ნანა ჯაფარიძე • მაია წილოსანი • ნანი წულაია

მათემატიკა 11

მოსწავლის წიგნი

ნანა ჯაფარიძე • მაია წილოსანი • ნანი წულაია

მათემატიკა 11

მოსწავლის წიგნი

ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა

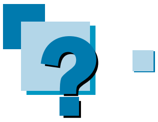
სარჩევი

როგორ ვისარგებლოთ წიგნით

წიგნზე მუშაობა რომ გაგიადვილდეთ, მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ გაგაცნოთ წიგნის აგებულება.

წიგნი შედგება თავებისაგან, ხოლო თითოეული თავი — პარაგრაფებისგან. ყოველ თავში მოცემულია ტესტები რუბრიკით „შეამოწმე შენი ცოდნა“. ტესტებზე მუშაობა დაგეხმარებათ თვითშემოწმებასა და შესწავლილი მასალის განმტკიცებაში. წიგნში განმარტებები დაბეჭდილია მუქი შრიფტით, ხოლო თვისებები, ფორმულები, ზოგიერთი საჭირო დასკვნა — ფერად ფონში.

თითქმის ყოველ თავში მოცემულია ამ თავში გადმოცემულ მასალასთან დაკავშირებული საინტერესო თემა.ყოველ პარაგრაფში შეხვდებით ზოგიერთს შემდეგი ნიშნებიდან:



- უმარტივესი კითხვები, რომელთაც ახალი მასალის ახსნის პროცესში თავად მოსწავლემ უნდა გასცეს პასუხი;

- წყვილებში სამუშაო;

*

- შედარებით რთული ამოცანა;

- სავარჯიშოები, რომელიც ემსახურება გავლილი მასალის გამეორებას;

- საგულისხმო ფაქტი.

წიგნის ბოლოს მოცემულია საგნობრივი საძიებელი და შემოკლებული აღნიშვნებისთვის გამოყენებული მათემატიკური ნიშნები. გთავაზობთ აგრეთვე ზომის ერთეულებს, ლათინურ და ბერძნულ ანბანს, კვადრატების ცხრილს და ამოცანების პასუხებს, დამხმარე ლიტერატურის ჩამონათვალს.

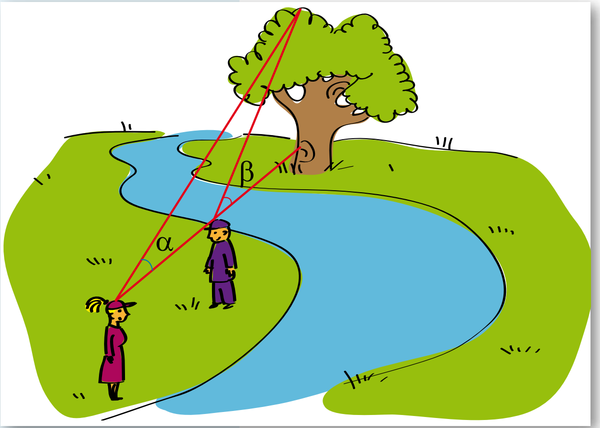
გისურვებთ წარმატებებს!

I თავი

ამ თავში თქვენ გაეცნობით ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, მათ თვისებებს და გრაფიკებს. დამოკიდებულებებს ერთი და იგივე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

ისწავლით ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივებას და იგივეობათა დამტკიცებას. ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნას.

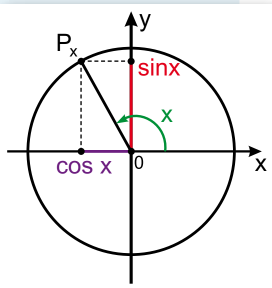
1 ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები

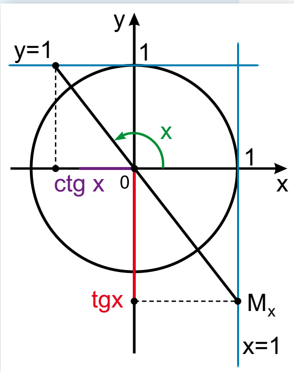


თქვენთვის უკვე ცნობილია ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები.

გავიხსენოთ

■ რას ეწოდება ტრიგონომეტრიული წრეწირი?





თუ P_x წერტილი მიიღება $P_0(1;\ 0)$ წერტილის O წერტილის მიმართ x რადიანის ტოლი კუთხით მობრუნებით, მაშინ ვიცით, რომ მიღებული P_x წერტილის ორდინატას x კუთხის **სინუსს**, აბსცისას კი x კუთხის **კოსინუსს** უწოდებენ. ხოლო OP_x წრფისა და x=1 (ტანგენსების ღერძი) წრფის გადაკვეთის წერტილის ორდინატა x კუთხის **ტანგენსია**, OP_x წრფისა და y=1 (კოტანგენსების ღერძი) წრფის გადაკვეთის წერტილის აბსცისა კი - x კუთხის **კოტანგენსი**.

შესაბამისად,

$x \to \sin x$, $\quad y=\sin x$
$x \to \cos x$, $\quad y=\cos x$
$x \to tgx$, $\quad y=tgx$
$x \to ctgx$, $\quad y=ctgx$

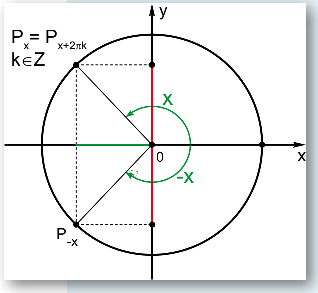
რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია.

ქვემოთ მოცემულია ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიულ მნიშვნელობათა ცხრილი.

α	0	$\frac{r}{6}$	$\frac{r}{4}$	$\frac{r}{3}$	$\frac{r}{2}$	$\frac{2}{3}r$	$\frac{3}{4}r$	$\frac{5}{6}r$	π	$\frac{3}{2}r$	2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0
ctgα	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

ჩამოვაყალიბოთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებები.

1. y=sinx და y=cosx ფუნქციათა თვისებები



y = sinx ფუნქცია

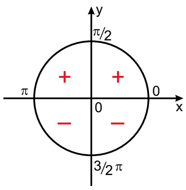
1. D(sin)=R

2. E(sin) = [–1; 1]

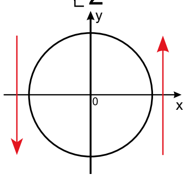
3. $\forall x \in R$: sin(–x) = –sinx
ფუნქცია კენტია - გრაფიკი სიმეტრიულია 0 (0,0) წერტილის მიმართ.

4. $\forall x \in R$: sin(x+2πn)=sinx, $n \in Z$
ფუნქცია პერიდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია: $T_0 = 2\pi$

5. ნიშანმუდმივობის შუალედები:
$x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$, sinx>0
და
$x \in (\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$,
$n \in Z$, sinx<0



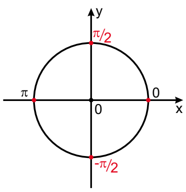
6. $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n\,;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$
ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია.



$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n\,;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$
ფუნქციის კლებადობის შუალედებია.

7. ფუნქციის ნულებია:
sinx=0 ⇔ x=πn, $n \in Z$

8. სინუსი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა:



sinx=1 ⇒ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

ხოლო უმცირესს, როცა:

sinx=–1 ⇒ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

y=cosx ფუნქცია

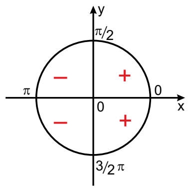
1. D(cos)=R

2. E(cos) = [–1; 1]

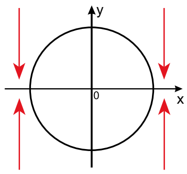
3. $\forall x \in R$: cos(–x) = –cosx
ფუნქცია ლუწია – გრაფიკი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ.

4. $\forall x \in R$:cos(x+2πn)=cosx, $n \in Z$
ფუნქცია პერიოდულია.
უმცირესი დადებითი პერიოდია: $T_0 = 2\pi$.

5. ნიშანმუდმივობის შუალედები:
$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\,;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$, cosx>0
და
$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\,;\ \frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$,
$n \in Z$, cosx<0



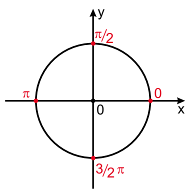
6. $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$
ფუნქციის კლებადობის შუალედებია.



$x \in (\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$, $n \in Z$
ფუნქციის ზრდადობის შუალედები.

7. ფუნქციის ნულებია:
cosx=0 ⇔ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

8. კოსინუსი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა:



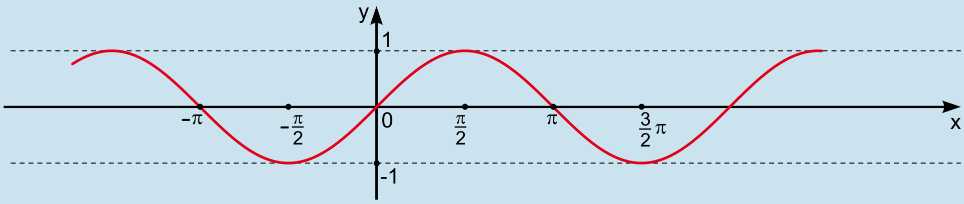
cosx=1 ⇒ x=2πn, $n \in Z$

ხოლო უმცირესს, როცა:

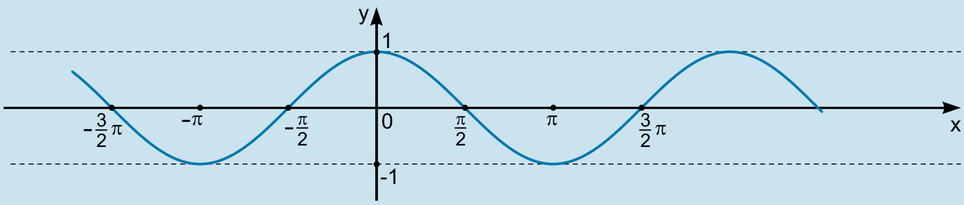
cosx=–1 ⇒ x=π+2πn, $n \in Z$

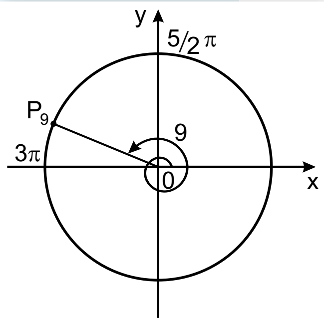
ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებით დაასაბუთეთ (გაიხსენეთ) ზემოთ ჩამოყალიბებული თვისებები.

y=sinx ფუნქციის გრაფიკი — სინუსოიდა.



y=cosx ფუნქციის გრაფიკი — კოსინუსოიდა.



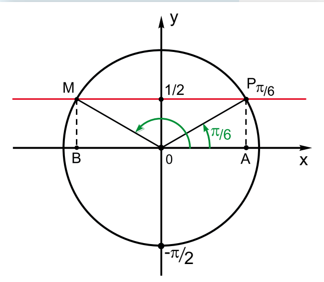


მაგალითი 1.

რომელი მეოთხედის კუთხეა 9 რადიანი?
ამოხსნა:

$\pi \approx 3{,}14 \quad 3\pi > 9,$

$\frac{5}{2}\pi \approx 7{,}85$. ე.ი. 9 რადიანი მე-2 მეოთხედის კუთხეა.



მაგალითი 2.

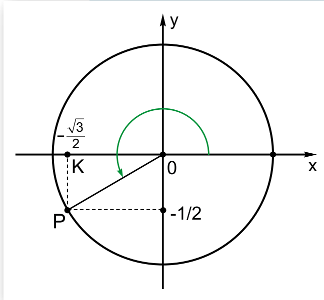
ტრიგონომეტრიული წრეწირის საშუალებით იპოვეთ ყველა ის α კუთხე, რომელიც მოთავსებულია [–4π;4π] შუალედში და რომელთათვისაც სრულდება $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

ამოხსნა:

გავავატაროთ $y=\frac{1}{2}$ წრფე. იგი წრეწირს ორ წერტილში გადაკვეთს. როგორც ცნობილია, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ე.ი. ერთ-ერთი ამ კუთხეთაგანი არის $\frac{\pi}{6}$. $\Delta OMB=\Delta OP_{\frac{\pi}{6}}A \Rightarrow \angle BOM = \angle OP_{\frac{\pi}{6}}A \Rightarrow \angle AOM = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

სინუსის პერიოდულობის გათვალისწინებით საძიებელი კუთხეები იქნებიან: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13}{6}\pi$; $\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11}{6}\pi$; $\frac{\pi}{6}-4\pi=-\frac{23}{6}\pi$, ასევე $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{17}{6}\pi$; $-\frac{7}{6}\pi$; $-\frac{19}{6}\pi$.

მაგალითი 3.



იპოვეთ ყველა ის რიცხვი, რომლის შესაბამისი წერტილი ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე არის $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ წერტილი.

ამოხსნა:

ცხადია, P წერტილი ნამდვილად ტრიგონომეტრიული წრეწირის წერტილია, რადგან $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$. ΔPOK-ში $PK=\frac{1}{2}$; $OK=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $OP=1$. $\sin\angle KOP=\frac{1}{2}$, $\angle KOP=\frac{\pi}{6}$. ე.ი. P არის ყველა $\frac{7}{6}\pi+2\pi k,\ k\in Z$ რიცხვების და მხოლოდ მათი შესაბამისი წერტილი.

მაგალითი 4.

იპოვეთ $f(x)=\sin 3x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

ამოხსნა:

თუ T_0 არის f(x) ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი, მაშინ უნდა შესრულდეს $f(x)=f(x+T_0)$.

$f(x+T_0)=\sin(3(x+T_0))=\sin(3x+3T_0)$ მივიღეთ:

$\sin 3x=\sin(3x+3T_0)$, რადგან $T_0(\sin)=2\pi$, ე.ი. $3T_0=2\pi \Rightarrow T_0=\frac{2}{3}r$

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. თუ $0°<\alpha<90°$, მაშინ α კუთხე __?__ მეოთხედის კუთხეა.

2. თუ α არის II მეოთხედის კუთხე, მაშინ __?__ $<\alpha<$ __?__.

3. თუ $0°<\alpha<180°$, მაშინ α კუთხე __?__ ან __?__ მეოთხედის კუთხეა.

4. ჩასვით უტოლობის ნიშანი ისე, რომ გამოვიდეს ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობა.

ა) $\cos\frac{r}{13}$ __?__ $\cos^2\frac{r}{13}$;   ბ) $\sin\frac{r}{8}$ __?__ $\sin^2\frac{r}{8}$;

გ) $\sin\frac{r}{9}$ __?__ $\sin\frac{r}{9}\cos\frac{r}{7}$;   დ) $\cos\frac{18r}{15}$ __?__ $\cos\frac{18r}{5}\sin\frac{11r}{3}$.

სავარჯიშოები:

1 განსაზღვრეთ ერთეულოვან წრეწირზე წერტილის კოორდინატები, რომელიც მიიღება $P_0(1;0)$ წერტილის α კუთხით მობრუნებით, თუ $\alpha=$

ა) 3π;   ბ) $\frac{3r}{2}$;   გ) $-270°$;   დ) $1080°$;   ე) $-90°$;   ვ) $-\frac{r}{4}$.

2 განსაზღვრეთ ერთეულოვან წრეწირზე $P\alpha$ წერტილის კოორდინატები, თუ $OP\alpha$ სხივი აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს α კუთხეს, სადაც α ტოლია:

ა) $\frac{2\pi}{3}$; ბ) $\frac{3\pi}{4}$; გ) $\frac{5\pi}{6}$; დ) π; ე) $\frac{7\pi}{6}$; ვ) $\frac{3\pi}{2}$;

ზ) $\frac{7\pi}{4}$; თ) $\frac{11\pi}{6}$; ი) $\frac{\pi}{3}$; კ) $-\frac{3\pi}{4}$; ლ) $-\pi$; მ) $-\frac{\pi}{2}$.

3 იპოვეთ x-ის მნიშვნელობა, თუ

ა) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ და $-90°<x<90°$;

ბ) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ და $90°<x<270°$;

გ) $\cos x = -\frac{1}{2}$ და $360°<x<540°$;

დ) $\sin x = -\frac{1}{2}$ და $-270°<x<90°$.

4 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\dfrac{\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\frac{3\pi}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \cos(-\pi) - \sin\frac{\pi}{4}}$;

ბ) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^2}$;

გ) $2\sin\frac{\pi}{2} - \cos^2\frac{\pi}{4} + 3\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin^2\frac{\pi}{4}$;

დ) $-4\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

5 დაადგინეთ ლუწია თუ კენტი მოცემული ფუნქცია

ა) $y=\sin 5x+\sin 3x+\sin x\cos 2x$; ბ) $y=\cos 4x+\sin^3\frac{x}{2}\sin x+5x^2$;

გ) $y=\sin|x|\cdot\cos 2x$; დ) $y=\operatorname{tg}x\cdot\cos 2x+\sin x\cos 4x$.

6 დაადგინეთ მოცემული ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი

ა) $y=2\sin x$; ბ) $y=\sin 2x$; გ) $y=\frac{\cos x}{2}$; დ) $y=\sin^2 x$;

ე) $y=\cos 3x$; ვ) $y=\sin x+\cos 2x$; ზ) $y=|\cos 2x|$; თ) $\sin\frac{x}{4}$.

7 ერთეულოვან წრეწირზე ორი A(0;1) და B(1;0) წერტილი ერთდროულად იწყებს მოძრაობას ერთი და იმავე მიმართულებით. A წერტილი წუთში შემოწერს 60°-იან რკალს, ხოლო B წერტილი — 42°-იანს. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ წუთში მოხდება მათი შეხვედრა

ა) პირველი? ბ) მეორე? გ) k-ური?

8 ერთეულოვან წრეწირზე ორი A(0;1) და B(1;0) წერტილი ერთდროულად იწყებს მოძრაობას საწინააღმდეგო მიმართულებით. A წერტილი მოძრაობს უარყოფითი მიმართულებით და ყოველ წუთში შემოწერს 20°-იან რკალს, ხოლო B წერტილი დადებითი მიმართულებით და ყოველ წუთში მის მიერ გავლილი რკალის გრადუსული ზომა 25°-ია. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ წუთში მოხდება მათი შეხვედრა: ა) პირველი? ბ) მეორე? გ) k-ური?

9* აჩვენეთ, რომ თუ $0<\alpha<\frac{r}{2}$, მაშინ $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

გ

10 ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში:
$x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

11 იპოვეთ x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(g(x))=0$, თუ $f(x)=x^2-5x-6$ და $g(x)=x^2$.

12 იპოვეთ $\sqrt{(3-a)(5+a)}$, თუ $\sqrt{3-a}+\sqrt{5+a}=4$.

13 ამოხსენით სისტემა (მით.: გამოიყენეთ იგივეობა $[x]+\{x\}=x$).

$$\begin{cases}[x]+\{y\}=2,3\\ [y]+\{x\}=1,2\end{cases}.$$

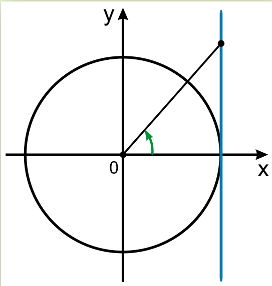
14 a-ს რა მნიშვენოლებისთვის არის $f(x)=(a-2)x+3a-4$ ფუნქცია
ა) ლუწი; ბ) კენტი.

15 a-ს რა მნიშვენოლებისთვის არის $f(x)=(a+3)x+5a$ ფუნქცია პერიოდული?

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

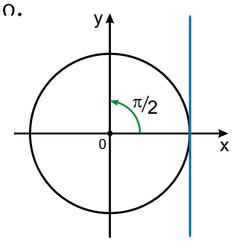
16 იპოვეთ ა) $y=\sin kx$; ბ) $y=\cos kx$ ფუნქციის პერიოდი, უმცირესი დადებითი პერიოდი.

2 y=tgx და y=ctgx ფუნქციათა თვისებები

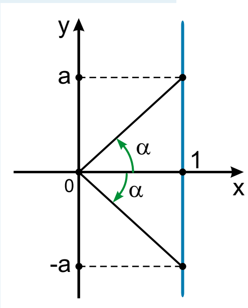


1. ააგეთ კუთხე, რომლის ტანგენსი (კოტანგენსი) ტოლია:
ა) 1-ის, ბ) 2-ის, გ) 3-ის.

ჩამოვაყალიბოთ y=tgx ფუნქციის ძირითადი თვისებები.

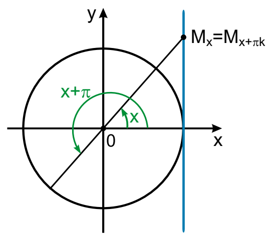


1. ტანგენსის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ სახის რიცხვებისა.



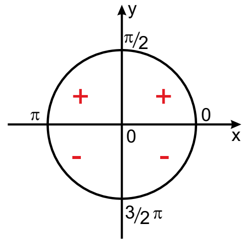
2. E(tg)=R

3. $\forall x\in D(tg)$-თვის $tg(-x)=tgx$, ე.ი. ფუნქცია კენტია.



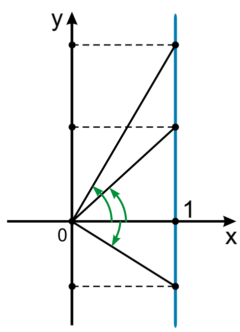
4. $\forall x\in D(tg)$-თვის $tg(x+\pi k)=tgx,\ k\in Z$ – ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია π.

5. ტანგენსის ნიშანმუდმივობის შუალედები:
$x\in(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k),\ k\in Z$ შუალედებში $tgx>0$ და
$x\in(\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi+\pi k),\ k\in Z$ შუალედებში $tgx<0$.



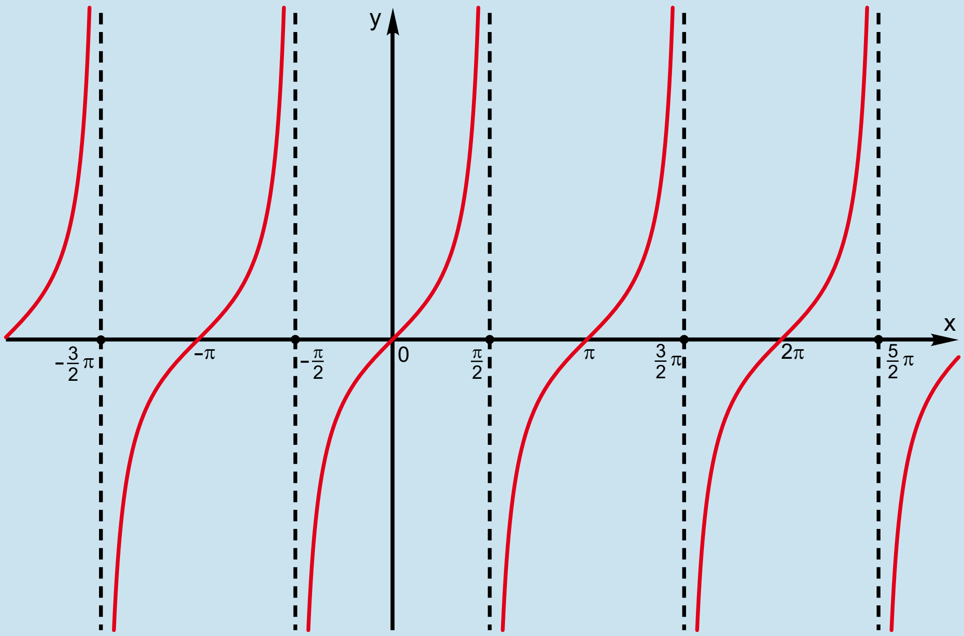
6. $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\ ;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z$ შუალედებში y=tgx ფუნქცია ზრდადია.

აჩვენეთ, რომ როცა x უახლოვდება $\frac{\pi}{2}$-ს და $x<\frac{\pi}{2}$, tgx-ის მნიშვნელობები უსაზღვროდ იზრდება - ხდება რაგინდ დიდი, მაგრამ როცა x უახლოვდება $-\frac{\pi}{2}$-ს და $x>-\frac{\pi}{2}$, მაშინ $|tgx|$-ის მნიშვნელობები აბსოლუტური სიდიდით ისევ უსაზღვროდ იზრდება.

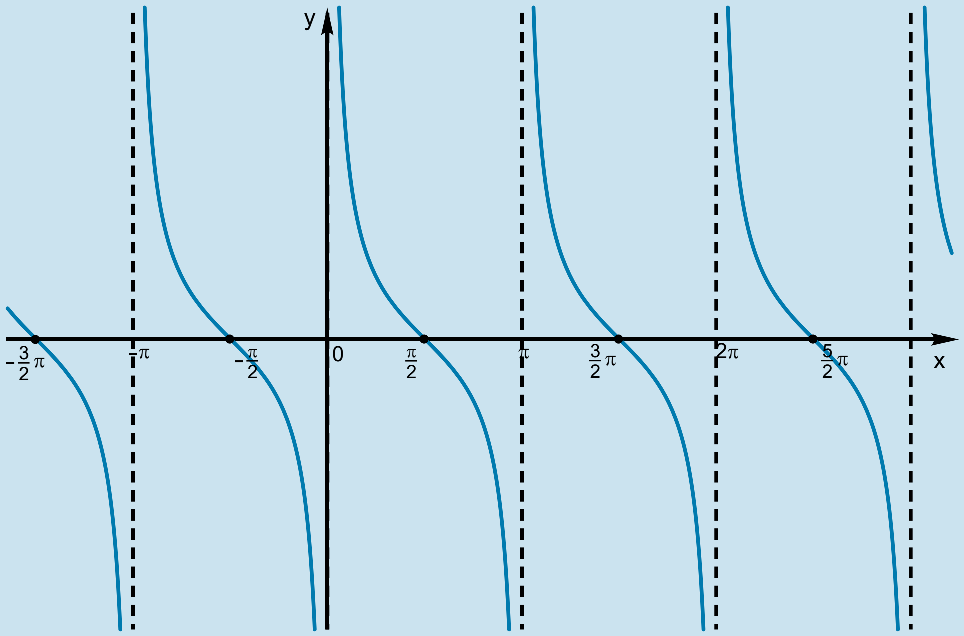


7. ტანგენსის ნულებია: თუ $tgx = 0$, მაშინ $x=\pi k,\ k\in Z$.

y=tgx ფუნქციის გრაფიკი - ტანგენსოიდა



y=ctgx ფუნქციის გრაფიკი - კოტანგენსოიდა



ა) დაასაბუთეთ (გაიხსენეთ) y=tgx ფუნქციის თვისებები;
ბ) ჩამოაყალიბეთ და დაასაბუთეთ y=ctgx ფუნქციის თვისებები.

მაგალითი 1.

იპოვეთ $f(x)=tg5x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

ამოხსნა:

თუ f ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი T_o-ია, მაშინ უნდა შესრულდეს: $f(x+T_o)=f(x)$.

$f(x+T_o)=tg(5(x+T_o))=tg(5x+5T_o)$, მივიღეთ: $tg(5x+5T_o)=tg(5x)$.

რადგან $(T_o(tgx)=\pi) \Rightarrow (5T_o=\pi) \Rightarrow T_o=\frac{\pi}{5}$.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}-3\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+5\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

ბ) $4\sin^2\frac{\pi}{3}-5\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}+9\cos^2\frac{\pi}{3}-3\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}$.

2 ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა პერიოდულობის გათვალისწინებით გამოთვალეთ:

ა) $\dfrac{2\sin^2(-2490^\circ)+\cos^2 420^\circ-2\mathrm{tg}^2(-2940^\circ)}{3\sin(-1500^\circ)-\sin^2(-990^\circ)}$;

ბ) $4\sin 330^\circ\cdot\cos(-240^\circ)\cdot\mathrm{tg}120^\circ-2\cos 150^\circ\cdot\mathrm{tg}(-315^\circ)$;

გ) $\dfrac{\cos 1530^\circ\cdot\mathrm{tg}1410^\circ-\mathrm{tg}^2 2220^\circ\cdot\sin 1845^\circ}{\cos^2(-2550^\circ)}$.

3 შეადარეთ ერთმანეთს:

ა) $\mathrm{tg}37^\circ$ და $\mathrm{tg}57^\circ$; ბ) $\mathrm{tg}3^\circ$ და $\mathrm{tg}3$; გ) $\mathrm{tg}72^\circ$ და $\mathrm{tg}1$;

დ) $\mathrm{ctg}54^\circ$ და $\mathrm{ctg}154^\circ$; ე) $\mathrm{ctg}32^\circ$ და $\mathrm{ctg}2$; ვ) $\mathrm{ctg}104^\circ$ და 0.

4 იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე:

ა) $y=5\sin x$; ბ) $y=\cos x-2$; გ) $y=\mathrm{tg}5x$;

დ) $y=|\mathrm{tg}x|$; ე) $y=\mathrm{tg}x-3$; ვ) $y=\mathrm{ctg}^2x$.

5 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=-1$; ბ) $\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=1$; გ) $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$;

დ) $\cos(\pi+x)=-1$; ე) $\mathrm{tg}(x-\pi)=1$; ვ) $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

6 იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $y=\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x$; ბ) $y=\mathrm{tg}2x+\mathrm{ctg}2x$;

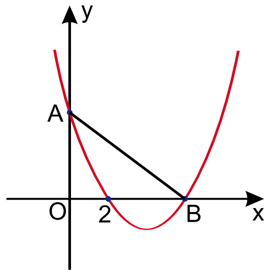
გ) $y=\sin 2x+\mathrm{tg}x$; დ) $y=\mathrm{tg}\frac{5}{6}x+8$.

7 რომელია მეტი:

ა) $\sin 1980^\circ$ თუ $\mathrm{tg}1980^\circ$; ბ) $\mathrm{tg}1$ თუ $\mathrm{arctg}1$;

გ) $\mathrm{tg}2$ თუ $\mathrm{tg}3$; დ) $\mathrm{tg}1$ თუ $\mathrm{tg}2$.

8 $f(x)$ არის კენტი პერიოდული ფუნქცია, რომლის დადებითი პერიოდია 7. იპოვეთ $f(13)$ თუ $f(1)=8$.



9 ნახაზზე მოცემულია $y=x^2-6x+c$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობი.

10 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის $x=2$ რიცხვი მოთავსებულია $x^2+(a-2)x+3a=0$ განტოლების ამონახსნებს შორის.

11 მოცემულია $f(x)$ წრფივი ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ $y=f(f(x))$ ფუნქცია აგრეთვე წრფივია.

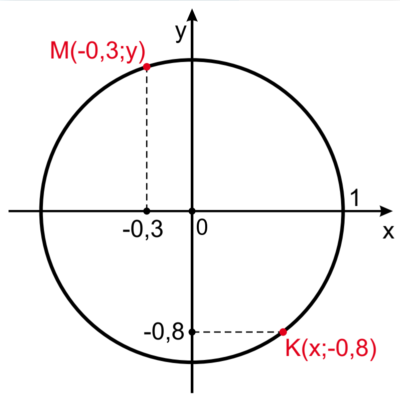
12 ამოხსენით განტოლება:

ა) $[x]=2$; ბ) $\{2x\}=0,1$.

13 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $x^2-(a+1)x+a^2+a-8=0$ განტოლების ერთი ფესვი მეტია 2-ზე, მეორე ნაკლებია 2-ზე.

ჯგუფური მეცადინეობა

2 დამოკიდებულება ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის



1. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ M და K წერტილების უცნობი კოორდინატები.

2. ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებით დაამტკიცეთ, შემდეგ ფორმულათა სამართლიანობა:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (1)

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, თუ $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ (2)

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, თუ $\alpha\neq\pi+\pi k,\ k\in Z$ (3)

$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha=1$, თუ $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in Z$ (4)

(1) ფორმულიდან ადვილად მიიღებთ, რომ:

$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\quad\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

მაგალითი 1.

იპოვეთ: $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ და $\mathrm{ctg}\alpha$, თუ:

ა) $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$ და $\alpha\in(\dfrac{\pi}{2};\pi)$

ბ) $\mathrm{tg}\alpha=-2$ და $\alpha\in(\pi;\ \pi)$.

ამოხსნა:

ა) $\left(\begin{cases}\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\\ \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\end{cases}\right)\Rightarrow(\cos\alpha=-\dfrac{12}{13})$.

$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{5}{12}$; $\qquad\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=-\dfrac{5}{12}$.

ბ) $\mathrm{ctg}\alpha=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\left(1+\mathrm{tg}^2a=\dfrac{1}{\cos^2a}\right)\Rightarrow\begin{cases}\cos^2a=\dfrac{1}{5}\\ a\in\left(r;\dfrac{3}{2}r\right)\end{cases}\Rightarrow\cos a=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\mathrm{tg}a=\dfrac{\sin a}{\cos a}\Rightarrow\sin a=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-2)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

მაგალითი 2.

იპოვეთ $\frac{3\cos\alpha+2\sin\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$-ს მნიშვნელობა, თუ $tg\alpha=2$

ამოხსნა:

$$(tg\alpha=2)\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\right)\Leftrightarrow(\sin\alpha=2\cos\alpha)$$

$$\frac{3\cos\alpha+2\sin\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{3\cos\alpha+4\cos\alpha}{10\cos\alpha-\cos\alpha}=\frac{7}{9}.$$

ფორმულები, რომლებიც გამოხატავენ დამოკიდებულებას ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის – **ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები.**

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
2. $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
3. $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
4. $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$
5. $1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$
6. $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
7. $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
8. $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$

სავარჯიშოები:

1 გამოთვალეთ მოცემული არგუმენტის დანარჩენი ძირითადი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, თუ:

ა) $\sin a=\frac{3}{5},\ \alpha\in\left(0;\frac{r}{2}\right)$; ბ) $\sin a=-\frac{3}{4},\ \alpha\in\left(r;\frac{3r}{2}\right)$;

გ) $\cos a=\frac{1}{3},\ \alpha\in\left(-\frac{r}{2};0\right)$; დ) $\cos a=-\frac{1}{4},\ \alpha\in\left(\frac{r}{2};r\right)$;

ე) $tga=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \alpha\in\left(r;\frac{3r}{2}\right)$; ვ) $tga=-\frac{1}{3},\ \alpha\in\left(\frac{r}{2};r\right)$;

ზ) $ctga=\frac{1}{2},\ \alpha\in\left(0;\frac{r}{2}\right)$; თ) $ctga=-3,\ \alpha\in\left(\frac{3r}{2};2r\right)$.

2 დაადგინეთ, შეიძლება თუ არა, რომ ერთი და იგივე არგუმენტისთვის სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობა:

ა) $\sin a=\frac{\sqrt{2}}{3},\quad \cos a=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad tga=\sqrt{\frac{2}{3}}$;

ბ) $\sin a=-\frac{4}{5},\quad \cos a=-\frac{3}{5},\quad tga=\frac{3}{4}$;

გ) $\sin a=-\frac{\sqrt{3}}{5},\quad \cos a=\frac{\sqrt{23}}{5},\quad tga=\sqrt{\frac{3}{23}}$;

დ) $\sin a=-\frac{8}{17},\quad \cos a=-\frac{15}{17},\quad tga=\frac{8}{15}$.

3 რა მნიშვნელობების მიღება შეუძლია:

ა) $\sin\alpha$, თუ $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$;   ბ) $\cos\alpha$, თუ $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$;

გ) $\operatorname{tg}\alpha$, თუ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;   დ) $\sin\alpha$, თუ $\operatorname{ctg}\alpha=3$.

4 იპოვეთ:

ა) $\frac{2\sin x - 5\cos x}{4\cos x + 3\sin x}$, თუ $\operatorname{tg}x=3$;   ბ) $\frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x}$, თუ $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{3}$;

გ) $\frac{7\cos x + 3\sin^2 x\cos x + 3\cos^3 x}{4\sin x + 3\cos x}$, თუ $\operatorname{tg}x=2$;

დ) $\frac{5\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x}{\cos^2 x - 2\sin^2 x}$, თუ $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{2}$.

5 გამოთვალეთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, თუ $\alpha\in(225°;270°)$ და $6\operatorname{tg}^2\alpha-11\operatorname{tg}\alpha+3=0$

6 გამოთვალეთ $\operatorname{tg}\alpha$, თუ $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{12}\right)$ და $16\cos^2\alpha-16\cos\alpha+3=0$

7 გამოთვალეთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $\operatorname{ctg}\alpha$, თუ ცნობილია, რომ $\operatorname{tg}\alpha=3$ და α პირველ მეოთხედში არ ძევს.

8 გამოთვალეთ:

ა) $\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$, თუ $\operatorname{tg}\alpha=2$;   ბ) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{2}$;

გ) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$;   დ) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, თუ $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=3$.

9 იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა

ა) $y=\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha$;   ბ) $y=4\cos^2\alpha-5\sin^2\alpha$;

გ) $y=2\sin^2\alpha-5\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;   დ) $5\cos^2\alpha-3\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{ctg}3\alpha$.

---

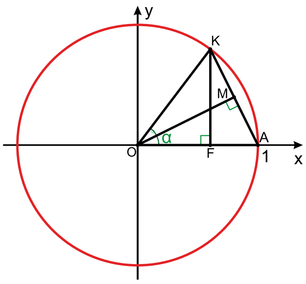
10 ზრდადია თუ კლებადი მიმდევრობა:

ა) $x_n=3n+7$;   ბ) $x_n=-5n+3$;   გ) $x_n=n^2-5n+1$.

11 იპოვეთ ყველა სამნიშნა რიცხვის ჯამი, რომლებიც 3-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 2-ს.

12 (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი 1-ის ტოლია. d სხვაობის რა მნიშვნელობისთვის მიიღებს $a_1a_3+a_2a_3$ გამოსახულება უმცირეს მნიშვნელობას?

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:



13 ა) ნახაზის მიხედვით აჩვენეთ, რომ

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad 0 < a \le \frac{\pi}{2}$$ და გამოთვალეთ $\cos\frac{\alpha}{2}$.

ბ) ისარგებლეთ მიღებული ფორმულით და გამოთვალეთ: $\sin 15°$, $\cos 22{,}5°$.

3 ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივება და იგივეობათა დამტკიცება

1. დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

ბ) $\dfrac{\mathrm{tg}2a}{\mathrm{tg}3b}=\dfrac{\mathrm{tg}2a+\mathrm{ctg}3b}{\mathrm{ctg}2a+\mathrm{tg}3b}$;

გ) $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2 a}{1+\mathrm{tg}^2 a}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

ტრიგონომეტრიული იგივეობის დამტკიცებისას ვიყენებთ იგივე მეთოდებს, რასაც ალგებრული იგივეობის დამტკიცებისას: ა) მარცხენა მხარის მარჯვენა მხარემდე გარდაქმნა; ბ) მარჯვენა მხარის მარცხენა მხარემდე მიყვანა; გ) ორივე მხარის გამარტივება და ერთ სახემდე მიყვანა. შეიძლება განვიხილოთ ორივე მხარის სხვაობა და დავასაბუთოთ, რომ ეს სხვაობა 0-ის ტოლია. ჩვეულებრივ იგივეობების დამტკიცებისას ან ტრიგონომეტრიული გამოსახულების გამარტივებისას კუთხეთა დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს არ ვადგენთ, თუ ეს კონკრეტულად ამოცანის პირობიდან არ მოითხოვება.

დამტკიცება:

ა) გავამარტივოთ მარცხენა მხარე:

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=$
$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

ბ) გავამარტივოთ მარჯვენა მხარე:

$$\frac{\mathrm{tg}2a+\mathrm{ctg}3b}{\mathrm{ctg}2a+\mathrm{tg}3b}=\frac{\mathrm{tg}2a+\dfrac{1}{\mathrm{tg}3b}}{\dfrac{1}{\mathrm{tg}2a}+\mathrm{tg}3b}=\frac{\dfrac{\mathrm{tg}2a\mathrm{tg}3b+1}{\mathrm{tg}3b}}{\dfrac{1+\mathrm{tg}2a\mathrm{tg}3b}{\mathrm{tg}2a}}=\frac{\mathrm{tg}2a}{\mathrm{tg}3b}$$

გ) გავამარტივოთ მარჯვენა მხარე:

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2 a}{1+\mathrm{tg}^2 a}=\frac{1-\dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a}}{\dfrac{1}{\cos^2 a}}=\cos^2 a-\sin^2 a$$

$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

2. გაამარტივეთ: ა) $\dfrac{\cos^3 a-\sin^3 a}{1+\sin a\cos a}$; ბ) $\dfrac{1-4\sin^2 a\cos^2 a}{(\sin a+\cos a)^2}+2\sin a\cos a$;

გ) $\sin^3 a(1+\mathrm{ctg}a)+\cos^3 a(1+\mathrm{tg}a)$.

ამოხსნა:

ა) $\dfrac{\cos^3 a-\sin^3 a}{1+\sin a\cos a}=\dfrac{(\cos a-\sin a)(\cos^2 a+\sin a\cos a+\cos^2 a)}{\sin^2 a+\cos^2 a+\sin a\cos a}=\cos a-\sin a$

ტრიგონომეტრიული გამოსახულებების გამარტივების დროს, ჩვეულებრივ თანმიმდევრულად უნდა შევცვალოთ მთელი გამოსახულება ან მისი ცალკეული ნაწილები იგივურად ტოლი გამოსახულებებით. გამარტივება ჩაითვლება დასრულებულად, თუ მიღებული გამოსახულება უფრო მარტივი სახისაა და აღარ საჭიროებს შემდეგ გამარტივებას.

ბ) $\dfrac{1-4\sin^2 a\cos^2 a}{(\sin a+\cos a)^2}+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{(1-2\sin a\cos a)(1+2\sin a\cos a)}{\sin^2 a+\cos^2 a+2\sin a\cos a}+$
$+2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1.$

გ)
$\sin^3 a(1+\mathrm{ctg}a)+\cos^3 a(1+\mathrm{tg}a)=\sin^3 a\dfrac{\sin a+\cos a}{\sin a}+\cos^3 a\dfrac{\sin a+\cos a}{\cos a}=$
$=(\sin a+\cos a)(\sin^2 a+\cos^2 a)=\sin a+\cos a$

სავარჯიშოები:

1 არსებობს თუ არა ისეთი α კუთხე, რომ sinα-ც და cosα-ც ერთდროულად უდრიდეს 0-ს?

2 არსებობს თუ არა ისეთი α კუთხე, რომ შესრულდეს $0<\mathrm{tg}\alpha<1$ და $0<\mathrm{ctg}\alpha<1$?

3 მოცემულია $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}5$. იპოვეთ:
ა) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\beta$; ბ) $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$.

4 გაამარტივეთ:
ა) $\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$; ბ) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;
გ) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$; დ) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
ე) $\dfrac{1}{\cos^2 a}-\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$; ვ) $(1+\sin^2\alpha)\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha-\dfrac{1}{\sin^2 a}$.

5 დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $\dfrac{(\sin a+\cos a)^2-1}{\mathrm{ctg}a-\sin a\cdot\cos a}=2\mathrm{tg}^2\alpha$;

ბ) $\dfrac{\sin^2 a}{\sin a-\cos a}-\dfrac{\sin a+\cos a}{\mathrm{tg}^2 a-1}=\sin a+\cos a$;

გ) $\dfrac{1+\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}^2 a}{1+\mathrm{ctg}a+\mathrm{ctg}^2 a}=\mathrm{tg}^2 a$;

დ) $\dfrac{\sin^2 a-\cos^2 a+\cos^4 a}{\mathrm{ctg}a-\sin^2 a+\sin^4 a}=\mathrm{tg}^4 a$.

6 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\dfrac{2\sin a-5\cos a}{(\sin a+\cos a)\cdot\cos^2 a}$, თუ $\mathrm{ctg}\alpha=2$;

ბ) $\dfrac{4\sin a-3\cos a}{(2\sin a-\cos a)\cdot\cos^2 a}$, თუ $\mathrm{ctg}\alpha=-2$.

7 ცნობილია, რომ $\sin\alpha+\cos\alpha=m$ იპოვეთ:
ა) $\sin\alpha-\cos\alpha$; ბ) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$; გ) $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha$.

8 გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\sin^2\alpha(1+\sin^{-1}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)(1-\sin^{-1}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)$;

ბ) $2(\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)^2-(\sin^8\alpha+\cos^8\alpha)$;

გ) $\sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}-\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}}$, თუ $\frac{r}{2}<a<r$;

დ) $\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}+\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}$, თუ $r<a<\frac{3r}{2}$.

9 დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $\sin^3\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

ბ) $\frac{2(1+\mathrm{tg}a)\sin a\cdot\cos a+1}{(1+\mathrm{tg}a)^2}-\frac{2(1+\mathrm{ctg}a)\sin a\cos a+1}{(1+\mathrm{ctg}a)^2}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

გ

10 არსებობს ნატურალური რიცხვი, რომელსაც თუ დავუმატებთ 100-ს, მივიღებთ ნატურალური რიცხვის კვადრატს, ხოლო თუ დავუმატებთ 168-ს, აგრეთვე ნატურალური რიცხვის კვადრატს მივიღებთ. იპოვეთ ეს რიცხვი.

11 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\begin{cases}(a+5)x+(2a+3)y=7\\(3a+10)x+(5a+6)y=16\end{cases}$ სისტემას აქვს:

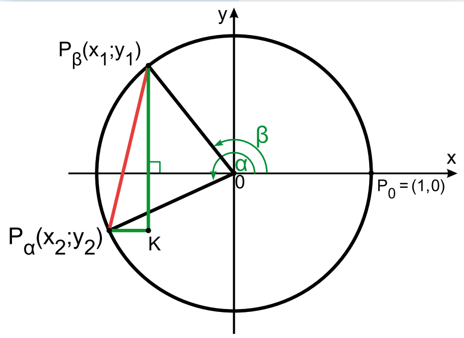
ა) ერთადერთი ამონახსნი;

ბ) უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი;

გ) არა აქვს ამონახსნი.

12 ამოხსენით სისტემა $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\\\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\end{cases}$.

4 ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები



ნახ. 1

გამოვიყვანოთ ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გამოსათვლელი ფორმულები.

მოვაბრუნოთ $P_0(1;0)$ წერტილი $O(0;0)$ ცენტრის მიმართ α და β კუთხეებით (ნახ. 1). მივიღებთ, შესაბამისად, P_α და P_β წერტილებს.

$$\left(\begin{array}{l} KP_\beta = |y_1 - y_2| \\ KP_\alpha = |x_1 - x_2| \end{array}\right) = P_\alpha P_\beta^{\ 2} = (x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 =$$
$$= 2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) =$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \qquad (1)$$

$x_1^2 + y_1^2 = 1$ და
$x_2^2 + y_2^2 = 1$
$x_1=\cos\beta;\ x_2=\cos\alpha;$
$y_1=\sin\beta;\ y_2=\sin\alpha;$

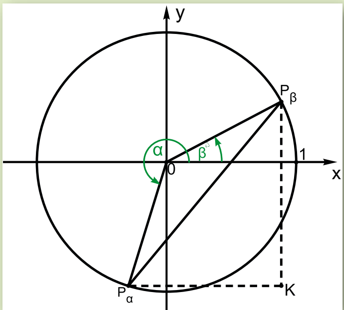
$\Delta P_\alpha OP_\beta$-დან კოსინუსების თეორემის თანახმად:

$$P_aP_b^2 = OP_a^2 + OP_b^2 - 2OP_a \cdot OP_b\cos(a - b) = 2 - 2\cos(a - b) \qquad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \text{ აქედან კი}$$

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b}$$



ნახ. 2

შევნიშნოთ, რომ $\angle P_\alpha OP_\beta$ შესაძლოა ტოლი იყოს არა მარტო (α-β)-სი, არამედ მე-2 ნახაზზე $\angle P_\alpha OP_\beta=2\pi-(\alpha-\beta)$.
შესაძლებელია აგრეთვე, რომ $P_\beta OP_\alpha$ კუთხის ზომა (α–β)-გან განსხვავდებოდეს 2π-ის ჯერადი რიცხვით (ბრუნთა მთელი რიცხვით), მაგრამ ორივე შემთხვევაში $\cos\angle P_\beta OP_\alpha=\cos(\alpha-\beta)$. აჩვენეთ დამოუკიდებლად.

რადგან $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, მივიღებთ:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

მაგალითი 1.

გავამარტივოთ: ა) $\cos\left(\frac{r}{2} - a\right)$; ბ) $\sin\left(\frac{r}{2} - a\right)$

ა) $\cos\left(\frac{r}{2} - a\right) = \cos\frac{r}{2}\cos a + \sin\frac{r}{2}\sin a = \sin a$

$\cos\left(\frac{r}{2} - a\right) = \sin a$

ბ) $\sin\left(\frac{r}{2}-a\right)=\cos\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-a\right)\right)=\cos a$ | $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

ე.ი. $\sin\left(\frac{r}{2}-a\right)=\cos a$

ვიპოვოთ $\sin(a+b)$.

$$\sin(a+b)=\cos\left(\frac{r}{2}-(a+b)\right)=\cos\left(\left(\frac{r}{2}-a\right)-b\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{r}{2}-a\right)\cos b+\sin\left(\frac{r}{2}-a\right)\sin b=\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

ე.ი.

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ მივიღებთ:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

გამოვიყვანოთ $tg(\alpha+\beta)$-ს გამოსათვლელი ფორმულა:

$$tg(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\sin b-\sin a\sin b}=$$ | მრიცხველიცა და მნიშვნელიც გავყოთ $\cos a\cos b$ – ზე

$$=\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\sin b\cos a}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos b\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}$$

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tgatgb}$$

ამრიგად, ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}$$

$$tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tgatgb}$$

სავარჯიშოები:

1. დაადგინეთ გამოსახულების ნიშანი, თუ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

ა) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; ბ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; გ) $\cos(\pi+\alpha)$; დ) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;
ე) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$; ვ) $\sin(\pi+\alpha)$; ზ) $\cos(\alpha-\pi)$; თ) $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$;

2. გამოთვალეთ:

ა) $\cos 15°$; ბ) $\sin 105°$; გ) $\operatorname{tg} 75°$;
დ) $\sin\frac{\pi}{12}$; ე) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; ვ) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$.

3. გამოთვალეთ:

ა) $\cos 23°\cos 37°-\sin 23°\sin 37°$; ბ) $\sin 19°\cos 26°+\cos 19°\sin 26°$;
გ) $\cos 37°\cos 23°-\cos 53°\cos 67°$; დ) $\cos 73°\sin 28°-\cos 28°\cos 17°$;
ე) $\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{13\pi}{9}$; ვ) $\sin\frac{7\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}$.

4. გამოთვალეთ:

ა) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ და $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;
ბ) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, თუ $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
გ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, თუ $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
დ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, თუ $\cos\alpha=\frac{9}{41}$ და $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

5. გაამარტივეთ:

ა) $\cos\left(\frac{2\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}-\alpha\right)$;
ბ) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

6. გამოთვალეთ:

ა) $\frac{\sin 22°\cos 8°+\cos 158°\cos 98°}{\sin 23°\cos 7°+\cos 157°\cos 97°}$; ბ) $\frac{\sin 50°\cos 12°-\sin 40°\cos 78°}{\cos 68°-\sqrt{3}\sin 68°}$;
გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15°-\frac{1}{2}\sin 15°$; დ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 75°-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 75°$.

7. გამოთვალეთ:

ა) $\operatorname{tg}42°\cdot\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}48°$; ბ) $\operatorname{tg}31°\cos 58°-\operatorname{ctg}59°\sin 32°$;
გ) $\operatorname{tg}10°\cdot\operatorname{tg}20°\cdot\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{tg}40°\cdot\operatorname{tg}50°\cdot\operatorname{tg}60°\cdot\operatorname{tg}70°\cdot\operatorname{tg}80°$;
დ) $\operatorname{tg}13°\cdot\cos 2°\cdot\operatorname{tg}77°-\operatorname{ctg}11°\cdot\sin 88°\cdot\operatorname{ctg}79°$.

8. დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; ბ) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}$;
გ) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; დ) $\frac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

9. რა ნიშანია sinα+sinβ+sinγ, თუ α, β და γ სამკუთხედის კუთხეებია?

10. ამოხსენით განტოლება:
ა) $\cos6x\cdot\cos5x+\sin6x\cdot\sin5x=-1$; ბ) $\sin4x\cos3x-\cos4x\sin3x=-1$;

გ) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{r}{4}+x\right)-\cos x=-1$; დ) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{r}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}=-1$.

11. გამოთვალეთ:
ა) $\cos(\alpha+\beta)$ და $\cos(\alpha-\beta)$, თუ $\sin a=-\frac{3}{5}$, $\frac{3r}{2}<a<2r$ და $\sin b=\frac{15}{17}$, $0<b<\frac{r}{2}$;

ბ) $\cos(\alpha-\beta)$, თუ $\cos\alpha=-0{,}6$, $\frac{r}{2}<a<r$ და $\sin b=-\frac{5}{13}$, $r<b<\frac{3r}{2}$;

გ) $tg(\alpha+\beta)$, თუ $\sin a=\frac{4}{5}$, $\frac{r}{2}<a<2r$ და $\cos b=\frac{8}{17}$, $\frac{3r}{2}<b<2r$.

12. გამოთვალეთ:
ა) $\sin(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{3r}{2}-b\right)$, თუ $\alpha+\beta=\frac{2r}{3}$;
ბ) $\cos(\alpha+\beta)+2\cos\left(\frac{r}{2}-b\right)\sin\alpha$, თუ $\alpha-\beta=\frac{3r}{4}$;
გ) $\sin\alpha\cdot\cos(\pi-\beta)-\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{3r}{2}+b\right)$, თუ $\alpha+\beta=-\frac{r}{4}$.

13*. დავამტკიცოთ, რომ თუ ax^2+bx+c გამოსახულება ღებულობს მთელ მნიშვნელობას, როცა x=0; x=1 და x=3-სთვის, მაშინ ის მთელი იქნება ნებისმიერი მთელი x-ისთვის.

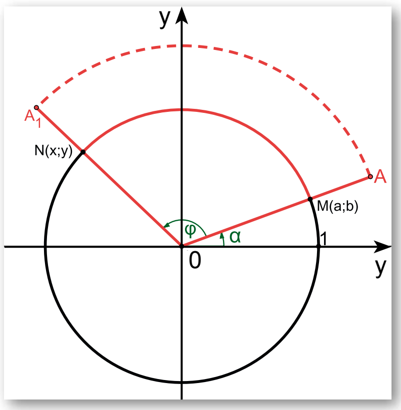
14. ABC სამკუთხედში $\sin A=\frac{1}{2}$; $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. რისი ტოლი შეიძლება იყოს ამ სამკუთხედის უდიდესი კუთხე?

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

15. ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე მდებარე M(a;b) წერტილი მობრუნდა O ცენტრის მიმართ φ კუთხით (ნახ.1). აჩვენეთ, რომ:
ა) N(x; y) წერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულით $x=a\cos\varphi-b\sin\varphi$; $y=b\cos\varphi+a\sin\varphi$.
ბ) $x_A=ar$ და $y_A=br$, სადაც OA=r.

გ) $\begin{cases} x_{A'}=x_A\cos\{-y_A\sin\{ \\ y_{A'}=y_A\cos\{+x_A\sin\{ \end{cases}$

დ) A(x; y) წერტილი მოაბრუნეს 90°-ით. იპოვეთ მიღებული $A_1(x_1\ y_1)$ წერტილის კოორდინატები.
ე) მიღებული შედეგის საფუძველზე აჩვენეთ, რომ თუ y=kx და $y=k_1x$ წრფეები მართობული წრფეებია, მაშინ $kk_1=-1$



ნახ.1

ჯგუფური მეცადინეობა

5 ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

გამოიყენეთ ორი არგუმენტის ჯამის სინუსისა და კოსინუსის ფორმულები და დაამტკიცეთ, რომ:

1. $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2. $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

3. $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

შეეცადეთ $\cos2\alpha$ გამოსახოთ:
ა) $\cos^2\alpha$-თი, ბ) $\sin^2\alpha$-თი და აჩვენეთ, რომ:

2ა. $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

2ბ. $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

2ა და 2ბ ფორმულებიდან ადვილად მიიღებთ:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$
$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$$

(4) — ხარისხის დაწევის ფორმულები

თუ (4) ფორმულებში α-ს შევცვლით $\frac{\alpha}{2}$-ით, მივიღებთ:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

(5) — ნახევარი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

? დაამტკიცეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნახევარი არგუმენტის ტანგენსით შეცვლის ფორმულები (ოქროს ფორმულები):

ა) $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; ბ) $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; გ) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

სავარჯიშოები:

1. გამოიყენეთ (5) ფორმულები და გამოთვალეთ:
ა) $\sin 22{,}5°$; ბ) $\cos 15°$; გ) $\mathrm{tg}75°$.

2. იპოვეთ:
ა) $2\sin 15°\cdot\cos 15°$; ბ) $\cos^2 15°-\sin^2 15°$; გ) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

დ) $\frac{2\mathrm{tg}15°}{1-\mathrm{tg}^2 15°}$; ე) $(\cos 75°-\sin 75°)^2$; ვ) $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$;

ზ) $2\cos^2\frac{\pi}{12}-1$; თ) $1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$; ი) $\frac{\mathrm{tg}75°}{1-\mathrm{tg}^2 75°}$.

3. გამოთვალეთ:
ა) $\sin 2\alpha$, თუ $\sin\alpha=-0{,}8$ და $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

ბ) $\cos 2\alpha$, თუ $\sin\alpha=\frac{8}{17}$;

გ) $\sin 2\alpha$, თუ $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

დ) $\mathrm{tg}2\alpha$, თუ $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

4. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $8\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)$;

ბ) $2\cos\frac{\pi}{17}\left(2\cos^2\frac{\pi}{34}-1\right)+\cos\frac{19\pi}{17}$;

გ) $\sin\frac{\pi}{11}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{22}\right)-\sin\frac{9\pi}{22}\cdot\cos\frac{9\pi}{22}$;

დ) $2\left(1-\sin\frac{13\pi}{38}\right)\left(1+\sin\frac{25\pi}{38}\right)+\cos\frac{6\pi}{19}$.

5. გამოთვალეთ:
ა) $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}$; ბ) $\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}$.

6. გაამარტივეთ გამოსახულება:
ა) $\sin 2\alpha+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$; ბ) $\frac{\cos 4\alpha+\sin^2 2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}$;

გ) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$; დ) $\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

7. გამოთვალეთ:
ა) $\left(\frac{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}\right)^2$; ბ) $\left(\frac{1-\mathrm{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{1+\mathrm{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)}\right)^2$;

გ) $\frac{16\mathrm{tg}^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\left(1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)^2}$; დ) $\frac{\mathrm{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{\left(1+\mathrm{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)^2}$.

8. გამოთვალეთ:

ა) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ და $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ თუ $\sin\alpha=0,6$ და $2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}$;

ბ) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ და $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ თუ $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

გ) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ და $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$ თუ $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ და $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

9. გაამარტივეთ:

ა) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; ბ) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; გ) $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$;

დ) $(1-\cos2\alpha)\mathrm{ctg}\alpha$; ე) $\frac{\mathrm{tg}2\alpha}{\mathrm{tg}4\alpha-\mathrm{tg}2\alpha}$; ვ) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$.

10. დაამტკიცეთ იგივეობა;

ა) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$; ბ) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

გ) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\mathrm{tg}^4\alpha$; დ) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}$;

ე) $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha-2\mathrm{tg}2\alpha-4\mathrm{tg}4\alpha=8\mathrm{ctg}8\alpha$.

11. გამოსახეთ $\sin3\alpha$ და $\cos3\alpha$, შესაბამისად $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$-თი.

12*. დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha-1$; ბ) $\frac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\mathrm{ctg}\alpha$;

გ) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$; დ) $\frac{1-\sin\alpha-\cos 2\alpha+\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha}=\mathrm{tg}\alpha$.

13. იპოვეთ

ა) $\sin\alpha$, თუ $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{7}{5}$;

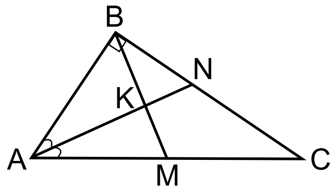
ბ) $\sin2\alpha$, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha=b$;

გ) $\sin2\alpha$, თუ $\mathrm{ctg}\alpha=-7$.

გ

14 პარალელოგრამის ერთ-ერთი დიაგონალი $4\sqrt{6}$ სმ-ია. ეს დიაგონალი პარალელოგრამის გვერდთან 60°-იან კუთხეს, მეორე დიაგონალი იგივე გვერდთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ მეორე დიაგონალი.

15 ΔABC-ში $\angle B=90°$; $AB=3$სმ; $BC=4$სმ; BM მედიანაა; AN ბისექტრისა. იპოვეთ BK.

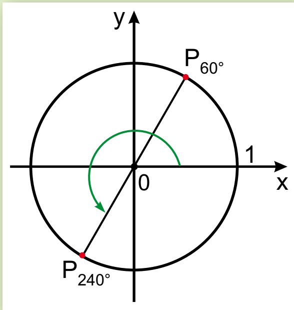


16 ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხე 30°-ია, ხოლო ფერდი 14 სმ. იპოვეთ ფერდის მედიანა.

6 დაყვანის ფორმულები

1. გამოთვალეთ:

$\sin 240°$; $\cos 210°$; $\sin\frac{7}{6}\pi$.

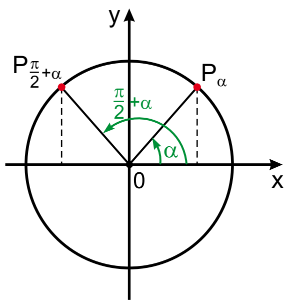


იგივეობებს, რომლებიც $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$, $k\in Z$ სახის კუთხეთა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს α კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით გამოსახავს, **დაყვანის ფორმულები** ეწოდებათ.

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი α-თვის სრულდება $\sin\left(\frac{r}{2} - a\right) = \cos a$

დამტკიცება:

$$\sin\left(\frac{r}{2} - a\right) = \sin\frac{r}{2}\cos a - \cos\frac{r}{2}\sin a = 1\cos a - 0\sin a = \cos a$$



ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ $\sin\left(\frac{r}{2} + a\right) = \cos a$ და $\cos\left(\frac{r}{2} + a\right) = -\sin a$

2. გამოიყენეთ $\sin(\alpha\pm\beta)$ და $\cos(\alpha\pm\beta)$ ფორმულები და დაამტკიცეთ დაყვანის შემდეგი ფორმულები:

$\sin\left(\frac{r}{2} + a\right) = \cos a$ $\left(_2 \quad \right)$ $\cos\left(\frac{r}{2} - a\right) = \sin a$

$\sin(r - a) = \sin a$ $\cos\left(\frac{r}{2} + a\right) = -\sin a$

$\sin(r + a) = -\sin a$ $(r - \quad)$ $\cos(r - a) = -\cos a$

$\sin\left(\frac{3}{2}r - a\right) = -\cos a$ $+$ $\cos(r + a) = -\cos a$

$\sin\left(\frac{3}{2}r + a\right) = -\cos a$ $(\quad - \quad)$ $\cos\left(\frac{3}{2}r - a\right) = -\sin a$

$\sin(2r - a) = -\sin a$ $r +$ $\cos\left(\frac{3}{2}r + a\right) = \sin a$

$\cos(2r - a) = \cos a$

დავამტკიცოთ, რომ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\operatorname{ctg}a$ მართლაც

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}=\frac{\cos a}{\sin a}=\operatorname{ctg}a$$

3. აჩვენეთ, რომ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

დაყვანის ფორმულებისა და ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა პერიოდულობის გათვალისწინება საშუალებას გვაძლევს ნებისმიერი α რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა დავიყვანოთ $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ შუალედში მოთავსებული რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლამდე.

დაყვანის ფორმულების დამახსოვრება გაგიადვილდებათ, თუ გაითვალისწინებთ შემდეგ წესებს:

1. ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. გავარკვიოთ, თუ რომელ მეოთხედშია $P_{\frac{\pi}{2}k\pm\alpha}$, $k\in Z$ წერტილი, განვსაზღვროთ რა ნიშანი აქვს ამ მეოთხედში მოცემულ ფუნქციას და მიღებული შედეგის წინ დავწეროთ ეს ნიშანი.
2. დასაყვანი ფუნქციის სახელწოდება იგივე რჩება, თუ დაყვანის ფორმულაში $\frac{\pi}{2}$ აღებულია ლუწ რიცხვჯერ (ანუ როცა $\pi\pm\alpha$ ან $2\pi\pm\alpha$ არგუმენტი იცვლება α-თი),ხოლო დასაყვანი ფუნქციის სახელწოდება იცვლება მისი „კოფუნქციით“ (სინუსი - კოსინუსით, კოსინუსი - სინუსით, ტანგენსი - კოტანგენსით, კოტანგენსი - ტანგენსით), თუ დაყვანის ფორმულაში $\frac{\pi}{2}$ აღებულშია კენტ რიცხვჯერ (ანუ, როცა $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ან $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ არგუმენტი იცვლება α-თი).

მაგალითი 1.

გამოთვალეთ: ა) $\cos\left(\frac{22}{3}\pi\right)$; ბ) $\sin(-1575^\circ)$.

ამოხსნა:

ა) $\cos\left(\frac{22}{3}\pi\right)=$ | გამოვყოთ პერიოდი, $2\pi k$

$$\cos\left(6\pi+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

ან ასეც:

$$\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

ბ) $\sin(-1575^\circ) =$

$= -\sin 135^\circ = -\sin(180^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\underline{1575} : 360 = 4$
$135 \leftarrow$ ნაშთი

სავარჯიშოები:

1. გამოთვალეთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებით
ა) $\cos 150^\circ$; ბ) $\sin 135^\circ$; გ) $\mathrm{ctg}(-135^\circ)$; დ) $\cos 120^\circ$;
ე) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}$; ვ) $\sin\frac{11\pi}{6}$; ზ) $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{3}$; თ) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

2. იპოვეთ: ა) $\sin 40^\circ$, თუ $\cos 50^\circ = a$; ბ) $\cos 22^\circ$, თუ $\sin 68^\circ = a$;
გ) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, თუ $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = a$.

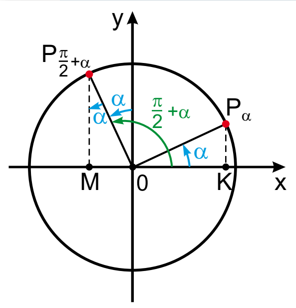
3 აჩვენეთ, რომ
ა) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; ბ) $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)$.
გ) $\sin\left(\frac{7\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = 0$; დ) $\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = 0$;
ე) $\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 0$; ვ) $\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

4 ისარგებლეთ სურათზე მოცემული ნიმუშით და დაამტკიცეთ დაყვანის დანარჩენი ფორმულები.

5. გამოთვალეთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებით:
ა) $\sin 585^\circ - \cos(-930^\circ)\cdot\mathrm{ctg}\,510^\circ$; ბ) $\sin(-570^\circ)\cos 870^\circ\cdot\mathrm{tg}\,945^\circ$;
გ) $\sin 1020^\circ\cdot\cos 675^\circ\cdot\mathrm{ctg}(-1050^\circ)$; დ) $\sin 660^\circ\cdot\cos(-855^\circ)\mathrm{ctg}\,600^\circ$.

6. გაამარტივეთ გამოსახულება:
ა) $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \mathrm{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$;
ბ) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha)}{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$;
გ) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\mathrm{ctg}(2\pi + \alpha)} \cdot \dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)}$; დ) $\dfrac{\sin^2(\pi + \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

7. ამოხსენით განტოლება:
ა) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$; ბ) $\sin(\pi - x) - \sin(\pi + x) = 2$;
გ) $\sin(3x + 3\pi)\cdot\sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin 2x\cos 3x = 1$;
დ) $\sin\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2x + 4\pi) - \sin(5x + \pi)\sin 2x = 0$



$\triangle OP_\alpha K = \triangle OP_{\frac{\pi}{2}+\alpha}M$
აქედან
1. $OM = KP_\alpha$
და
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
2. $MP_{\frac{\pi}{2}+\alpha} = OK$
ე.ი. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

8 დაამტკიცეთ, რომ, თუ α, β და γ სამკუთხედის შიგა კუთხეებია:

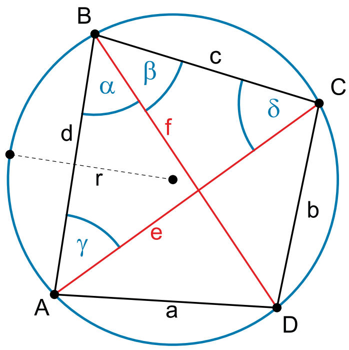
ა) $\cos(\alpha+\beta-\gamma) = -\cos(2\gamma)$;

ბ) $\sin\alpha\sin\beta - \cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$

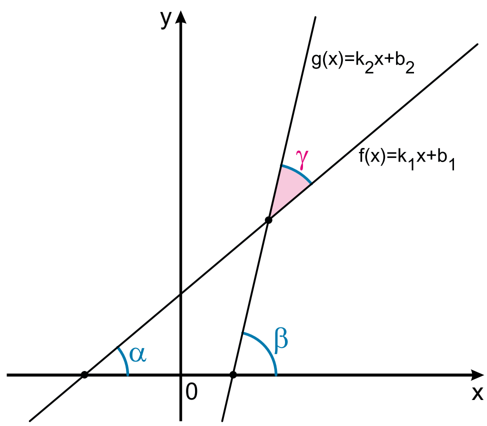
გ) თუ $\cos(\alpha+\beta-\gamma) = -1$.

მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა.

9 დაამტკიცეთ, რომ
$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.



10* ნახაზის მიხედვით დაამტკიცეთ, რომ $ef=ac+bd$ სადაც $e=AC$, $f=BD$ (მითითება: $\frac{a}{\sin a} = 2R$).



11 ნახაზზე მოცემული ურთიერთგადამკვეთი წრფეების განტოლებებია: $f(x)=k_1x+b_1$, $g(x)=k_2x+b_2$.

ა) აჩვენეთ, რომ ორ წრფეს შორის კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$\operatorname{tg}c = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| \qquad (1)$$

ბ) (1) ფორმულის გამოყენებით დაადგინეთ ორი წრფის მართობულობის პირობა.

გ

12. გამოთვალეთ:

ა) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$ ბ) $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 =$

გ) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{1\frac{7}{25}} =$ დ) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[8]{2} =$

13. იპოვეთ $\sqrt{(7-a)(1+a)}$, თუ $\sqrt{7-a} + \sqrt{1+a} = 4$.

14. ჩამოთვლილი რიცხვებიდან რომელია მთელი:

ა) $(\sqrt{5}+2)^{\circ}$; ბ) $(\sqrt{3}-1)^2$; გ) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$; დ) $(\sqrt{8})^{\frac{4}{3}}$.

7 ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება

გავეცნოთ უფრო რთული ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნას:

1. sin30°+cos30°tgx=0

ამოხსნა:

$(\sin 30°+\cos 30°\operatorname{tg}x=0) \Leftrightarrow$ | შევცვალოთ $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$-ით

$$\Leftrightarrow \left(\sin 30° + \frac{\cos 30° \sin x}{\cos x} = 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\sin 30° \cos x + \cos 30° \sin x}{\cos x} = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x+30°)=0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+30°=180°k\\ x\neq 90°+180°k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-30°+180°k\\ x\neq 90°+180°k\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = -30°+180°k,\ k\in Z.$

2. ამოხსენით განტოლება:

ა) $3\sin x+2\cos x=0$; ბ) $\sin^2x-2\sin x\cos x-3\cos^2x=0$;

გ) $3\cos^2x+\sin x\cos x=0$; დ) $3\sin x-2\cos x+3=0$.

ამოხსნა:

განვიხილოთ პირველი ორი განტოლება. ორივე ერთგვაროვანი განტოლებაა. ამასთან, ა) პირველი, ხოლო ბ) — მეორე ხარისხის.

ა) x-ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც cosx=0, არ შეიძლება იყოს განტოლების ფესვები, რადგან მაშინ sinx-იც ნულის ტოლი აღმოჩნდება. ეს კი, ვიცით, რომ შეუძლებელია.

ამიტომ განტოლების ორივე მხარე შესაძლებელია გავყოთ cosx-ზე.

$(3\sin x+2\cos x=0 \,|\, :\cos x) \Leftrightarrow (3\operatorname{tg}x + 2 = 0) \Leftrightarrow (x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z)$

ბ) წინას ანალოგიური მსჯელობით განტოლება გავყოთ $\cos^2 x$-ზე.

$(\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0 \,|\, :\cos^2 x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg}x - 3 = 0) \Leftrightarrow$ | განტოლება კვადრატულია tgx-ის მიმართ

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x = 3\\ \operatorname{tg}x = -1\end{array}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \operatorname{arctg}3 + \pi k\\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k\end{array}\right. \quad k \in Z$$

პასუხი: $\operatorname{arctg}3 + \pi k,\ k\in Z$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k\in Z$.

განტოლებებს, რომელთა წევრები sinx-ისა და cosx-ის მიმართ ერთი და იმავე ხარისხისაა **ერთგვაროვანი ტრიგონომეტრიული განტოლება** ეწოდება.

გ) $(3\cos^2 x + \sin x \cos x = 0) \Leftrightarrow$ | დავშალოთ მამრავლებად განტოლების მარცხენა მხარე

$\Leftrightarrow (\cos x(3\cos x + \sin x) = 0))$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

an

$3\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow$ | პირველი ხარისხის ერთგვაროვანი განტოლებაა - გავყოთ cosx-ზე.

$\Leftrightarrow (tgx + 3) = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = - \text{arctg}3 + \pi k,\ k \in Z$

პასუხი: $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;\ - \text{arctg}3 + \pi k,\ k \in Z.$

გ) შემთხვევაში განტოლების ორივე მხარის cos²x-ზე გაყოფით დაიკარგებოდა განტოლების ფესვი. რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ.

დ) $(3\sin x - 2\cos x + 3 = 0) \Leftrightarrow (3\sin x + 3 = 2\cos x) \Leftrightarrow$ | ავიყვანოთ კვადრატში

$\Leftrightarrow (9\sin^2 x + 18\sin x + 9 = 4\cos^2 x) \Leftrightarrow (9\sin^2 x + 18\sin x + 9 - 4(1 - \sin^2 x) = 0) \Leftrightarrow$

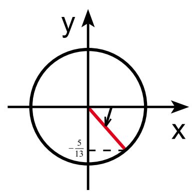
$\Leftrightarrow (13\sin^2 x + 18\sin x + 5 = 0)$

$\sin x = -\frac{5}{13}$ ან $\sin x = -1$ | რადგან განტოლება ავიყვანეთ კვადრატში, საჭიროა მისი შემოწმება

შემოწმება:

1. თუ $\sin x = -\frac{5}{13}$, მაშინ $\cos x = \pm\frac{12}{13}$.

1) $\sin x = -\frac{5}{13}$ და $\cos x = \frac{12}{13}$, მაშინ $3\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) - 2\cdot\frac{12}{13} + 3 = 0.$



ე.ი. x მეოთხე მეოთხედის კუთხეა და $x = \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right) + 2\pi k.$

2) $\sin x = -\frac{5}{13}$ და $\cos x = -\frac{12}{13}$, მაშინ $3\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) - 2\cdot - \frac{12}{13} + 3 \neq 0.$

2. თუ $\sin x = -1$, მაშინ $\cos x = 0$.

$3\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 3 = 0$, აქედან $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

პასუხი: $-\arcsin\frac{5}{13} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ გამოსახულების ნიშანი.

ა) $\cos\left(1 + \frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(1 + \frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(1 + \frac{6\pi}{5}\right)\cos\left(1 + \frac{8\pi}{5}\right);$

ბ) $tg11 \cdot tg12 \cdot tg13;$ გ) $\sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5.$

2. არსებობს თუ არა ისეთი α კუთხე, რომ $\sin a = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^{-1}$

3. იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.
ა) $y=\sin 2x+\cos 4x$; ბ) $y=\sin 3x+\cos 7x$;
გ) $y=\sin \pi x$; დ) $y=\cos 2\pi x+\sin 4\pi x$.

4. კენტია თუ ლუწი ფუნქცია?
ა) $y=\operatorname{tg}5x+\operatorname{ctg}3x+4\sin x\cos 2x$; ბ) $y=\cos 6x+\sin^3 x\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}+3x^2$.

ამოხსენით განტოლება:

5. ა) $6\sin^2 x-5\sin x+1=0$; ბ) $-2\cos^2 x+\cos x+1=0$;
გ) $2\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x=0$; დ) $12\sin^2(2x-1)+\sin(2x-1)-1=0$;
ე) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{r}{5}-2x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{r}{5}-2x\right)-6=0$; ვ) $\cos^2 x+(3-\sqrt{3})\cos x-3\sqrt{3}=0$.

6. ა) $3\sin^2 2x+7\cos^2 2x-3=0$; ბ) $2\sin^3 x-\cos 2x-\sin x=0$;
გ) $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$; დ) $\cos 2x-5\sin x-3=0$;
ე) $\cos 2x+\sin^2 x+\sin x=\frac{1}{4}$; ვ) $2\cos^2 x=3\sin x+2$.

7. ა) $1-\cos x=\sin x$; ბ) $1+\cos x=\cos\frac{x}{2}$;
გ) $\frac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}}=2$; დ) $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$;
ე) $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$; ვ) $1+\cos x+\cos 2x=0$.

8. ა) $\operatorname{tg}2x=3\operatorname{tg}x$; ბ) $2\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x=3$;
გ) $\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$; დ) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{r}{4}\right)=1$.

9. ა) $\sin^2 x-2\sin x\cos x=3\cos^2 x$; ბ) $6\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=2$;
გ) $8\sin 2x-3\cos^2 x=4$; დ) $5\sin^2 x+3\sin x\cos x-3\cos^2 x=2$;
ე) $2\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$; ვ) $3\sin^2 x-2\sin x\cos x+4\cos^2 x=4$.

10*. ა) $2\sin^3 x+2\cos x\sin^2 x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0$;
ბ) $3\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x+3\operatorname{ctg}^2 x+2=0$;
გ) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5$;
დ) $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x$.

11. იპოვეთ მოცემული განტოლების უდიდესი უარყოფითი და უმცირესი დადებითი ამონახსნები:
ა) $2\sin^2 2x+\sin^2 4x=1{,}25$; ბ) $4\cos x\cos 2x=\cos 3x$;
გ) $11\operatorname{ctg}x-5\operatorname{tg}x=\frac{16}{\sin x}$; დ) $2\sin 2x+\cos^2 x+2+\cos 2x=0$.

12. იპოვეთ მოცემული განტოლების ყველა ის ამონახსნი, რომელიც მითითებულ შუალედს ეკუთვნის:
ა) $\sin^2 x+3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$ $x\in(\pi;2\pi)$;
ბ) $4(1+\cos x)=9+\sin^4 x-\cos^4 x$ $x\in(-\pi;\pi)$;
გ) $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x-\cos^2 x=-2$ $x\in(0;4)$.

13. დაამტკიცეთ, რომ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს:

ა) $4\sin 2x+\cos x=5$; ბ) $\sin x=x^2-x+\frac{3}{2}$; გ) $\sin 2x\cos x=1$.

14. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$; ბ) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$;

გ) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$; დ) $\sin x+\cos x=\frac{5}{4}$.

15. რას ეწოდება ქვესიმრავლე?

ა) დაასახელეთ სიმრავლე, რომელსაც მხოლოდ ერთი ქვესიმრავლე აქვს.

ბ) არსებობს თუ არა სიმრავლე, რომელსაც მხოლოდ სამი ქვესიმრავლე აქვს.

გ) თუ A წესიერი მრავალკუთხედების სიმრავლეა, რომელი ოთხკუთხედების სიმრავლეა A-ს ქვესიმრავლე?

16. როგორი ნიშანი აქვს a-ს, თუ $f(x)=ax^2$ ფუნქციისთვის

ა) $f(-3)>f(-2)$; ბ) $f(4)>f(1)$; გ) $f(-3)>f(2)$.

პროექტი:

გახსენით სამუშაო ფურცელი პროგრამა GeoGebra-ში. მოაწესრიგეთ ფონის, ღერძების, ბადის ფერი. x ღერძზე მანძილის ერთეულად აირჩიეთ $\frac{\pi}{2}$ y ღერძზე, შემდეგ ააგეთ:

ა) $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $y=0{,}5\sin x$ და $y=-\sin x$;

ბ) $y=\cos x$, $y=\cos(x+\frac{\pi}{4})$, $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ და $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})$;

გ) $y=\sin x$, $y=\sin 2x$, $y=\sin 0{,}5x$

ფუნქციათა გრაფიკები.

ალგებრის ფანჯარაში ფუნქციათა ჩანწერაზე დააწკაპეთ, თაგვის მარჯვენა ღილაკზე. გაიხსნება ახალი ფანჯარა. შემდეგ „თვისებები“-ზე შემდეგ „ფერი“. მარცხენა სვეტში მონიშნეთ შესაბამისი წირი, მიეცით სასურველი ფერი და „დახურვა“.

მე-10 ლოგოში მონიშნეთ „ტექსტის ჩასმა“ და ჩაწერეთ:

ა) $y=a\sin x$; $a=-1;\ 1;\ 0{,}5;\ 2$;

ბ) $y=\cos(x-a)$; $a=0;\ \pm\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}$;

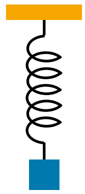
გ) $y=\sin ax$; $a=1;\ 2;\ 0{,}5$.

წარწერა მარცხენა ღილაკიდან ხელის აუღებლად შეგიძლიათ დასვათ სასურველ ადგილას და შეგიძლიათ შეაფერადოთ კიდეც.

1. $y=\sin x$ ($y=\cos x$) ფუნქციის რა თვისებები აქვთ საერთო მიღებულ გრაფიკებს და რა თვისებით განსხვავდებიან ერთმანეთისგან?

მითითება: sin(x) და π მოძებნეთ ბრძანებათა ველში,  ლოგოში (sin(x) შეგიძლიათ უბრალოდ აკრიფოთ კიდეც).

8 $y = a\sin(bx+c)$ ფუნქცია



ზამბარაზე დავკიდოთ საწონი და ვუბიძგოთ მას ქვემოთ. საწონი დაიწყებს რხევას ზევით და ქვევით — საწონის გადახრა წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\,.$$

v_0 არის ის სიჩქარე, რითაც ვუბიძგებთ საწონს, ხოლო $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, სადაც m – საწონის მასაა, k კი ზამბარის სიხისტე (ძალა, რომელიც საჭიროა ზამბარის 1 სმ-ით გასაჭიმათ).

რხევებს , რომლებიც

$$S = A\sin\omega t$$

კანონით ხორციელდება **ჰარმონიული რხევები** ჰქვია.

ω რხევის სიხშირეა — რხევათა რიცხვი 2π წამში.

$\frac{2r}{\sim}$ — რხევის პერიოდია, A რხევის ამპლიტუდა და გვიჩვენებს წონასწორობის მდგომარეობიდან მერხევი სხეულის მაქსიმალურ გადახრას.

- იპოვეთ ა) $y=2\sin x$; ბ) $y=0{,}5\cos x$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა, მნიშვნელობათა სიმრავლე.

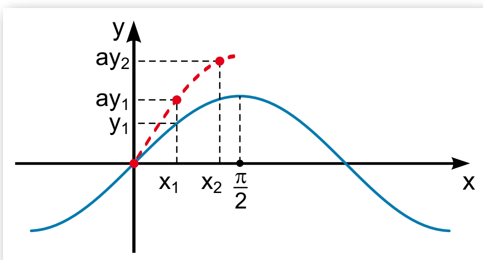
- იპოვეთ $y=\sin 3x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

განვიხილოთ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთი გარდაქმნა.

I. $y = a\sin x$.

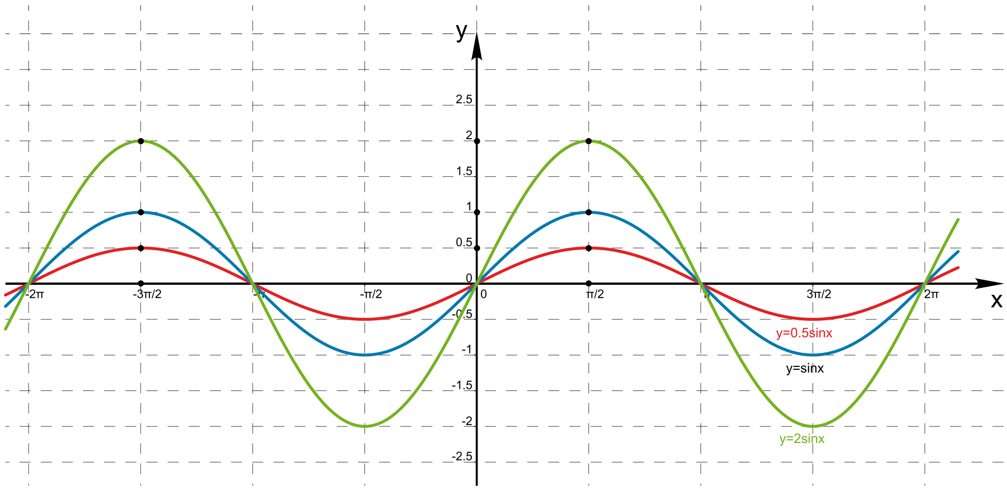
- როგორ მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისგან $y=af(x)$ ფუნქციის გრაფიკი (გაიხსენეთ $y=x^2$ და $y=ax^2$)?

ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ წერტილი $(x_1;y_1)$, $y_1=\sin x_1$, მდებარეობს $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ $(x_1;ay_1)$ იქნება $y=a\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილი.



$|a|$ რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რა უდიდესი მნიშვნელობას ღებულობს ფუნქცია, **ამპლიტუდა** ეწოდება.

ნახაზზე ნაჩვენებია y=2sinx, y=sinx და y=0,5sinx ფუნქციათა გრაფიკები.

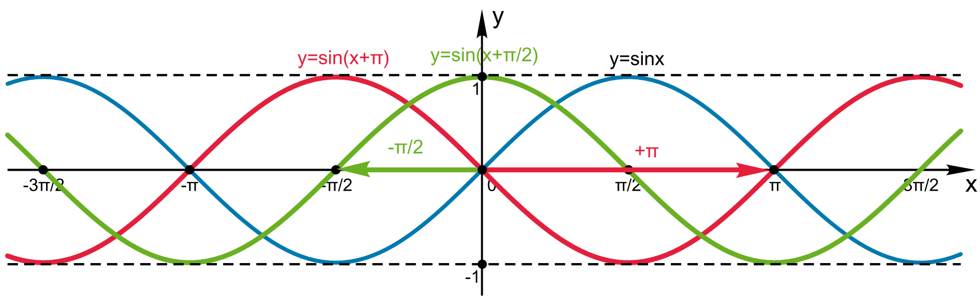


ჩამოწერეთ y=2sinx და y=0,5sinx ფუნქციათა თვისებები.

II. ავაგოთ y=sin(x-m) ფუნქციის გრაფიკი.

ვთქვათ, f(x)=sinx, g(x)=sin(x–m) განვიხილოთ g(x+m)=sin(x+m-m)=sinx. მივიღეთ: g(x+m)=f(x), რაც იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქცია განსაზღვრის არედან აღებულ ნებისმიერ x_0-თვის ღებულობს იმავე მნიშვნელობას, რასაც g ფუნქცია (x_0+m)-თვის. ამრიგად, y=sin(x-m) ფუნქციის გრაფიკი მიიღება y=sinx ფუნქციის გრაფიკის $\begin{cases} x \to x+m \\ y \to y \end{cases}$ პარალელური გადატანით x ღერძის გასწვრივ m ერთეულით.

ამრიგად, ჩვენ უკვე შეგვიძლია ავაგოთ y=sin(x–π) და $y=\sin\left(x+\frac{r}{2}\right)$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ.2)



ნახ. 2

საზოგადოდ, y=f(kx) ფუნქციის გრაფიკი მიიღება: თუ k>1, y=f(x) ფუნქციის გრაფიკის k-ჯერ შეკუმშვით, ხოლო თუ 0<k<1 k-ჯერ გაჭიმვით x ღერძის გასწვრივ.

III. ავაგოთ $g(x)=\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკი f(x)=sinx ფუნქციის გრაფიკისგან.

$$g\left(\frac{1}{k}x\right)=\sin\left(k\cdot\frac{1}{k}x\right)=\sin x=f(x).$$

ე.ი. f(x) ფუნქცია განსაზღვრის არედან აღებულ ნებისმიერ x_1 წერტილში ღებულობს იმავე მნიშვნელობას, რასაც g(x) ფუნქცია $x_2=\frac{x_1}{k}$ წერტილში. მაგალითად, თუ k=2, მაშინ $x_2=\frac{x_1}{2}$ მაგრამ, თუ $k=\frac{1}{2}$, მაშინ $x_2=\frac{x_1}{1/2}=2x_1$. აქედან გამომდინარე, g(x)=sinkx ფუნქციის გრაფიკის

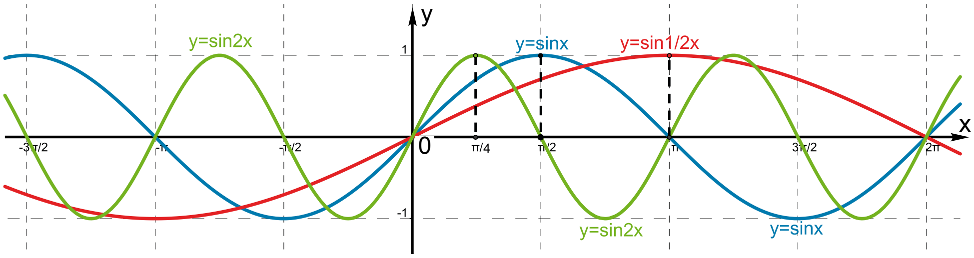
y=sin2x ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად აბსცისები შემცირდა 2-ჯერ.

(x,y)→(2x;y)

y=sin$\frac{1}{2}$x-ის ასაგებად კი შემცირდა $\frac{1}{2}$-ჯერ, ანუ გაიზარდა 2-ჯერ,

(x,y)→($\frac{1}{2}$x;y)

მისაღებად $f(x)=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ $k>1$, შეიკუმშება k-ჯერ, ხოლო, თუ $0<k<1$ გაიჭიმება k-ჯერ x ღერძის გასწვრივ.



ნახაზზე მოცემულია $y=\sin 2x$ და $y=\sin\frac{1}{2}x$ ფუნქციათა გრაფიკები.

$T_0(\sin 2x)=\pi \qquad T_0(\sin\frac{1}{2}x)=4\pi.$

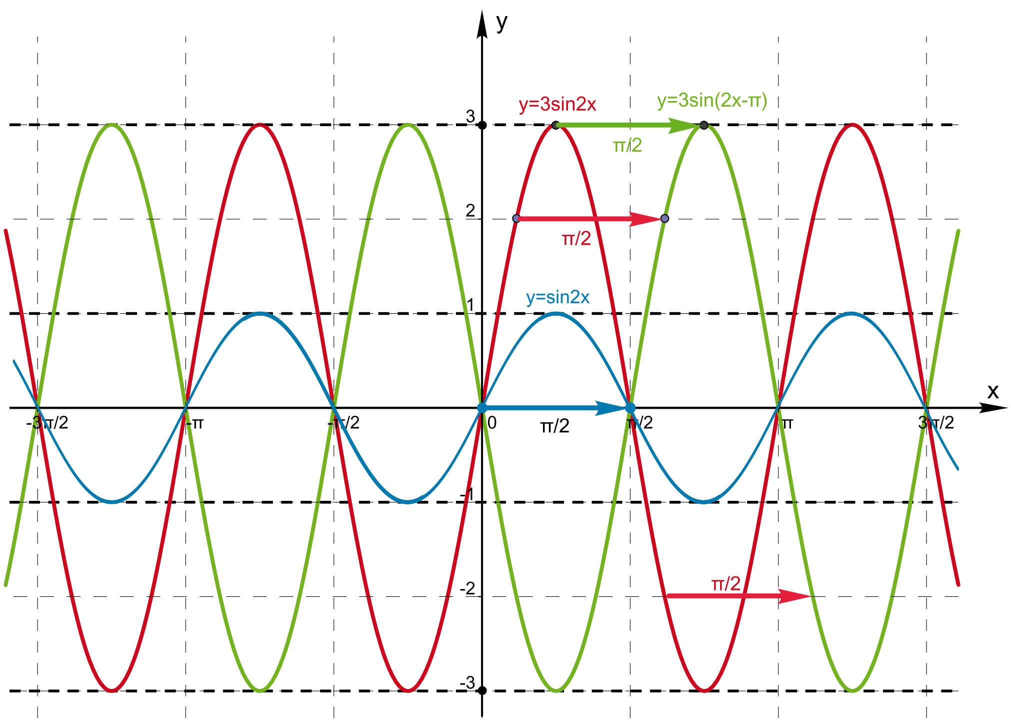
ამრიგად, $y = a\sin(k(x-b))$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად, სასურველია ვისარგებლოთ ასეთი სქემით:

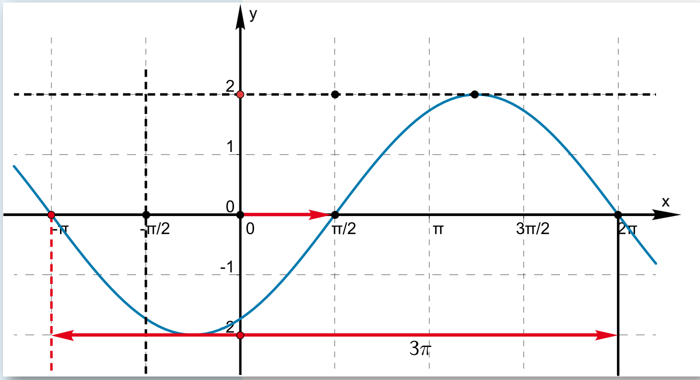
ავაგოთ 1. $y = \sin kx$ (1)

2. $y = a\sin kx$ (2)

3. $y = a\sin k(x-b)$ ფუნქციის გრაფიკი – (2) გრაფიკი გაცურდება b ერთეულით x ღერძის გასწვრივ. ფუნქციის პერიოდია $T_0=\frac{2\pi}{k}$.

ავაგოთ $y=3\sin(2x-\pi)=3\sin\left(2(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი.





მაგალითი 1.

ნახაზზე მოცემულია y=asin(kx–c) ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ a, k და c რიცხვები.

ამოხსნა:

$a=2$, $T_0=3\pi$.

$y=a\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკი გადაადგილებულია x ღერძის გასწვრივ $+\frac{\pi}{2}$-ით. ე.ი. ფუნქციის განტოლებას აქვს სახე:

$y = 2\sin(k(x-\frac{\pi}{2}))$, რადგან $T_0 = \frac{2\pi}{k} = 3\pi \Rightarrow k = \frac{2}{3}$,

მივიღეთ: $y = 2\sin\left(\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$

ე.ი. $a=2$, $k=\frac{2}{3}$, $c=\frac{\pi}{3}$.

სავარჯიშოები:

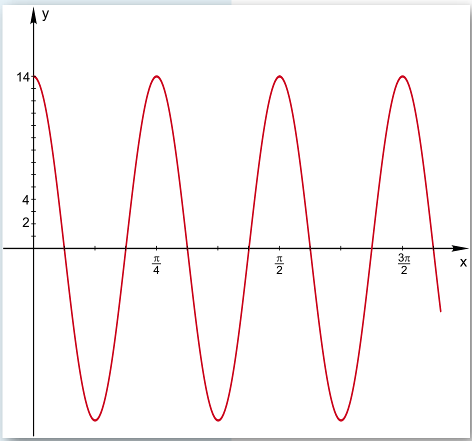
1. იპოვეთ ფუნქციის ამპლიტუდა და პერიოდი და დახაზეთ შესაბამისი გრაფიკი:

ა) $y=1,5\sin x$; ბ) $y=2\cos x$; გ) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

დ) $y=\cos\frac{1}{2}x$; ე) $y=2\sin(x-\frac{\pi}{2})$; ვ) $y=3\cos(2x+\pi)$.

ზ) $y=2\sin x$; თ) $y=\cos x-2$; ი) $y=\frac{1}{2}\cos x$;

კ) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; ლ) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; მ) $y=5\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.



2. ნახაზზე მოცემულია $y=a\cos bx$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ a და b კოეფიციენტები.

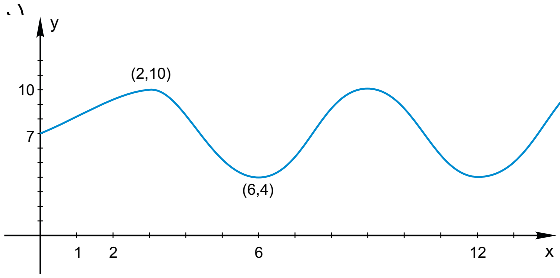
3. მოცემულია $f(x)=2\cos\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$ ფუნქცია.
ა) დახაზეთ ფუნქციის გრაფიკი $-\pi\leq x\leq 5\pi$ ინტერვალში და იპოვეთ ამპლიტუდა და პერიოდი;
ბ) იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე;
გ) დაწერეთ f(x) ფუნქცია კოსინუსისგან განსხვავებული სხვა ტრიგონომეტრიული ფუნქციით გამოსახული.

4. დახაზეთ $-\pi \le x \le 5\pi$ ინტერვალზე შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ ამპლიტუდა, პერიოდი და მნიშვნელობათა სიმრავლე:

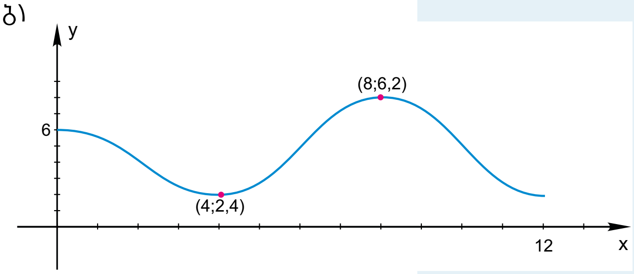
ა) $y=\frac{1}{2}\cos x-3$; ბ) $y=3\sin 3x-\frac{1}{2}$; გ) $y=1{,}2\sin\frac{x}{2}+4{,}3$.

5. ნახაზზე მოცემულია $y=a\sin\frac{\pi}{2}x+b$. იპოვეთ a და b.

ა)

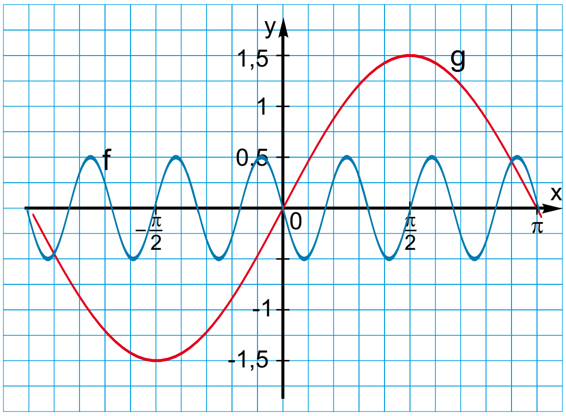


ბ)

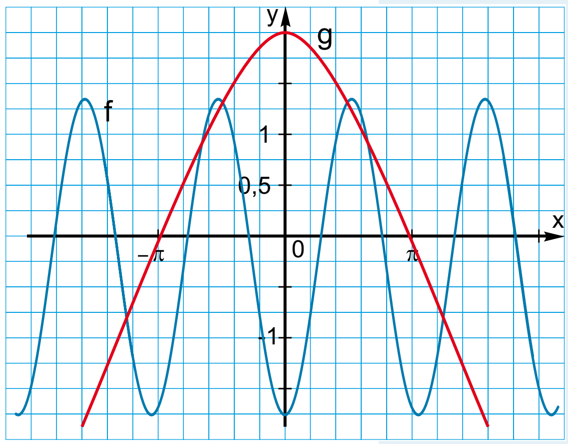


6. ნახაზზე მოცემულია y=asin(bx–c) ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ a, b და c კოეფიციენტები:

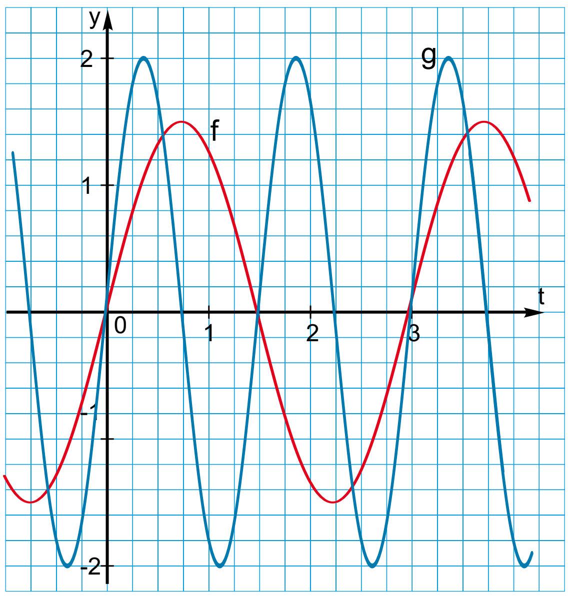
ა)



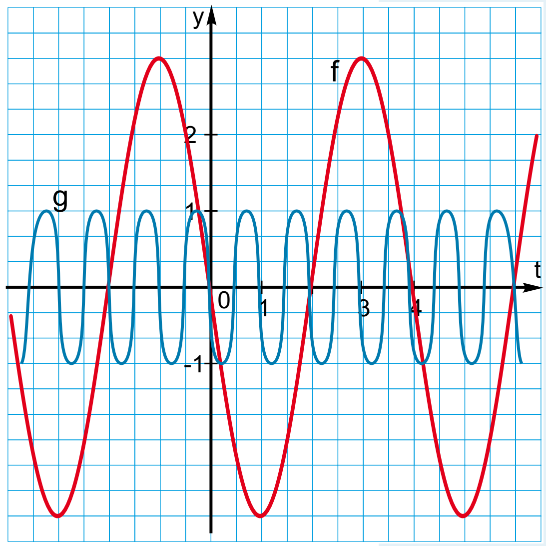
ბ)



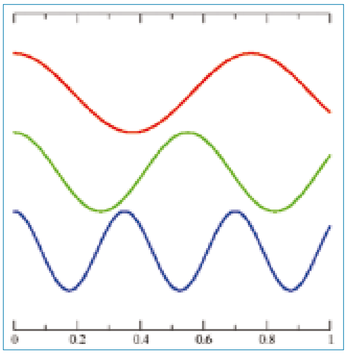
გ)



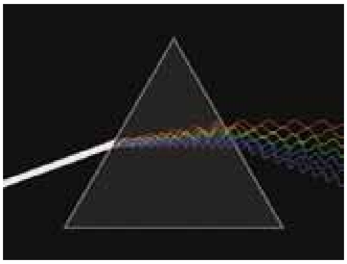
დ)



პროექტი:



სამი ელექტრომაგნიტური ტალღა (ლურჯი, მწვანე, წითელი) x ღერძის გასწვრივ მანძილი მიკრონებშია მოცემული.



ფიზიკაში, ტექნიკაში მრავლად არის დროში პერიოდული პროცესები. მაგალითად, ვიბრაციები, რხევები, რომლებიც y=acos(bx+c) სახის ფუნქციების საშუალებით აღიწერებიან.

$f(x)=A\cos(\omega t+\varphi)$ ჰარმონიულ რხევათა ზოგადი ფორმულაა, სადაც A რხევის ამპლიტუდაა. ω - რხევის სიხშირეა, φ კი - რხევის საწყისი ფაზა. რომლის პერიოდია $T_0 = \frac{2r}{\sim}$.

სინათლე სხვადასხვა სიხშირის ტალღებისგან შედგება. სხვადასხვა სიხშირის ტალღები სხვადასხვაგვარად გარდატყდება თეთრი სინათლე დისპერსიის გამო პრიზმაში გასვლისას კომპონენტებად იშლება.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები გამოიყენება აგრეთვე ნავიგაციაში, საინჟინრო მეცნიერებაში, ასტრონომიაში, ფიზიკაში და სხვა.

როცა ორკესტრი უკრავს, მაშინ ყოველი მუსიკალური ინსტრუმენტი იწვევს ჰაერის თავისებურ რხევას. ეს რხევები იკრიბება და ჩვენამდე აკორდის სახით აღწევს.

გაინტერესებთ კიდევ მეტი გაიგოთ, სად და როგორ გამოიყენება ტრიგონომეტრია? მაშინ მოიძიეთ ინფორმაცია და მოამზადეთ თემა: ტრიგონომეტრიის გამოყენება და წარმოადგინეთ გაკვეთიზე.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

1 კომპიუტერში ააგეთ:

ა) $y=a\sin x+b\sin 3x$, $a,b\in[-5;5]$ ბიჯით 1;   ბ) $y=a\cos 2x+b\cos 4x$

ფუნქციის გრაფიკი. დააკვირდით, არის თუ არა მიღებული ფუნქცია პერიოდული. დადებითი პასუხის შემთხვევაში, რას უდრის უმცირესი დადებითი პერიოდი?

2 ვთქვათ, $f(x)=a_1\sin(k_1x+b_1)$, $g(x)=a_2\sin(k_2x+b_2)$ და $F(x)=f(x)+g(x)$.

ა) აჩვენეთ, რომ, თუ $T_0(f)=T_1$; $T_0(g)=T_2$ და მოიძებნება $m,n\in N$, ისე რომ $mT_1=nT_2$, მაშინ $mT_1(nT_2)$ იქნება $F(x)$ ფუნქციის პერიოდი.

3 იპოვეთ ა) $y=\sin 2x+\cos 3x$;   ბ) $y=\sin 3x+\cos x$;   გ) $y=\sin\frac{x}{2}+\sin 3x$

ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

I თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1. განსაზღვრეთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$ რიცხვების ნიშანი, როცა

ა) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$; ბ) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$;

გ) $\frac{11\pi}{5} < \alpha < \frac{12\pi}{5}$; დ) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\frac{5\pi}{4}$.

2. რომელ მეოთხედშია წერტილი, რომელიც მიიღება $P_0(1;0)$ წერტილის α კუთხით მობრუნებით, თუ $\alpha=$

ა) 1; ბ) 2; გ) –2,75; დ) 3,2; ე) –4,2; ვ) 5,2;

ზ) 6,4.

3. განსაზღვრეთ გამოსახულების ნიშანი:

ა) $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{11\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{6\pi}{5}$; ბ) $\left(\cos\frac{9\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}\right)\cdot\sin\frac{12\pi}{7}$;

გ) $(\sin2,5-\cos2,7)\cdot\cos3,6$; დ) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{9\pi}{8}\cdot\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{8}$.

4*. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობათა სიმრავლე: $y=\cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{-\sin^2 2x}$.

5. იპოვეთ:

ა) $\sin\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\cos\alpha=\frac{9}{41}$ და $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$;

ბ) $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{4}$ და $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$;

გ) $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha=0,6$ და $90°<\alpha<180°$;

დ) $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\alpha=2$ და $180°<\alpha<270°$.

6. შეიძლება თუ არა ერთდროულად სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობები:

ა) $\sin\alpha=\frac{1}{5}$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{24}}$ ბ) $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\cos\alpha=\frac{3}{4}$.

7. ცნობილია, რომ $\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha=b$. იპოვეთ:

ა) $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$; ბ) $\mathrm{tg}^3\alpha-\mathrm{ctg}^3\alpha$.

8. გამოთვლების გარეშე დაადგინეთ გამოსახულების ნიშანი:

ა) $\sin\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{10\pi}{9}$; ბ) $\cos3,13-\sin3,13$; გ) sin1-sin1,1; დ) sin2-sin2,1;

ე) sin125°-sin124°; ვ) sin240°-sin241°; ზ) cos71°-cos72°;

თ) cos1-cos0,9; ი) cos100°-cos99°; კ) cos3,4-cos3,5.

9*. ზრდადია თუ კლებადი ფუნქცია:

ა) y=cos(sinx), $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$; ბ) sin(cosx), $x\in\left[\pi;\frac{3}{2}\pi\right]$; გ) tg(cosx), $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

10. ცნობილია, რომ $\cos\beta = -\frac{1}{2}$.

ა) სწორია თუ არა, რომ $\beta = 120°$;

ბ) მიუთითეთ რამდენიმე კუთხე, რომელთა კოსინუსი $-\frac{1}{2}$-ის ტოლია.

11. იპოვეთ:

ა) $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ და $\mathrm{ctg}\alpha$, თუ $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ და $\frac{r}{2} < a < r$;

ბ) $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ და $\mathrm{ctg}\alpha$, თუ $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ და $r < a < \frac{3r}{2}$;

გ) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $\mathrm{ctg}\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\alpha = \frac{7}{24}$ და $r < a < \frac{3r}{2}$;

დ) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\mathrm{ctg}\alpha = -2,4$ და $\frac{r}{2} < a < r$.

12. იპოვეთ:

ა) $\sin^2\frac{r}{13} + \sin^2\frac{11r}{26}$;

ბ) $\frac{\sqrt{3}}{\cos 290°} + \frac{1}{\sin 250°}$;

გ) $\sin 10° \cdot \sin 30° \sin 50° \sin 70°$;

დ) $\sin^2 70° \sin^2 50° \sin^2 10°$;

ე) $\sin^2\frac{r}{8} + \cos^2\frac{3r}{8} + \sin^2\frac{5r}{8} + \cos^2\frac{7r}{8}$;

ვ) $8\cos\frac{4r}{9}\cos\frac{2r}{9}\cos\frac{r}{9}$;

ზ) $\frac{(\cos 4° + \cos 2°)^2 + (\sin 4° + \sin 2°)^2}{\sin 2° \mathrm{ctg} 1°}$;

თ) $\frac{\sin 24° \cos 6° - \sin 6° \sin 66°}{\sin 21° \cos 39° - \cos 51° \sin 69°}$.

13. იპოვეთ:

ა) $\mathrm{tg}2\alpha$, თუ $\cos\left(a - \frac{r}{2}\right) = -\frac{2}{3}$ და $\frac{3r}{2} < a < 2r$;

ბ) $\mathrm{tg}2\alpha$, თუ $\cos\left(a - \frac{r}{2}\right) = \frac{3}{5}$ და $\frac{r}{2} < a < r$.

14. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos\left(\frac{r}{4} + x\right)\cos\left(\frac{r}{4} + x\right) = \frac{1}{2}$;

ბ) $\cos\left(\frac{r}{3} - x\right)\sin\left(\frac{r}{3} + x\right) = -\frac{1}{4}$.

15. გამოსახეთ $\sin 2\alpha$-თი:

ა) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;

ბ) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

16. იპოვეთ:

ა) $\alpha + \beta$, თუ $\mathrm{tg}\alpha = 0,5$; $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{3}$; $0 < a < \frac{r}{2}$; $0 < b < \frac{r}{2}$;

ბ) $\alpha - \beta$, თუ $\sin\alpha = \frac{40}{41}$; $\sin\beta = -\frac{9}{41}$; $0 < a < \frac{r}{2}$; $-\frac{r}{2} < b < 0$.

17. იპოვეთ:

ა) $\cos 4\alpha$, თუ $\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{1}{2}$;

ბ) $\cos 4\alpha$, თუ $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$.

18. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}$; ბ) $\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0$;

გ) 3sinx=sin2x; დ) $\cos^2\frac{x}{2}=\cos x$.

19. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$; ბ) $1-2\sin^2\frac{5\pi}{12}$; გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15^\circ$; დ) $\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cos^2(22^\circ30')$.

20. ამოხსენით განტოლება:

ა) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$; ბ) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$; გ) $1+\cos\frac{x}{2}=2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$;

დ) $1+\cos 8x=2\cos 4x$; ე) $2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=1$; ვ) $2\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 4x=1$.

21. გამოთვალეთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებით:

ა) cos225°; ბ) sin(–210°); გ) tg315°; დ) tg(–150);

ე) $\cos\frac{7\pi}{6}$; ვ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; ზ) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; თ) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

22. გამოთვალეთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებით:

ა) sin412°+tg1099°·cos52°; ბ) sin772°+tg199°·cos412°; გ) cos566°+tg13°·sin566°.

23. ცნობილია, რომ ctgα=–2. იპოვეთ:

ა) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$; ბ) $\frac{3\cos^2\alpha-5\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha}$;

გ) $\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}$; დ) $\frac{3\sin\alpha-7\cos\alpha}{2\cos\alpha+3\sin\alpha}$.

24. იპოვეთ:

ა) $\frac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin^2 2\alpha}$, თუ tgα=3; ბ) $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$, თუ tgα+ctgα=a.

25. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, მაშინ: (1+tgα)(1+tgβ)=2.

26. $\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{4}-1=0$ განტოლების რამდენი ამონახსნია მოთავსებული [–π;π] შუალედში?

27. შესაძლებელია თუ არა, შესრულდეს ტოლობა:

ა) 2sinα+cosα=3; ბ) 3sinα–14cosα=7; გ) 3cosα–2sinα=5; დ) sinαcosα=–1.

I თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- ფორმულები, რომლებიც გამოხატავენ დამოკიდებულებას ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის – **ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები**.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2. $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

3. $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

4. $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

5. $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

6. $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

7. $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

8. $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$

- ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(a+b)=\frac{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b}{1-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b}$$

$$\mathrm{tg}(a-b)=\frac{\mathrm{tg}a-\mathrm{tg}b}{1+\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b}$$

1. $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2. $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

3. $\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}a}{1-\mathrm{tg}^2a}$

2ა. $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

2ბ. $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$