომილობების) სრული ჩამონათვალით აღიწერება ყოველი ექსპერიმენტი — ეს ერთობლიობა — ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე — ხდომილობათა სივრცეს წარმოგვიდგენს, მისი ყოველი ქვესიმრავლე ხდომილობაა. ამ ხდომილობაში შემავალი ელემენტარული ხდომილობები ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობებია. მათი რიცხვისა და ყველა შედეგის რაოდენობის შეფარდებით განისაზღვრება ამ ხდომილობის ალბათობა. მნიშვნელოვანია სიხშირის ცნების გააზრება — თუ A არის ერთ-ერთი ხდომილობა, მაშინ მისი სიხშირე ექსპერიმენტის n-ჯერ ჩატარებისას იმ ცდათა რაოდენობაა, რომელთაც მოჰყვა A ხდომილო ბა; მაშინ ეს რიცხვი არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, რომელიც არ აღემატება n-ს; ფარდობითი სიხშირე კი ამ სიხშირის n-თან შეფარდებაა. ცხადია, ეს რიცხვი არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, რომელიც არ აღემატება 1-ს.

სიხშირისა და ფარდობითი სიხშირის ცნებების შემდგომი გააზრება შეიძლება სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი მაგალითით გავაგრძელოთ და ყურადღება გავამახვი-

ლოთ იმ კანონზომიერებაზე, რომელიც ფარდობითი სიხშირის ცვლილებას ახასიათებს ცდათა მრავალჯერ გამეორებისას. მოსწავლეები ეცნობიან ცნობილ ისტორიულ მაგალითებს, რომლებიც ამ კანონზომიერების შესწავლას უკავშირდება; აღნიშნული სამიზნე ცნებასთან დაკავშირებული საკითხები მოსწავლეთათვის გასაგებ ცხოვრებისეულ კონტექსტთან დაკავშირებული მაგალითებითაა წარმოჩენილი. მონეტის აგდებასთან დაკავშირებული ექსპერიმენტის მრავალჯერ გამეორებამ, რომელიც არაერთი მათემატიკოსის მიერ განხორციელდა, მიგვიყვანა მნიშვნელოვან დასკვნამდე — ცდათა მრავალჯერადი გამეორებისას, ხდომილობის ფარდობითი სიხშირის ცვლილება ემორჩილება გარკვეულ კანონზომიერებას — იგი თავს იყრის ხდომილობის ალბათობის მახლობლად, ფარდობითი სიხშირით შეიძლება შევაფასოთ ხდომილობის ალბათობა. მასწავლებლებმა იციან, რომ სტატისტიკურ ინტერპრეტაციასაც, მსგავსად კლასიკური განსაზღვრებისა, სიძნელეები ახლავს; მაგალითად, თუ გერბისა და საფასურის მოსვლა თანაბარშესაძლებელია (თითოეულის ალბათობა 0,5-ია), მაშინ ბუნებრივია ველოდოთ, რომ აგდებათა მრავალჯერ გამეორებისას მიახლოებით ერთნაირი რაოდენობის გერბი და საფასური მოვა; ცხადია, არააუცილებლად ტოლი რაოდენობით, რაც, მაგალითად, შეუძლებელია ცდათა კენტი რიცხვის დროს. ლუწი რაოდენობის აგდებების დროსაც შეიძლება ეს რაოდენობები არ იყოს ტოლი. სტატისტიკური ინტერპრეტაციის შესაბამისად, ალბათობას განვსაზღვრავთ, როგორც ხდომილობის ფარდობით სიხშირეთა „ზღვარს“ (ცდათა დიდი რიცხვის დროს); „ზღვარი“ განიხილება ცდის ჩატარებათა რიცხვის ზრდის მიხედვით, და ამ რიცხვის „დიდი” მნიშვნელობების დროს ფარდობითი სიხშირე ალბათობის კარგ შეფასებად ითვლება; ეს ფაქტი შეიძლება პრაქტიკაში ასეთი სახით გამოვიყენოთ: ხდომილობის მრავალჯერ გამეორებისას, უნდა ველოდოთ, რომ ფარდობითი სიხშირე, მიახლოებით, ამ ხდომილობის ალბათობის კლასიკური ფორმულით გამოთვლილი მნიშვნელობის ტოლი აღმოჩნდება. მასწავლებლებმა იციან, რომ ეს ფაქტიც ალბათობის ენაზე ყალიბდება (დიდ რიცხვთა კანონი): ალბათობა იმისა, რომ ფარდობითი სიხშირისა და ალბათობის სხვაობის მოდული ნებისმიერ მოცემულ რიცხვზე მეტია, ცდათა n რიცხვის ზრდასთან ერთად ნულისკენ მიისწრაფის: $\lim_{n\to\infty} P(|p-\frac{m}{n}|>\varepsilon)=0$. (თუ მასწავლებელს სურს მოიძიოს ამ თემასთან დაკავშირებით დამატებითი ინფორმაცია, ისარგებლოს საძიებო სისტემით). ის ლოგიკური სიძნელეები, რომელიც კლასიკურ და სტატისტიკურ ინტერპრეტაციებს ახლდა, დაძლეულია მე-20 საუკუნის 30-იან წლებში, როცა შეიქმნა ალბათობის აქსიომური თეორია. მოსწავლეებთან დიდ რიცხვთა კანონის შესახებ, ცხადია, არ ვსაუბრობთ; მკვიდრი წარმოდგენები, რომლებიც დაკავშირებულია ხდომილობის ალბათობასთან და კარგად უნდა გაიაზროს მოსწავლემ, შეიძლება შემდეგი წინადადებებით აღვწეროთ: ფარდობითი სიხშირე, ალბათობასთან ერთად, ალბათობის თეორიის ძირითადი ცნებებია; ფარდობითი სიხშირე იმ ცდების რაოდენობის შეფარდებაა ცდების სრულ რაოდენობასთან, რომელშიც მოცემული ხდომილება განხორციელდა. ალბათობის განსაზღვრა არ მოითხოვს, რომ ცდა სინამდვილეში განხორციელდეს, ფარდობითი სიხშირე კი დაკავშირებულია ცდების ჩატარებასთან.

ამრიგად, ალბათობის გამოთვლა შეიძლება ცდამდე, ფარდობითი სიხშირე კი — მხოლოდ ცდის შემდეგ გამოითვლება. თუ ცდათა დიდი რიცხვისას აღმოჩნდა, რომ ფარდობითი სიხშირე მიახლოებით 0,4-ია, მაშინ ეს რიცხვი შეიძლება მივიღოთ ხდომილობის ალბათობად. დიდ რიცხვთა კანონის შესახებ მოსწავლეებთან X კლასში არ ვსაუბრობთ და ალბათობის ორივე ინტერპრეტაციის გააზრება შემთხვევითობის წარმომქმნელი ცნობილი ხელსაწყოებით ჩატარებული ცდების აღწერით ხდება.

ფარდობითი სიხშირის გამოთვლასა და ალბათობასთან კავშირის გააზრებას უკავშირდება წარმოდგენილი ამოცანები.

1-2 „ტესტებში“ პასუხების ამოცნობა ფარდობითი სიხშირის გამოთვლაზეა — თუ ცდის n-ჯერ გამეორებისას A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი არის m, მაშინ სიხშირეც არის m, ფარდობითი სიხშირე — $\frac{m}{n}$; თუ $\frac{m}{n}=0{,}8$ (ფარდობითი სიხშირე არის 0,8), $n=m+20$, მაშინ $\frac{m}{m+20}=\frac{4}{5}$, $5m=4m+80$; $m=80$ (ამოცანა 2).

მსჯელობა იმართება 3-ში პასუხის შერჩევისას; გერბის მოსვლის ალბათობა არის $\frac{1}{2}$, საფასურის მოსვლის ალბათობაც არის $\frac{1}{2}$, ეს მხოლოდ იმას ნიშნავს, რომ „ალბათობა იმისა, რომ ცდათა გრძელ სერიაში ნახევარჯერ მოვიდეს გერბი და ნახევარჯერ საფასური, მიახლოებით 1-ია“. ეს იმას არ ნიშნავს, რომ 20-ჯერ აგდებისას 10-ჯერ აუცილებლად მოვა გერბი და 10-ჯერ საფასური, ამის ალბათობა არ არის 1. შეიძლება მოხდეს რომ ოცივეჯერ გერბი მოვიდეს (ან ოცივეჯერ — საფასური). ამიტომ 3 ამოცანის პასუხია: „შეიძლება 20-ჯერ მოვიდეს საფასური“; არ არის პასუხი: „10-ჯერ აუცილებლად მოვა გერბი“; „10-ჯერ აუცილებლად მოვა საფასური“; „არ შეიძლება 20-ჯერ მოვიდეს გერბი“.

4 ეს ამოცანა მიუთითებს — ფარდობითი სიხშირის შესაფასებლად შეიძლება ალბათობის გამოყენება, ალბათობის გამოყენება შეიძლება პროგნოზირებისთვის — რადგან ნათურის უვარგისობის ალბათობა მიახლოებით 2%-ია, მოსალოდნელია, რომ 250 ნათურიდან უვარგისი იყოს $250\cdot0{,}02=5$ ნათურა ($m=5$).

5 რულეტების მიხედვით გვაქვს: I რულეტზე: 1 და 4 სექტორებიდან თითოეულზე ისრის გაჩერების ალბათობა 2-ჯერ მეტია 2, 3, 5, 6 სექტორებიდან თითოეულზე ისრის გაჩერების ალბათობაზე. შესაბამისად, მოსალოდნელია, რომ შესაბამის ფარდობით სიხშირეებს შორისაც, მიახლოებით, იგივე თანაფარდობა იყოს, მაშასადამე, ბ) ცხრილი უფრო შეესაბამება I რულეტს.

II რულეტზე თითოეულ სექტორში ისრის მოხვედრის ალბათობები ტოლია, ამ შემთხვევას შეესაბამება ა) ცხრილი (ფარდობითი სიხშირეები მიახლოებით ტოლია).

ამ ამოცანის გამოყენებითაც, მოსწავლე გაიაზრებს ალბათობის საშუალებით ფარდობითი სიხშირის მიახლოებით პროგნოზირებას.

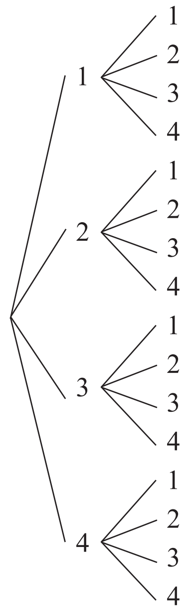
6 შემთხვევითობის შემქმნელი ერთ-ერთი მოწყობილობა, რომლითაც შეიძლება აღნიშნული ცდის იმიტაცია, ოთხსექტორიანი რულეტია. შეიძლება ჩავატაროთ ნებისმიერი სხვა ცდა, რომლის ხდომილობათა სივრცე 4 ტოლშესაძლებელი ელემენტრული ხდომილდობისგან შედგება (მაგალითად, ორი სხვადასხვა მონეტის ერთდროული აგდება). რულეტის ყოველი დატრიალებისას გვაქვს 4 სხვადასხვა შედეგი. თითოეულის განხორციელების ალბათობა $\frac{1}{4}$-ია.

ორი სხვადასხვა მონეტის აგდების შემთხვევაში, გვაქვს 4 შედეგი: გგ, გს, სგ, სს. თითოეული ხდომილობის ალბათობა $\frac{1}{4}$-ია.

თუ რულეტს 4-ჯერ დავატრიალებთ, მაშინ შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი იქნება 4^4 — პირველი დატრიალებისას შედეგების რიცხვი არის 4, ყოველი შემდგომი დატრიალებისას, შედეგების რიცხვი 4-ჯერ იზრდება. შეიძლება ხისებრი დიაგრამა გამოვიყენოთ:

სურათზე მხოლოდ ორი დატრიალების შედეგებია წარმოდგენილი: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), ..., (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4).

4 დატრიალების შედეგების რაოდენობა იქნება $4\cdot4\cdot4\cdot4=4^4$.



თუ პირველი დატრიალებისას 4 სხვადასხვა ციფრი შეიძლება მივიღოთ და მოითხოვება ციფრები არ განმეორდეს, მაშინ, მეორე დატრიალებისას, პირველი დატრიალების ყოველ შედეგს მოსდევს 3 სხვადასხვა ციფრი, სულ ორი დატრიალების შედეგების რიცხვი იქნება — $4\cdot3$. 4 დატრიალების შედეგების რაოდენობა იქნება $4\cdot3\cdot2\cdot1$.

სასურველია, შესაბამისი ხისებრი დიაგრამის წარმოდგენაც.

B ხდომილობა ტოლფასია ხდომილობის: რულეტის 4-ჯერ დატრიალებისას, სხვადასხვა რიცხვი მოვა. მაშასადამე, $P(B)=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4^4}=\frac{3}{32}$.

B ხდომილობის, ანუ A ხდომილობის ალბათობა — $\frac{3}{32}$-ია.

თითოეული ცდა რულეტის 4-ჯერ დატრიალებაა.

რულეტის 200-ჯერ დატრიალება ნიშნავს 50 ცდის ჩატარებას.

მაშასადამე, $n=50$, ფარდობითი სიხშირე მიახლოებით $\frac{3}{32}$-ია, $\frac{m}{n}=\frac{m}{50}$ მიახლოებით $\frac{3}{32}$-ია; $\frac{m}{50}\approx\frac{3}{32}$; $m\approx4$.

7 ყველაზე მაღალ მოთამაშეს 4 თამაშის ჩატარება უწევს, თითოეული თამაშის შედეგი ორია, სულ შედეგების რაოდენობაა — 16, მათგან ხელშემწყობია 4 — (ოთხივეს მოგება), ალბათობა — $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

აქ მოსწავლემ უნდა შეძლოს ელემენტარულ ხდომილობათა შესაბამისი სივრცის აგება — ოთხეულები, რომელთა თითოეული ელემენტი ორ მნიშვნელობას იღებს.

საშინაო დავალების ამოცანების ნაწილი კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია და ითვალისწინებს სიხშირისა და ფარდობითი სიხშირის გამოთვლას (**1**-**3**), ალბათობის თეორიულ და სტატისტიკურ ინტერპრეტაციებს, ამასთანავე, ალბათობის ფარდობით სიხშირესთან კავშირი არ ნიშნავს, რომ კამათლის 12-ჯერ გაგორებისას 2-ჯერ აუცილებლად მოვა 6 (იმის გამო, რომ ალბათობა $\frac{1}{6}$-ია). ამასთანავე, შესაძლებელია 12-ჯერ გაგორებისას 4-ჯერ მოვიდეს 1, შეიძლება 5-ჯერ მოვიდეს 3, შეიძლება 6-ჯერ მოვიდეს 6 (სწორი პასუხი), მიუხედავად იმისა, რომ 6-ის მოსვლის ალბათობა არ არის $\frac{1}{2}$.

5 თუ 1000 დეტალიდან 27 წუნდებულია, მაშინ წუნდებულობის ფარდობითი სიხშირე არის მიახლოებით 2,7%; შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ წუნდებული პროდუქციის რაოდენობა დასაშვებზე მეტია.

6 სხვადასხვა ცდისას, სხვადასხვა შედეგი გვექნება. მოსწავლეები ატარებენ ცდას, შეავსებენ ცხრილს და მსჯელობენ ფარდობით სიხშირესა და სტატისტიკურ ალბათობაზე; ცხრილის მიხედვით, შეიძლება ორი რიცხვი — ფარდობითი სიხშირე, ალბათობა — ძალიან განსხვავდებოდეს ერთმანეთისგან. მოსწავლემ უნდა შეძლოს იმსჯელოს იმ კანონზომიერების შესახებ, რომელიც ამ ცდას უკავშირდება.

7 ფარდობით სიხშირეს ასე გამოვითვლით: მაგალითად, ზომა 17, სიხშირე — 6, $m=6$, ფარდობითი სიხშირე — $\frac{6}{100}=0{,}06$. თუ ფარდობითი სიხშირე არის 0,06, მაშინ 10 000 წყვილიდან, 17 ზომის ხელთათმანების რაოდენობა, მიზანშეწონილია, რომ იყოს:

$$10\,000\cdot0{,}06=600.$$

ანალოგიურად მიიღება სხვა რიცხვები.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

ამოცანებს თვითშეფასებისთვის დავალებათა მრავალფეროვან სისტემაში, რომელიც წარმოდგენილია სახელმძღვანელოში, განსაკუთრებული დატვირთვა აქვს. ამოცანები იმ კითხვარს ცვლის, რომლებიც საკუთარი მოვალეობების შესრულების შეფასებისთვის შეივსება ხოლმე. ამასთანავე, მნიშვნელოვანია, რომ ამ დავალების შესრულების კვალობაზე თვით მოსწავლეც იღებს ინფორმაციას საკუთარი მიღწევების შესახებ, მიღწეული ცოდნის შესახებ, განხილული სამიზნე ცნებებისა და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენების ათვისების დონის შესახებ. თვითშეფასების ტესტი IV თავში განხილული თემატური ბლოკის საკითხებს ეხება. მოსწავლემ უნდა აღმოაჩინოს ხარვეზები და მიმართოს მასწავლებელს მათ აღმოსაფხვრელად. მიღებული შედეგები კარგი ინსტრუმენტია განმავითარებელი შეფასებისთვის:

(1) ამ ამოცანით მოწმდება მოსწავლის ცოდნა მონაცემთა დაჯგუფებასა და სიხშირეთა ცხრილის შედგენის შესახებ. მაგალითად, [6, 9] კლასი შეიცავს სამ მონაცემს: 8; 6,7; 8, მათი ჯამი არის 22,7.

(2) როგორც ჰისტოგრამიდან ჩანს, 40 წელს გადაცილებულ პაციენტთა რიცხვი 295-ია; მათგან ნახევარზე მეტი მამაკაცებია, მაშასადამე, მამაკაცთა უმცირესი შესაძლო რაოდენობა არის 148. თუ მონაცემებს ორ კლასად დავაჯგუფებთ, მაშინ „31-60“ კლასი უფრო მრავალრიცხოვანი იქნება.

(3) წრიულ დიაგრამაზე: ბოსტნეული — 150^0, ხილი — 210^0. მაშასადამე, 240 უნდა გავყოთ ამ რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად, ანუ შეფარდებით: 5:7. ბოსტნეული: $\frac{240}{12}\cdot 5=100$, ხილი: $\frac{240}{12}\cdot 7=140$.

(4) უნდა გავითვალისწინოთ პროპორციულობის კოეფიციენტი, ანუ 1 სმ სიმაღლის სვეტის შესაბამისი ფქვილის მასა (ტ): $\frac{220}{5,5}=40$; მაშასადამე, D: $7\cdot 40=280$ (ტ) B: $\frac{160}{40}=4$ (სმ), A: $\frac{240}{40}=6$ (სმ).

(5) დამრგვალების შემდეგ მიღებული ცხრილის მიხედვით, მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიბრტყეზე შესაბამისი წერტილების გამოსახვა; ყოველი წერტილის პირველი კოორდინატი აიღება A-ს სტრიქონიდან, მეორე კოორდინატი არის შესაბამისი რიცხვი B-ს სტრიქონიდან. დიაგრამიდან კარგად გამოჩნდება, რომ დამოკიდებულება წრფივია, დადებითია, ძლიერია და კორელაციის კოეფიციენტი მიახლოებით 1-ის ტოლია.

(6) შემთხვევით შეიძლება შეირჩეს 12 თვიდან ერთ-ერთი, 30 დღეზე ნაკლები არის ერთ თვეში, თებერვალში — 28 დღე ან 29 დღე. მაშასადამე, $P=\frac{11}{12}$.

(7) ქართულ ანბანში 33 ასოა, მათგან ხმოვანია 5 ასო; მაშასადამე, $P(A)=\frac{5}{33}$; P(თანხმოვნის)$=\frac{28}{33}$; P(არჩევანი — A-ს სასარგებლოდ)$=\frac{5}{28}$.

(8) შეიძლება ვიპოვოთ ყველა ჯამი და დავინახავთ, რომ 10 შედეგიდან მიიღება 8 განსხვავებული შედეგი: -8; -3; -1; 1; 3; 6; 8; 10; P(ჯამი$=1$)$=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

9 ორნიშნა რიცხვებში 5-ის ჯერადების რაოდენობა შეიძლება ასე გამოვთვალოთ: $10 \le 5x < 100$, $2 \le x \le 19$, ამრიგად, 5-ის ჯერადების რაოდენობა არის 18. მოსწავლემ შეიძლება სხვა ხერხი გამოიყენოს: $[\frac{99}{5}]-1=18$.

სიხშირე: $m=18$; ფარდობითი სიხშირე: $\frac{m}{n}=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$. P(შერჩეული რიცხვი 5-ის ჯერადია)$=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$.

10 ჯამი ლუწია, თუ შერჩეული რიცხვებიდან ორივე ლუწია ან ორივე კენტია. 100 ნატურალურ რიცხვში 50 ლუწია, 50 კენტია.

ორივე ლუწია — შერჩევათა რიცხვია: $\frac{50 \cdot 49}{2}$.

ორივე კენტია — შერჩევათა რიცხვი: $\frac{50 \cdot 49}{2}$.

სულ — $50 \cdot 49$.

წყვილების რაოდენობა — $\frac{100 \cdot 99}{2}=50 \cdot 99$

P(რიცხვების ჯამი ლუწია)$=\frac{50 \cdot 49}{50 \cdot 99}=\frac{49}{99}$

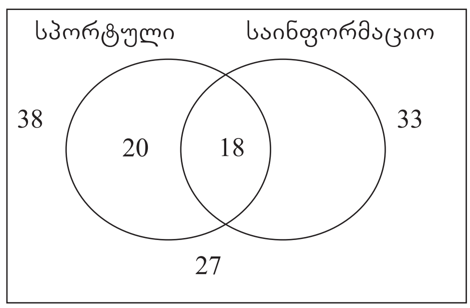
P(რიცხვების ჯამია კენტია)$=1-\frac{49}{99}=\frac{50}{99}$.

IV თავის დამატებითი ამოცანები

დამატებით ამოცანებს მასწავლებელი სხვადასხვა მიზნით იყენებს — დიფერენცირებული მუშაობა მოსწავლეებთან, თვითშეფასების ტესტის შესრულებისას აღმოჩენილ ხარვეზებზე მუშაობა, გავლილი მასალის გამეორება-განმტკიცება.

გთავაზობთ მითითებებს ამოცანების ამოსახსნელად:

1 მოსწავლე იმეორებს დიაგრამის წაკითხვას, დიაგრამის მიხედვით მონაცემთა ანალიზს. პირობის მიხედვით, 80 მაყურებლიდან 27 არ უყურებს არც სპორტულ და არც საინფორმაციო გადაცემას.



მაშასადამე, სპორტულს ან საინფორმაციოს უყურებს: $80-27=53$.

შეიძლება გამოვიყენოთ ვენის დიაგრამა.

ა) ორივეს უყურებს: $38+33-53=18$.

ბ) უყურებს სპორტულს და არ უყურებს საინფორმაციოს $38\text{-}18=20$.

2 მონაცემების მიხედვით, საჭიროა სიხშირეთა ცხრილის შედგენა. სიხშირეები იქნება: მაღალი — 8; კარგი — 22, დამაკმაყოფილებელი — 12; არადამაკმაყოფილებელი — 3.

მაშასადამე, სულ მონაცემების რაოდენობა არის: 45.

ფარდობითი სიხშირეებისთვის გვექნება, შესაბამისად, რიცხვები: $\frac{8}{45}$, $\frac{22}{45}$, $\frac{12}{45}$, $\frac{3}{45}$.

დამაკმაყოფილებელი შეფასების შესაბამისი მაჩვენებელი არის: $\frac{12}{45} \approx 26{,}7\%$.

მაღალი ან კარგი: $\frac{30}{45}=\frac{2}{3} \approx 66{,}7\%$.

3 დაჯგუფების შემდეგ, გვექნება ცხრილი:

[1; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20]
14	7	27	12

ჰისტოგრამიდან კარგად გამოჩნდება — ყველაზე მაღალი მართკუთხედი შეესაბამება [10; 15) შუალედს; წრიული დიაგრამის შესადგენად, 360^0 უნდა დავყოთ შეფარდებით: 14:7:27:12.

$$\frac{360^0}{60}\cdot 14=84^0; \qquad \frac{360^0}{60}\cdot 7=42^0;$$
$$\frac{360^0}{60}\cdot 27=162^0; \qquad \frac{360^0}{60}\cdot 12=72^0.$$

წრიულ დიაგრამაზე მესამე კლასის შესაბამისი სექტორის გრადუსული ზომა მიახლოებით 4-ჯერ მეტია მეორე კლასის შესაბამისი სექტორის გრადუსულ ზომაზე და 2-ჯერ მეტია პირველი კლასის შესაბამისი სექტორის გრადუსულ ზომაზე.

4 ამოცანის პირობის თანახმად, 72^0 შეესაბამება ბიჭების ან გოგონების რაოდენობას იმის მიხედვით, ბიჭების რაოდენობაა ნაკლები, თუ გოგონების. მაშასადამე, რიცხვი 24 შეესაბამება წრიულ დიაგრამაზე $360^0-72^0=288^0$-ს, ამრიგად,

$$288^0 \text{ — } 24$$
$$360^0 \text{ — } \frac{360\cdot 24}{288}=30.$$

მივიღეთ: კლასში მოსწავლეების რაოდენობა არის 30.

5 მოსწავლემ უნდა შეძლოს დიაგრამის მიხედვით კითხვებზე პასუხების გაცემა. მაგალითად, 16 თანამშრომლის ხელფასი (20-დან) არ აღემატება 800 ლარს, 800 ლარზე მეტი აქვს $20-16=4$ თანამშრომელს. როგორც დიაგრამიდან ჩანს, არაუმეტეს 600 ლარი აქვს 16 თანამშრომელს, არაუმეტეს 800 ლარი — 16 თანამშრომელს, მაშასადამე, 700 ლარი არცერთ თანამშრომელს არა აქვს. მოსწავლემ უნდა შეძლოს მსჯელობის ხაზის განვითარება და, დიაგრამის მიხედვით, სწორი დასკვნების გამოტანა. მაგალითად, დიაგრამით წარმოდგენილია 20 თანამშრომლის ხელფასი.

6 ანალოგიური ამოცანა საშინაო და საკლასო ამოცანებშიც შეგვხვდა. მოსწავლე იმეორებს მოდის, მედიანის თვისებებს; რადგან მონაცემებს აქვს მოდა, ამიტომ x უნდა იყოს ერთ-ერთი რიცხვი — 1, 3, 4, 5,6 რიცხვებიდან, მედიანა კი ორი შუა რიცხვის საშუალოა, ამ მსჯელობას მივყავართ ერთადერთ შედეგამდე — მედიანა და მოდა 4-ის ტოლია, $x=4$.

7 სტატისტიკური მონაცემების გამოსახულებების ცოდნა დაეხმარება მოსწავლეს, ადვილად ამოხსნას ამოცანა.

8 გაბნევის დიაგრამა გვიჩვენებს, რომ კორელაციის კოეფიციენტი დადებითი რიცხვია, მაგრამ არ არის ახლოს ერთთან. ფორმულის საშუალებით გამოთვლა ამართლებს ჩვენ ვარაუდს — $r\approx 0,76$. მოსწავლეს დასჭირდება იმ მატრიცის შევსება, რომელიც საჭიროა r-ის გამოსათვლელად; $\bar{x}$ საშუალოს პოვნა, $x-\bar{x}$ და $(x-\bar{x})^2$ რიცხვების პოვნა და ფორმულის გამოყენება:

	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
	1	3	–5	–1,5	25	2,25	7,5
	3	2	–3	–2,5	9	6,25	7,5
	5	3	–1	–1,5	1	2,25	1,5
	5	5	–1	0,5	1	0,25	–0,5
	7	5	1	0,5	1	0,25	0,5
	8	3	2	–1,5	4	2,25	–3
	9	7	3	2,5	9	6,25	7,5
	10	8	4	3,5	16	12,25	14
ჯამი	48	36			66	32	35

$\bar{x}=\frac{48}{8}=6;$ $\bar{y}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}=4,5;$ $r=\frac{35}{\sqrt{66\cdot 32}}\approx 0,76.$

9 გაბნევის დიაგრამიდან კარგად ჩანს, რომ (7; 36) იზოლირებული წერტილია; კლასტერს ქმნის წერტილები: (1; 20), (1; 21), (2; 20), (2; 22). კორელაციის კოეფიციენტი დადებითი რიცხვია და მისი გამოთვლა შეიძლება ფორმულით:

$$\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2}}.$$

მოსწავლე იცნობს აღნიშვნებს; მაგალითად, მრიცხველში გვაქვს ჯამი, რომლის პირველი შესაკრებია $(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})$, სადაც $\bar{x}=5$, $\bar{y}=24$, $x_1=1$, $y_1=20$; $\bar{x}$ არის x_1, x_2, ..., x_{10} რიცხვების საშუალო, $\bar{y}$ კი — y_1, y_2, ... y_{10}-ის საშუალო.

	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
	1	20	–4	–4	16	16	16
	1	21	–4	–3	16	9	12
	2	20	–3	–4	9	16	12
	2	22	–3	–2	9	4	6
	4	23	–1	–1	1	1	1
	6	22	1	–2	1	4	–2
	7	36	2	12	4	144	24
	8	25	3	1	9	1	3
	9	26	4	2	16	4	8
	10	25	5	1	25	1	5
ჯამი	50	240			106	200	85

$\bar{x}=\frac{50}{10}=5;$ $\bar{y}=\frac{240}{10}=24;$ $r=\frac{85}{\sqrt{106\cdot 200}}\approx 0,58.$

ამრიგად, კორელაცია არის საშუალო ხარისხის.

10 ახლა კარტების რაოდენობა არის 34, მათ შორის 2 ტუზია, მაშასადამე, ალბათობა, არის $\frac{2}{34}=\frac{1}{17}$.

11 $P(A)=\frac{8}{15}$, $P(\bar{A})=\frac{7}{15}$. ცხადია, $P(A)+P(\bar{A})=1$.

P(არჩევანი A-ს სასარგებლოდ)$=\frac{8}{7}$. გ) თუ ერთი ბირთვი შავია, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ 14 ბირთვიდან, რომელთაგან 8 თეთრია, ვიღებთ ბირთვს და უნდა ვიპოვოთ ალბათობა, რომ ის თეთრია, $P=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$.

12 ვიპოვოთ საშუალო: $\frac{400\cdot5+900\cdot8+1200\cdot4+2000\cdot3}{20}=1000$;

მაშასადამე, სპორტდარბაზში ვარჯიშობს 7 თანამშრომელი. A შეიცავს 7 ელემენტარულ ხდომილობას (ხელშემწყობი შედგების რიცხვი არის 7);

სულ 20 თანამშრომელია:

$$P(A)=\frac{7}{20},\ P(\bar{A})=\frac{13}{20}.$$

P(არჩევანი A-ს სასარგებლოდ)$=\frac{7}{13}$.

13 გოგონები — 24%; $0{,}24x$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{0{,}24x};\qquad 0{,}24x=6,$$

$$x=25.$$

14 პირველი ბირთვისთვის გვაქვს ყუთებში მოხვედრის 2 შესაძლებლობა, ყოველი ასეთი შესაძლებლობისთვის, მეორისთვის გვაქვს 2 შესაძლებლობა, სულ — 4; 4-დან ყოველი შესაძლებლობისთვის, გვაქვს მესამისთვის 2 შესაძლებლობა. სულ, ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შედგება $2\cdot2\cdot2=8$ ელემენტარული ხდომილობისგან.

ლურჯ (ლ) და წითელ (წ) ყუთებში ბირთვების შესაძლო განლაგებას (8 ელემენტარულ ხდომილობას) წარმოვადგენთ ასეთი ცხრილით:

ლ	1; 2; 3	1; 2	1; 3	1	2; 3	2	3	–
წ	–	3	2	2; 3	1	1; 3	1; 2	1; 2; 3

ა) ეს ხდომილობა შეიცავს ერთადერთ ელემენტარულ ხდომილობას — $P=\frac{1}{8}$.

ბ) ასეთი არის 4 ელემენტარული ხდომილობა, $P=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

გ) ვაკვირდებით ცხრილს და აღმოვაჩენთ, რომ ასეთია 3 ხდომილობა — $P=\frac{3}{8}$.

15 ა) აუცილებელი ხდომილობაა — $P=1$

ბ) შეუძლებელი ხდომილობაა — $P=0$

გ) შეუძლებელი ხდომილობაა — $P=0$

დ) შეუძლებელი ხდომილობაა — $P=0$

ე) (2; 3), (12; 13); (22; 23), (32; 33), ..., (232, 233);
(7; 8), (17; 18), (27; 28), (37; 38), ..., (237; 238).

მაშასადამე, $m=24+24=48$

$$n=120$$

$$P=\frac{m}{n}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}.$$

16 რიცხვთა წყვილის პირველი რიცხვი არის ერთ-ერთი რიცხვი მოცემული 6-დან, მეორე რიცხვი — ერთ-ერთი დანარჩენი 5-დან; სულ — 30 წყვილია. მიიღება 30 წილადი. ამ წილადებიდან 15 არის წესიერი წილადი; $P=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$-ზე ნაკლები წილადების რაოდენობა 8-ის ტოლია; $P=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$.

18 I გაკვეთილი შეიძლება იყოს ნებისმიერი 4-დან, II — დარჩენილი სამიდან რომელიმე, III — დარჩენილი 2-დან რომელიმე, IV — დარჩენილი 1 გაკვეთილი. სულ შესაძლო ხდომილობათა რაოდენობაა 4·3·2·1=24. ხელშემწყობი ხდომილობების რაოდენობის დათვლა მოხერხებულია ბოლო — IV გაკვეთილიდან დავიწყოთ. IV გაკვეთილი შეიძლება იყოს 3-დან ნებისმიერი (მათემატიკის გარდა), III გაკვეთილისთვისაც 3 შესაძლებლობაა, II გაკვეთილისთვის 2, პირველისთვის 1. სულ ხელშემწყობ შემთხვევათა რაოდენობაა 3·3·2·1=18. შესაბამისი ალბათობა ტოლია $\frac{18}{24}$-ის. პასუხი: 0,75.

19 7 ბარათის ყველა შესაძლო განლაგების რაოდენობაა 7·6·5·4·3·2·1. მართლაც, I ადგილზე შეიძლება მოხვდეს ნებისმიერი ბარათი შვიდიდან, II ადგილზე — ნებისმიერი დარჩენილი ექვსიდან, მესამეზე — დარჩენილი ხუთიდან რომელიმე და ა. შ. ბოლო ადგილზე — დარჩენილი ერთი.

ბარათების ყველა შესაძლო განლაგებათა რიცხვი არის 7!. მაგრამ ასო „ი“-ს 3-ჯერ გამეორების გამო ამ 7! რაოდენობიდან 3!=6 ერთნაირი აღმოჩნდება. ე. ი. ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობაა 7!:3!, შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა იქნება $\frac{3!}{7!}$.

20 ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობა ოთხნიშნა რიცხვების რაოდენობაა — 9000. ხელშემწყობი შემთხვევების რაოდენობაა: 9·9·9·9. მართლაც, I ადგილზე ციფრის შერჩევის 9 შესაძლებლობაა (0-ის გარდა), II ადგილზეც 9 (პირველ ადგილზე შერჩეული ციფრის გარდა), III და IV ადგილებზეც ცხრა-ცხრა შესაძლებლობაა (წინა ადგილზე შერჩეული ციფრის გარდა). საძიებელი ალბათობაა $\frac{9\cdot 9\cdot 9\cdot 9}{9000}$. პასუხი: 0,729.

შემაჯამებელი წერა №4

თემატური ბლოკი: სტატისტიკა და ალბათობა.

სამიზნე ცნებები: ხდომილობა, ხდომილობის ალბათობა.

შეფასების ინდიკატორები: ცდებისა და ექსპერიმენტის ჩატარებით, ხდომილობის სტატისტიკური ალბათობისა და თეორიული ალბათობის შეფასება, შედეგების პროგნოზირება (მათ. საშ. 7).

ამოცანების ნიმუშები

შეარჩიეთ სწორი პასუხი:

1 თუ ცნობილია, რომ A და B ხდომილობებიდან ერთი მაინც აუცილებლად სრულდება, მაშინ აუცილებლად

ა) $P(A\cup B)=1$; ბ) $P(A\cap B)=0$; გ) $P(A\cup B)=0$; დ) $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

2 ყუთში 3 წითელი, 5 თეთრი და 2 შავი ბირთვია. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბირთვი არ იქნება შავი.

ა) $\frac{3}{5}$; ბ) $\frac{2}{5}$; გ) 0,2; დ) 0,8.

3 გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის ოთხჯერ აგდებისას ერთხელ მაინც მოვა გერბი.

ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{3}{4}$; გ) $\frac{7}{8}$; დ) $\frac{15}{16}$.

4 ყუთში ოთხი ბარათია ზედ დაწერილი თითო ასოთი: „დ“, „ა“, „ლ“ და „ი“. შემთხვევით, თითო-თითოდ ვიღებთ ბარათებს და ვალაგებთ მარჯვნიდან მარცხნივ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შედეგად დაიწერება სიტყვა „დილა“?

ა) $\frac{1}{64}$; ბ) $\frac{1}{32}$; გ) $\frac{1}{24}$; დ) $\frac{1}{4}$.

5 ერთი კამათლის 20-ჯერ გაგორებისას 6-იანი მოვიდა 4-ჯერ. იპოვეთ სხვაობა ამ ცდისას 6-იანის მოსვლის ფარდობით სიხშირესა და კამათლის ერთხელ გაგორებისას 6-იანის მოსვლის ალბათობას შორის.

ა) $\frac{1}{10}$; ბ) $\frac{1}{12}$; გ) $\frac{1}{20}$; დ) $\frac{1}{30}$.

6 სკოლაში 24 უცხოელი სწავლობს. ალბათობა იმისა, რომ ამ სკოლის შემთხვევით შერჩეული მოსწავლე უცხოელია, არის $\frac{3}{20}$. რამდენი მოსწავლე სწავლობს ამ სკოლაში?

ა) 160; ბ) 360; გ) 720; დ) შეუძლებელია დადგენა.

ამოხსენით ამოცანები:

7 ურნაში 1-დან 100-ის ჩათვლით გადანომრილი 100 ბირთვია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან შემთხვევით ამოღებულ ბირთვზე გამოსახული რიცხვი

ა) იქნება 3-ის ჯერადიც და 7-ის ჯერადიც;

ბ) 3-ის ჯერადი, ან 7-ის ჯერადი;

გ) არ იქნება არც 3-ის ჯერადი და არც 7-ის ჯერადი.

8 კლასში 8 ვაჟი და 12 გოგონაა. მათგან შემთხვევით შეარჩიეს 2 მოსწავლე. გამოთვალეთ:

ა) ყველა შესაძლო წყვილების რაოდენობა.

ბ) ალბათობა იმისა, რომ წყვილში ერთი ვაჟი იქნება, ერთი — გოგონა.

პასუხები

1	2	3	4	5	6
ა	დ	დ	გ	დ	ა

7 ა) $\frac{4}{100}$, ბ) $\frac{43}{100}$, გ) $\frac{57}{100}$.

8 ა) 190, ბ) $\frac{96}{190}$.

მითითებები:

1 პირობით, $A \cup B$ აუცილებელი ხდომილობაა და მისი ალბათობა 1-ის ტოლი უნდა იყოს.

3 ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის 16 ხდომილობიდან მხოლოდ ერთი აკმაყოფილებს მოთხოვნას — ოთხივეჯერ საფასურის მოსვლა; 15 ხელშემწყობია.

4 პირველი ბარათის ამოღების 4 შესაძლებლობაა; ყუთში რჩება 3 ბარათი, ამიტომ მეორე ბარათის ამოღების 3 შესაძლებლობაა, მესამის — 2 და მეოთხის — 1; სულ — $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ შემთხვევა, მათგან მხოლოდ ერთია ხელშემწყობი.

5 ფარდობითი სიხშირე $\frac{4}{20}$-ია, ალბათობა — $\frac{1}{6}$.

6 24 მთელი რაოდენობის $\frac{3}{20}$ ნაწილია.

7 ა) რიცხვი უნდა იყოს 21-ის ჯერადი, ასეთია ოთხი რიცხვი.

ბ) 3-ის ჯერადი რიცხვების რაოდენობა 33-ია, 7-ის ჯერადი — 14, მათგან ოთხი ორივეს ჯერადია. მაშასადამე, მითითებული რიცხვების რაოდენობაა: $33+14-4=43$.

გ) ასეთი რიცხვების რაოდენობაა $100-43=57$. შესაბამისი ალბათობა — $\frac{57}{100}$. ამავე შედეგს მოგვცემდა იმის გათვალისწინება რომ დასახელებული ხდომილობაა ბ) პუნქტში.

8 ყოველი მოსწავლე შეიძლება დაწყვილდეს დანარჩენი 19-დან ნებისმიერთან. სულ შეირჩევა $20 \cdot 19$ წყვილი, თუმცა წყვილების ასეთი გზით დათვლისას ყოველი წყვილი 2-ჯერ დასახელდება. მაშასადამე, ყველა შესაძლო წყვილების რაოდენობაა $\frac{20 \cdot 19}{2}=190$; გოგონასგან და ვაჟისგან შემდგარი წყვილების — $8 \cdot 12=96$.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა:

1-6 ამოცანებიდან ყოველი მათგანის სწორი პასუხი შეფასდეს 1 ქულით.

7 ამოცანაში პასუხი ა) პუნქტზე შეფასდეს 0,5 ქულით, ბ) პუნქტზე — 1 ქულით, გ) პუნქტზე — 0,5 ქულით; სულ — 2 ქულა.

8 ამოცანაში ყველა შესაძლო წყვილების რაოდენობის დათვლა შეფასდეს 1 ქულით; გოგონასგან და ვაჟისგან შემდგარი წყვილების რაოდენობის დათვლა — 0,5 ქულით, ალბათობის გამოთვლაც — 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

სემესტრის დასკვნით შემაჯამებელ წერას გამორჩეული მნიშვნელობა აქვს. მასწავლებელს აქვს შესაძლებლობა კიდევ ერთხელ გაანალიზოს კლასის ალბათობის საკითხების ცოდნისა და შესაბამისი უნარების დონე.

1 ამოცანის მიხედვით განმავითარებელი შეფასების დაწყებამდე მიმართეთ კლასს: აღწერონ ცნებები ხდომილობის, აუცილებელი და შეუძლებელი ხდომილობების, ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის; დაასახელონ ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა. აქვე შეიძლება იმსჯელოთ: რა სახის ხდომილობების შემთხვევაში გამოიყენება ეს ფორმულა. ამოცანის განხილვას დაუკავშირეთ სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთის

ცნებების აღწერაც და დასახელებული ხდომილობა, წარმოადგინეთ როგორც ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლეების გაერთიანება. ეს ხდომილობა აუცილებელი ხდომილობაა, მისი ალბათობა 1-ის ტოლია.

(2) ამოცანის განხილვას არსებითად დაეხმარება წინა ამოცანის განხილვის შედეგები. ხელშემწყობია (არ არის შავი) წითელი ან თეთრი ბურთულის მოსვლა — 8 შემთხვევა. სულ შესაძლებელია 10 შემთხვევა. ალბათობაა $\frac{8}{10}$.

(3) ამოცანის განხილვისას მოსალოდნელია ორად გაიყოს მოსწავლეთა მოსაზრებები. ერთნი ჩამოთვლიან ყველა ხდომილობას და მათგან შეარჩევენ ხელშემწყობებს, დანარჩენები კი ამოცანის ამოხსნისას გამოიყენებენ ხდომილობისა და მისი საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობების კავშირის ფორმულას. საწინააღმდეგო ხდომილობაა: საერთოდ არ მოსულა გერბი. ეს ერთადერთი ხდომილობაა 16 ელემენტარული ხდომილობიდან. ამრიგად, საძიებელი ფორმულაა $1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.

(4) მიმართეთ კლასს, დაასახელონ ყველა შესაძლო „სიტყვის" ჩამოთვლის რაიმე წესი. აქტიურად ჩაერთეთ მოსწავლეთა განხილვაში: ყველაზე მარჯვნივ შესაძლებელია აღმოჩნდეს ერთ-ერთი, დასახელებული ოთხი ასოდან — 4 შემთხვევა. ყოველი ასეთი შემთხვევისას მის მარცხნივ შეიძლება განლაგდეს 3 ასო. ამრიგად, ბოლო ორ ადგილზე გვაქვს ასოების განლაგების $4\cdot 3$ შესაძლო შემთხვევა. ასეთი მსჯელობის გაგრძელებით დავადგენთ, რომ ყველა შემთხვევის რაოდენობაა $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$. მათგან სასურველი „დილა" მხოლოდ ერთ შემთხვევაში მიიღება, ალბათობაა $\frac{1}{24}$.

(5) მიმართეთ კლასს, აღწერონ ფარდობითი სიხშირის ცნება და კიდევ ერთხელ დაასახელონ რაიმე ხდომილობის ალბათობის ფორმულა. მიიღებენ, რომ მითითებული სხვაობაა $\frac{4}{20}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$.

(6) მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები ამოცანის ამოხსნის შესახებ.

მოსალოდნელია, რომ თუ საძიებელი რაოდენობა აღნიშნეს x-ით, მაშინ ალბათობის ფორმულის მიხედვით, მიიღებენ $\frac{24}{x}=\frac{3}{20}$. აქვე შეიძლება დაასახელონ პროპორციის თვისება და დაასრულონ ამოცანის ამოხსნა.

(7) ამოცანის განხილვისას სასურველია, კლასმა გაიხსენოს რიცხვის ჯერადის ცნება. შემდეგ კი მოსწავლეები შეეცდებიან მითითებული რიცხვების დასახელებასა და დათვლას. 21-ის ჯერადები იოლად დაითვლება, 100-მდე ასეთი რიცხვი ოთხია. 3-ის ჯერადების დათვლისას, არარაციონალურია მათი ჩამოთვლა. თუ რომელიმე მოსწავლე მათი რაოდენობისთვის შემოგთავაზებთ $[\frac{100}{3}]$ ფორმულას, აუცილებლად შეუქეთ პასუხი, სხვებს კი სთხოვეთ კომენტარები გააკეთონ ამ ფორმულის შესახებ. ანალოგიურად მიიღებთ 7-ის ჯერადთა რაოდენობას 100-მდე — $[\frac{100}{7}]=14$.

გ) დავალების ამოხსნა კლასმა შეიძლება სიმრავლეებისთვის ცნობილ ფორმულას დაუკავშიროს:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

(8) მიმართეთ მოსწავლეებს, წარმოადგინონ ვერსიები შესაძლო წყვილების სრული რაოდენობის დასათვლელად. ეს განხილვა მოსწავლეებს მიიყვანს უმარტივეს წესამდე. აქ

შეიძლება მარტივი შემთხვევაც განიხილოთ — ოთხელემენტიანი სიმრავლე $\{a;\ b;\ c;\ d\}$ და დაასახელოთ ყველა შესაძლო წყვილი.

a-ს მიერ შექმნილი წყვილებია: $(a;\ b)$, $(a;\ c)$, $(a;\ d)$;

b-ს მიერ შექმნილი წყვილებია: $(b;\ a)$, $(b;\ c)$, $(b;\ d)$;

c-ს მიერ შექმნილი წყვილებია: $(c;\ a)$, $(c;\ b)$, $(c;\ d)$;

d-ს მიერ შექმნილი წყვილებია: $(d;\ a)$, $(d,\ b)$, $(d,\ c)$.

მოსწავლეები შენიშნავენ რომ ასეთი წესით დათვლისას ყოველი წყვილი ორჯერ დასახელდება. ამრიგად, აქ განსხვავებულ წყვილთა რაოდენობაა $\frac{4\cdot 3}{2}$. ანალოგიურად, 8 ამოცანაში მიიღება შესაძლო წყვილთა სრული რაოდენობა — $\frac{20\cdot 19}{2}=190$. გოგონასა და ვაჟისგან შემდგარი წყვილების რაოდენობა $8\cdot 12=96$ (თითოეული გოგონა 8 ვაჟთან შეიძლება დაწყვილდეს, 12 გოგონა კი შექმნიდა $12\cdot 8$ წყვილს).

განმავითარებელი შეფასების დასასრულს, ტრადიციისამებრ, ჩაინიშნეთ თქვენი მოსაზრებები კლასში არსებული ვითარების შესახებ — ყველა წინსვლა და ყველა **შეფერხება მოსწავლეთა საგანმანათლებლო პროცესში**. ეს მოსაზრებები კარგ სამსახურს გაგიწევთ მიმდინარე და სამომავლო მუშაობის უფრო ნაყოფიერად წარმართვაში.

წარმოგიდგენთ მე-4 შემაჯამებელი წერის მიხედვით მოსწავლეთა შეფასებას სოლო ტაქსონომიის 5 დონით (იხ. გვ. 14).

პრესტრუქტურული დონე. ნაშრომში იკვეთება, რომ მოსწავლე ვერ ერკვევა ალბათობის ცნებებსა და სათანადო ნოტაციაში, ბუნდოვანია მისი ცოდნა კომბინატორიკის ელემენტარულ საკითხებზე, ვერ წვდება დავალებათა შინაარსს.

უნისტრუქტურული დონე. მოსწავლე იცნობს ალბათობის ზოგიერთ ცნებას, ზოგჯერ შეუძლია მარტივი ამოცანის პასუხის ამოცნობა. იცნობს ალბათობასთან დაკავშირებული ინსტრუმენტების დანიშნულებას. მარტივ შემთხვევებში ახერხებს შესაძლო შემთხვევათა სიხშირის დათვლას. არ აქვს გააზრებული მიმართება ფარდობის სიხშირესა და ალბათობას შორის.

მულტისტრუქტურული დონე. აქვს სწორი წარმოდგენა რაიმე ხდომილობის ალბათობასა და ფარდობით სიხშირეზე. იცნობს სხვა ცნებათა შინაარსსაც, თუმცა მათი ურთიერთკავშირი მკაფიოდ არაა გარკვეული; არართული ამოცანების განხილვისას სწორად ითვლის რაიმე ხდომილობის ფარდობით სიხშირეს, იყენებს კომბინატორიკის წესებს, ზოგჯერ მცირე ხარვეზებით. შწორად აღიქვამს ტექსტური ამოცანების შინაარსს და მათი გადაჭრისას არ უშვებს უხეშ შეცდომებს. გამოყენებული ნოტაცია გამართულია.

მიმართებითი დონე. მოსწავლე კარგად იცნობს განსახილველ ცნებებს და მიმართებებს მათ შორის. მაგალითად, მიმართებას ხდომილობის ალბათობასა და ფარდობით სიხშირეს შორის. კარგად იყენებს კომბინატორიკის ელემენტებს ალბათობის ძიებისას, ტექსტურ ამოცანებსაც სწორად განიხილავს და დგას ადეკვატურ ნაბიჯებს მათ ამოსახსნელად, თუმცა ზოგჯერ იყენებს ამოხსნის არარაციონალურ გზას. შეიძლება შეგვხვდეს უმნიშვნელო „ტექნიკური“ ხარვეზები.

გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. ნაშრომში დახვეწილადაა გააზრებული ალბათობის, კომბინატორიკის და სტატისტიკის შესწავლილი ცნებები და მიმართებები. ამოცანების გადაჭრისას იკვეთება ავტორის მზაობა სხვადასხვა, უფრო რთული ან მოცემული ამოცანების განზოგადებით მიღებული დავალებების გამოკვლევის მიმართ. ამოცანათა ამოხსნის გზები რაციონალურია. მასალის გადმოცემა სულყოფილია.

ლიტერატურა

1. ა. ბენდუქიძე. მათემატიკა, სერიოზული და სახალისო, თბილისი, 1988.
2. თ. გეგელია. მათემატიკის სპეციალური კურსი, თბილისი, განათლება, 1985.
3. თ. გეგელია. სასკოლო მათემატიკის ფუნდამენტური ცნებები. თბილისი, 1985.
4. გ.გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე. მათემატიკის სწავლების რეფორმა და მისაღები გამოცდები. ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში, 1977, 4.
5. ლ. გოკიელი. მათემატიკის საფუძვლები, თბილისი, 1958.
6. თ. ვეფხვაძე. მათემატიკის რჩეული თავები. I ნაწ., თბილისი, 1997.
7. ე. იმერლიშვილი. სასკოლო მათემატიკის განვითარების ისტორია, თბილისი, 1988.
8. რ. კურანტი, ჰ. რობინსონი. რა არის მათემატიკა. თარგმანი რუსული გამოცემიდან, თბილისი, 1961.
9. ჰ. მელაძე, ნ. სხირტლაძე. გამოყენებითი მათემატიკის საწყისები, თბილისი, 2000.
10. ეროვნული სასწავლო პროგრამა. საგნობრივი პროგრამა მათემატიკაში. პროექტი, 2005.
11. შ. ფხაკაძე. განტოლებათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი, თბილისი, 1974.
12. ფ. ხარშილაძე. მათემატიკის სასკოლო კურსის თანამედროვე საფუძვლები, თბილისი, 1981.
13. Н. Бурбаки. Очерки по истории математики, Москва, 1963.
14. Б.В. Гнеденко. Статистическое мышление и школьное математическое образование, Математика в школе, 1968, №1.
15. Диофант, Арифметика, Москва, 1975.
16. В.А. Добровольский. Даламбер. «Знание», Москва, 1968.
17. Евклид. Начала. Москва, 1950.
18. М. Клайн. Математика. Поиск истины. Москва, 1988.
19. Ф. Клайн. Элементарная математика с точки зрения высшей, т. 1, т. 2, 1972.
20. А.Н. Колмогоров. Математика – наука и профессия, Москва, 1968.
21. Ю.А. Макаренков, А.А. Столяр. Что такое алгоритм, Минск, 1989.
22. Математика в понятиях, определениях и терминах, т. 1, 2. Москва, 1978.
23. Математическая энциклопедия (в пяти томах). Москва, 1975.
24. Методика преподавания математики в средней школе, Москва, 1977.
25. На путях обновления школьного курса математики. Сборник статей, Москва, 1978.
26. С.М. Никольский и др. Арифметика, Москва, 1988.
27. Ж. Пиаже и др. Преподавание математики, пер. с франц. Москва, 1960.
28. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения, пер. с англ., Москва, 1975.
29. Д. Пойа. Как решить задачу. Перев. с анг., Москва, 1963.
30. Д. Пойа. Математическое открытие, Пер. с англ., Москва, 1976.
31. Д. Пидоу. Геометрия и искусство, Москва, 1960.
32. А.В. Погорелов. Геометрия 7–11. Москва, 1990.
33. А. Пуанкаре. О науке, Москва, 1963.

34. В. Серве. Аксиоматика и элементарная геометрия. Мат. в школе, №6, 1967.

35. Франсуа–Мари Жерар, Ксавье Рожье. Разработка и анализ школьных учебников. При участии Кристиан Боснан и др., Москва, 1993.

36. Г. Фройденталь. Математика в науке и вокруг нас. Москва, 1977.

37. Г. Фройденталь. Математика как педагогическая задача, Москва, ч. 1. 1982, ч. II, 1983.

38. А. Фуше. Педагогика математики, Москва, 1969.

39. И.Ф. Шарыгин. Геометрия 7–9, Москва, 1998.

40. И.М. Яглом. О школьном курсе геометрии, Математика в школе, №2, 1968, 53–58.

41. Н.Я. Виленкин, К.И. Дунаичев, Л.А. Калутнин, А.А. Столяр. Современные основы школьного курса математики, Москва, 1980;

42. Н.Я. Виленкин, К.И. Дунаичев, Л.А. Калутнин, А.А. Столяр. Методика преподавания математики в средней школе. Москва, 1977;

43. Преподавание алгебры в 6–8 классах. Сборник статей, Москва, 1980.

44. M.R Schroder. Numbber Theory in Science and Communication – New York: Springer, 1984;

45. K. Rosen, Elemntary Number Theory and its Applications, Reading (Mass.). Addision Wesley, 1984

46. H. Riesel . Prime Numbers and Computer Methods for Factorisation Boston; Burkhaser, 1987

47. Houghton Miffin Mathematics Miffin Company, Bostons, 1987

48. Mathematical Unlimited, Printed in the United States of America, 1988

49. Middle Grades, Mathematics an Interactive Approach, Printed in the USA, 1995

50. Precalculus. Larson/Hostetler. Printed in the Unites States of America, 1996.

დამატებითი ბეჭდური და ელექტრონული რესურსები

სასწავლო პროცესში დიდ დახმარებას გაგიწევთ ბეჭდური და ელექტრონული რესურსები. განსაკუთრებული მნიშვნელობა შეიძინა ამ რესურსებმა დისტანციური სწავლებისას:

1. ტელესკოლა-1TV.

2. *www.silkschool.ge*. „საშინაო სკოლა“, გაკვეთილები, მათემატიკა.

3. როგორ ვასწავლოთ მოსწავლეებს აზროვნება, მეთოდოლოგიური სახელმძღვანელო, თბილისი, 2007.

4. გიორგი ნოზაძე, მოსწავლეთა საჭიროებანი და მიზნები მათემატიკის სწავლის დროს, 13 მარტი, 2017 წელი, *www.maswavlebeli.ge*.

5. რობერტ ჯ. მარზანო, დებრა ჯ. ფიქერინგი, ჯეინ ი. ფოლოქი, ეფექტური სწავლება სკოლაში. მასწავლებელთა პროფესიული განვითარების ცენტრი, 2009.

6. ეკატერინე კორძაძე, „მათემატიკური წიგნიერება“, სამოქალაქო განვითარების ინსტიტუტი, თბილისი, 2012.

7. ტერმინოლოგიური ლექსიკონი, *www.ncp.ge* (ეროვნული სასწავლო გეგმების პორტალი).

8. „მათემატიკა“, სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტი მათემატიკაში.

9. ინტერნეტრესურსი: *Geogebra.org.*

10. *https://www.youtube.com/playlist?list=PLZAJN80qYfiJ4uPrcdg8NKCZ-eJhx-ulv&fbclid=IwAR2yUsK8aFZtPTRoeyCTlcNuKkmHjUXYPdRagmHnzdeLOAoy8gADFqqjtjE.*

11. *https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standarts/Positions,-Standards-and-Expectations/ (National Council of Teachers of Mathmatics)*

12. *Develping Pedagogic Skills for the Use of the Interactive Whiteboard in Mathematics [PDF].*

13. ინტერნეტრესურსი: *Desmos.com.*