

ნანა ჯაფარიძე • მაია წილოსანი • ნანი წულაია

# მასწავლებლის წიგნი





ნანა ჯაფარიძე • მაია წილოსანი • ნანი წულაია

# მათემატიკა 11

მასწავლებლის წიგნი



გაკურსულაკაურის  
გამომცემლობა



## ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი.....	5
ეროვნული სასწავლო გეგმა.....	6
წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები.....	7
შინაარსისა და მიზნების რუკა.....	11
მოსწავლის შეფასების სისტემა.....	14
გთავაზობთ რამდენიმე გაკვეთილის სანიმუშო სცენარს.....	17
<b>I თავი.....</b>	<b>22</b>
1. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები.....	22
2. დამოკიდებულება ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.....	23
3. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივება, იგივეობათა დამტკიცება.....	24
4. ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.....	25
5. ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.....	25
6. დაყვანის ფორმულები.....	26
7. ამოცხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება.....	27
<b>II თავი.....</b>	<b>31</b>
1. წრფეთა პარალელურობის ნიშანი.....	31
2. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა.....	31
3. სიბრტყეთა პარალელურობა.....	32
4. ამოცანები კვეთების აგებაზე.....	33
<b>III თავი.....</b>	<b>35</b>
1. ხარისხი ირაციონალური მაჩვენებლით.....	35
2. მაჩვენებლიანი ფუნქცია.....	35
3. ლოგარითმი.....	36
4. ლოგარითმის თვისებები.....	37
5. შექცეული ფუნქცია.....	39
6. ლოგარითმული ფუნქცია.....	40
7. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები.....	40
8. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები.....	43
9. ნახევრადლოგარითმული ბადე.....	45
<b>IV თავი.....</b>	<b>48</b>
1. ფიგურათა პარალელური დაგეგმილება.....	48
2. კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა მართობულობა.....	49
3. წრფისა და სიბრტყის მართობულობა.....	50
4. წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი.....	51
5. პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილი.....	53
6. სამი მართობის თეორემა.....	53
7. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის.....	55
8. ორწახნაგა კუთხე.....	57
9. მართობული სიბრტყეები. სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანი.....	60

<b>V თავი</b> .....	<b>67</b>
1. მიმდევრობა .....	67
2. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი .....	67
3. მიმდევრობის ზღვარი .....	70
4. ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ .....	71
5. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია .....	72
<b>VI თავი</b> .....	<b>75</b>
1. ვექტორის კოორდინატები .....	75
2. ვექტორების შეკრება-გამოკლება .....	75
3. ვექტორის გამრავლება რიცხვზე. კოლინეარული ვექტორები .....	75
4. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი .....	76
5. ბრუნვითი სხეულები, ცილინდრი .....	76
6. კონუსი .....	77
7. სფერო, ბირთვი .....	77
<b>VII თავი</b> .....	<b>79</b>
1. კომბინატორული ამოცანები .....	79
2. გადანაცვლება, წყობა .....	80
3. ჯუფთება .....	81
4. წყობა განმეორებით .....	82
5. ამოვსხნათ ამოცანები ალბათობათა თეორიიდან .....	83
6. გეომეტრიული ალბათობა .....	85
7. დაგროვილი სიხშირე. რანგი .....	86
8. ოგივა .....	88
9. ცენტრალური ტენდენციის საზომები .....	89

## შესავალი

XI კლასში მათემატიკის საგნის სწავლების ძირითადი მიზანია მოზარდში კვლევის ჩვევის, აგრეთვე ანალიტიკური, ლოგიკური, სისტემური და სიმბოლური აზროვნების გამომუშავება. მათემატიკის სწავლამ მოსწავლეს უნდა შესძინოს ის უნარ-ჩვევები, რომელიც მას დაეხმარება ცხოვრებისეული, პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრაში.

ეროვნული სასწავლო გეგმის დანიშნულებაა დაეხმაროს სასკოლო განათლების პროცესის მონაწილეებს ამ პროცესის დაგეგმვასა და წარმართვაში.

ეროვნულ სასწავლო გეგმაში აღწერილია ის სავალდებულო მოთხოვნები, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ყველა მოსწავლე სასწავლო წლის დასრულების მერე. ეს მოთხოვნები თითოეული მიმართულებისათვის შედეგებისა და მათი ინდიკატორების ენაზეა ჩამოყალიბებული.

შედეგი არის დებულება იმის შესახებ, თუ რა უნდა შესძლოს მოსწავლემ სწავლის მოცემული საფეხურის დასრულების შემდეგ.

ინდიკატორი არის დებულება იმ ცოდნისა და უნარ-ჩვევების დემონსტრირების შესახებ, რომელიც ჩამოყალიბებულია შესაბამის შედეგში. ინდიკატორის ძირითადი დანიშნულებაა იმის წარმოჩენა, მიღწეულია თუ არა შედეგი. ინდიკატორი ორიენტირებულია უნარ-ჩვევებზე და ჩამოყალიბებულია აქტივობის ენაზე.

XI კლასის წარმოდგენილი სახელმძღვანელოს დანიშნულებაა ხელი შეუწყოს ეროვნული სასწავლო გეგმით გათვალისწინებული უნარ-ჩვევების გამომუშავებას.

სახელმძღვანელო ფარავს სტანდარტის ყველა შედეგს.

მასალის მიწოდების ძირითადი მეთოდური ორიენტირია პრობლემური თხრობა. მოსწავლე არის გაკვეთილის ახსნის აქტიური მონაწილე.

გაგაცნობთ წიგნის სტრუქტურას.

თითქმის ყველა პარაგრაფი იწყება სიტუაციური ამოცანით, მაპროგოცირებელი შეკითხვით ან ისეთი ამოცანით, რომელიც მოსწავლისაგან კვლევას მოითხოვს და რომელიც იძლევა ვარაუდის გამოთქმის საშუალებას. გაკვეთილის ეტაპები გამოყოფილია აქტივობებით, რითაც ხდება ახალი მასალის ათვისების შემოწმება და გაღრმავება. ვარსკვლავით მონიშნულია ამოცანები მაღალი შეფასებისათვის.

მასწავლებლის სარეკომენდაციო წიგნში მოცემულია რამოდენიმე გაკვეთილის სცენარი, აქტივობების მიზანი, დანიშნულება, სავარაუდო და სწორი პასუხები, საკონტროლოს ნიმუშები. მოცემულია შეფასების ძირითადი მდგენელები, დამხმარე ლიტერატურა მასწავლებლისათვის.

აგრეთვე გთავაზობთ სავარაუდო საათობრივ განაწილებას. სარეზერვო საათები გვაძლევს საშუალებას, რომ ზოგიერთ გაკვეთილს მასწავლებელმა მეტი დრო დაუთმოს, გამოიყენოს თავის შეხედულებისამებრ.

## ეროვნული სასწავლო გეგმა

წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები მიმართულებების მიხედვით:

რიცხვები და მოქმედებები	კანონზომიერებები და ალგებრა	გეომეტრია და სივრცის აღქმა	მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა
<p><b>XI.1.</b> მოსწავლეს შეუძლია რიცხვთა პოზიციური სისტემების/ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების ერთმანეთთან დაკავშირება.</p> <p><b>XI.2.</b> მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება.</p> <p><b>XI.3.</b> მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხების გამოყენება</p> <p><b>XI.4.</b> მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა.</p>	<p><b>XI.5.</b> მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება რეალური ვითარების მოდელირებისას.</p> <p><b>XI.6.</b> მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად.</p> <p><b>XI.7.</b> მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ცნებებისა და აპარატის გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.</p>	<p><b>XI.8.</b> მოსწავლეს შეუძლია ვექტორებზე ოპერაციების შესრულება და მათი გამოყენება გეომეტრიული და საბუნებისმეტყველო პრობლემების გადაჭრისას.</p> <p><b>XI.9.</b> მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.</p> <p><b>XI.10.</b> მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას.</p> <p><b>XI.11.</b> მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად.</p>	<p><b>XI.12.</b> მოსწავლეს შეუძლია დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო მონაცემების მოპოვება.</p> <p><b>XI.13.</b> მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია.</p> <p><b>XI.14.</b> მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა.</p> <p><b>XI.15.</b> მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.</p>

# წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები

## მიმართულება: რიცხვები და მოქმედებები

### XI.1. მოსწავლეს შეუძლია რიცხვთა პოზიციური სისტემების/ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების ერთმანეთთან დაკავშირება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- მოყავს ინფორმაციის ციფრული კოდირების/ტექნოლოგიების მაგალითები; აკავშირებს რიცხვის სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში ჩაწერას ერთმანეთთან (მაგალითად, *ორობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილ რიცხვს წერს ათობით პოზიციურ სისტემაში*);
- ახდენს ირაციონალური რიცხვის რაციონალური რიცხვების მიმდევრობით მიახლოების დემონსტრირებას პრაქტიკულ ამოცანებთან დაკავშირებული გამოთვლების კონტექსტში;
- მსჯელობს რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს შორის განსხვავებაზე მათი პოზიციური სისტემის გამოყენებით ჩაწერისას.

### XI.2. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება.

- შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე: ამარტივებს ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების (მათ შორის ხარისხისა და ლოგარითმის) შემცველ გამოსახულებას ან პოულობს მის მნიშვნელობას მოქმედებათა თვისებების, თანმიმდევრობისა და მათ შორის კავშირის გამოყენებით;
- პოულობს არითმეტიკული მოქმედების შედეგს დასახელებული სიზუსტით; მსჯელობს შედეგის ცვლილებაზე და ცდომილებაზე, რომელიც გამოწვეულია გამოსახულების წევრების დამრგვალებით;
- იყენებს შეფასების სხვადასხვა ხერხს ნამდვილ რიცხვებზე შესრულებული გამოთვლების (მათ შორის ფესვი და ლოგარითმი მარტივ შემთხვევებში) შედეგის ადეკვატურობის შესამოწმებლად;
- ახდენს უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე სიდიდეების, მათზე მოქმედებებისა და მოქმედებათა შედეგის ინტერპრეტაციას, მიმდევრობის ან რომელიმე პროცესის ამსახველი ფუნქციის კონტექსტში.

### XI.3. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხების გამოყენება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდს ამოცანების ამოხსნისას ან რიცხვების შესახებ მარტივი დებულებების დამტკიცებისას (მაგალითად, *საწინააღმდეგოს დაშვებით ამტკიცებს რომელიმე რიცხვის ირაციონალურობას*);
- აყალიბებს და გამოსახავს რიცხვების თვისებების ან რიცხვითი კანონზომიერებების შესახებ გამონათქვამებს შორის კერძო/ზოგადი ტიპის მიმართებებს, იყენებს გამოსახვის ხერხს გამოთქმული მოსაზრების მართებულობის შემოწმებისას/დასაბუთებისას;
- რაოდენობებთან და სიდიდეებთან დაკავშირებული მსჯელობის ნიმუშზე ახდენს მსჯელობის ხაზის და დასკვნითი ნაწილის ანალიზს, აღნიშნავს მის სუსტ და ძლიერ მხარეებს.

#### **XI.4. მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს რიცხვის ხარისხსა და ლოგარითმს, ხარისხისა და ლოგარითმის თვისებებს პრაქტიკული საქმიანობიდან ან მეცნიერების სხვადასხვა დარგებიდან მომდინარე ამოცანების ამოხსნისას (მაგალითად, *ენტროპია ბიოლოგიასა და ფიზიკაში, რადიოაქტიული დაშლა და დათარიღების მეთოდები*);
- განსაზღვრავს და იყენებს შესაფერის ერთეულებს სიდიდის ცვლილების სიჩქარის აღსაწერად; ადგენს სხვადასხვა ერთეულებს შორის თანაფარდობას.

#### **მიმართულება: კანონზომიერებები და ალგებრა**

#### **XI.5 მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება რეალური ვითარების მოდელირებისას.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს (ტრიგონომეტრიულ, უბან-უბან წრფივ, საფეხურებრივ, მაჩვენებლიან, ლოგარითმულ) ფუნქციებს და მათ თვისებებს რეალური პროცესების მოდელირებისას;
- ახდენს ფუნქციის ნულების, ფუნქციის მაქსიმუმის/მინიმუმის ინტერპრეტირებას იმ რეალური პროცესის/ვითარების კონტექსტში, რომელიც ამ ფუნქციით აღიწერება;
- იყენებს სიმრტყეზე წრფივი ოპტიმიზაციის მეთოდებს რეალურ ვითარებასთან დაკავშირებულ ამოცანებში (მაგალითად, *შეზღუდული რესურსების ეფექტიანად გამოყენების ამოცანებში*) წრფივის ფუნქციის მაქსიმუმის/მინიმუმის მოძებნისას.

#### **XI.6 მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს ფუნქციის გრაფიკის გეომეტრიულ ნიშნებს (მაგალითად, *საკოორდინატო დერძის პარალელური წრფის მიმართ სიმეტრიულობა, კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრულად სიმეტრიულობა, პარალელური გადატანის მიმართ ინვარიანტულობა*) ფუნქციის თვისებების დასადგენად;
- იყენებს შესაფერის გრაფიკულ, ალგებრულ მეთოდებს ან ტექნოლოგიებს (ტრიგონომეტრიული, უბან-უბან წრფივი, საფეხურებრივი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული) ფუნქციის ისეთი თვისებების დასადგენად, როგორცაა: ზრდადობა/კლებადობა, ნიშანმუდმივობა, პერიოდულობა/პერიოდი, ფესვები, ექსტრემუმები;
- აღწერს თუ რა გავლენას ახდენს ფუნქციის პარამეტრების ცვლილება ფუნქციის გრაფიკზე.

#### **XI.7 მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ცნებებისა და აპარატის გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ასახელებს ისეთ სტრუქტურებს (მაგალითად, *მიმდევრობებს, ასახვებს; მათ შორის რეალურ ვითარებაში*), რომელთა აღწერისას შესაძლებელია რეკურენტული წესის გამოყენება; იყენებს რეკურენტულ წესს ასეთი სტრუქტურის აღსაწერად;
- დებულებების დამტკიცებისას, შესაბამის შემთხვევებში, იყენებს მათემატიკურ ინდუქციას (მათ შორის არითმეტიკულ/გეომეტრიულ პროგრესიასთან დაკავშირებული ზოგიერთი ფორმულის მისაღებად);
- იყენებს ხისებრ დიაგრამებს და გრაფებს ვარიანტების დასათვლელად, გეგმის/განრიგის შესადგენად, ოპტიმიზაციის დისკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად.

## **მიმართულება: გეომეტრია და სივრცის აღქმა**

### **XI.8 მოსწავლეს შეუძლია ვექტორებზე ოპერაციების შესრულება და მათი გამოყენება გეომეტრიული და საბუნებისმეტყველო პრობლემების გადაჭრისას.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ახდენს ვექტორის სიგრძისა და მიმართულების, ვექტორებზე მოქმედებების (შეკრება, სკალარზე გამრავლება, სკალარული ნამრავლი) და მათი თვისებების გეომეტრიულ და ფიზიკურ ინტერპრეტაციას;
- იყენებს ვექტორებს გეომეტრიული დებულებების დასამტკიცებლად და ზომების დასადგენად სიბრტყეზე;
- იყენებს კოორდინატებს ვექტორებისა და ვექტორებზე ოპერაციების გამოსახვისას.

### **XI.9 მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- პოულობს ლოგიკურ კავშირებს (მაგალითად, *გამომდინარეობა*) მოცემულ გეომეტრიულ დებულებებს შორის; იყენებს დედუქციურ და ინდუქციურ მსჯელობას;
- განაზოგადებს ცალკეულ გეომეტრიულ დებულებებს; აყალიბებს ჰიპოთეზას და ასაბუთებს/ უარყოფს მას (მათ შორის მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით; *მაგალითად, ეილერის ფორმულა სიბრტყეზე და სივრცეში*);
- მსჯელობს ევკლიდური გეომეტრიის აქსიომატიკის არაწინააღმდეგობრიობის შესახებ;
- იყენებს ალგებრულ გარდაქმნებს გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.

### **XI.10 მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ასახელებს გეომეტრიული ფიგურის იმ მახასიათებლებს, რომლებიც არ იცვლება მოცემული გეომეტრიული გარდაქმნისას (გარდაქმნის ინვარიანტებს);
- ფიგურების შესახებ სხვადასხვა მონაცემების (მაგალითად, *ფიგურათა ზომები, ფიგურათა წვეროების კოორდინატები, ფიგურათა ელემენტებს შორის ალგებრული თანაფარდობები*) გამოყენებით ასაბუთებს ან უარყოფს ორი გეომეტრიული ფიგურის ეკვივალენტობას მოცემული გარდაქმნის ან გარდაქმნის ტიპის მიმართ.

### **XI.11 მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- მსჯელობს სივრცული ფიგურის კვეთის შესაძლო ფორმაზე და აგებს სივრცული ფიგურის მითითებულ კვეთას;
- პოულობს ფიგურის გეგმის მითითებული პარალელური დაგეგმილებისას;
- მსჯელობს სივრცული ფიგურის შესაძლო ფორმაზე მისი კვეთის/კვეთების მიხედვით;
- მსჯელობს ფიგურის შესაძლო ფორმაზე მისი ანასახის მიხედვით პარალელური დაგეგმილებისას.

## **მიმართულება: მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა**

### **XI.12 მოსწავლეს შეუძლია დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო მონაცემების მოპოვება.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ირჩევს და იყენებს მონაცემთა შეგროვების შესაფერის საშუალებას (დაკვირვება, გაზომვა, მითითებულ რესპონდენტთა ჯგუფის გამოკითხვა მზა ანკეტით/კითხვარით, მონაცემთა მოპოვება მონაცემთა სხვადასხვა წყაროებიდან), ასაბუთებს თავის არჩევანს;
- განსაზღვრავს რესპონდენტებს, ირჩევს კითხვების დასმის შესაფერის ფორმას (ღია კითხვები, დახურული კითხვები, უჯრედის მონიშვნა, შკალაზე მონიშვნა), ქმნის მარტივ კითხვარს და იყენებს მას მონაცემთა შესაგროვებლად;
- წარმოადგენს საკითხის შესასწავლად შესაფერისი ექსპერიმენტის გეგმას, ატარებს ექსპერიმენტს და აგროვებს მონაცემებს.

### **XI.13 მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ირჩევს მონაცემთა წარმოდგენის შესაფერის გრაფიკულ ფორმებს, ასაბუთებს თავის არჩევანს, აგებს და განმარტავს ცხრილებს/დიაგრამებს (მათ შორის ინტერვალთა კლასებად დაჯგუფებული მონაცემებისათვის);
- ადგენს სიხშირეთა განაწილებას, წარმოადგენს მას გრაფიკული ფორმით და აღწერს მას სიმეტრიულობის, მოდების რაოდენობის, გაშლილობის ან სხვა ნიშნების საშუალებით;
- ერთი გრაფიკული ფორმით წარმოდგენილ მონაცემებს წარმოადგენს განსხვავებული გრაფიკული ფორმით და წარმოაჩენს თითოეული ფორმის ხელსაყრელ და არახელსაყრელ მხარეებს;
- ამოიცნობს დიაგრამის მცდარ ინტერპრეტაციებს ან არაკორექტულად აგებულ/გაფორმებულ დიაგრამებს, განმარტავს და ასწორებს ნაკლს.

### **XI.14 მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- აღწერს შემთხვევითი ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს, ითვლის დამოუკიდებელ ხდომილობათა ალბათობებს (მათ შორის ჯამის ალბათობის ფორმულების გამოყენებით);
- ითვლის რთულ ხდომილობათა ალბათობებს კომბინატორული ანალიზის გამოყენებით;
- შემთხვევითი ექსპერიმენტის ჩასატარებლად ერთ მოწყობილობას ცვლის მისი ეკვივალენტური სხვა მოწყობილობით და ასაბუთებს არჩევანს.

### **XI.15 მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.**

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ითვლის და იყენებს შემაჯამებელ რიცხვით მახასიათებლებს დაუჯგუფებელ მონაცემთა ერთობლიობების დასახასიათებლად/შესადარებლად და მოსაზრებათა/არგუმენტების შესაფასებლად;
- განსაზღვრავს მოდალურ კლასს და აფასებს საშუალოს, მედიანას და დიაპაზონს დაუჯგუფებულ მონაცემთა სიმრავლისთვის, ითვალისწინებს მათ რეალურ ვითარებაში გადაწყვეტილების მიღებისას;
- გამოთქვამს ვარაუდს ხდომილობის მოსალოდნელობის შესახებ მონაცემთა საფუძველზე (მაგალითად, ფარდობითი სიხშირის მიხედვით) და ასაბუთებს ვარაუდის მართლზომიერებას.

## შინაარსისა და მიზნების რუკა

შინაარსი	თემის კავშირი მიზნებთან და შედეგებთან	სავარაუდო ხანგრძლივობა
1	2	3
<p><b>I თავი</b>                      ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები.                      დამოკიდებულება ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.                      ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივება და იგივეობათა დამტკიცება.                      ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.                      ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.                      დაყვანის ფორმულები.                      ამოცხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება.  <math>y = a \sin(bx+c)</math> ფუნქცია.</p>	<p>მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება რეალური ვითარების მოდელირებისას.                      მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება.                      მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად.</p>	34 სთ
საკონტროლო წერა №1		1 სთ
<p><b>II თავი</b>                      წრფეთა პარალელურობის ნიშანი. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა.                      სიბრტყეთა პარალელურობა. მოცანები კვეთების აგებაზე.</p>	<p>მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.                      მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად.                      მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა.</p>	16 სთ
საკონტროლო წერა №2		1 სთ

1	2	3
<p><b>III თავი</b></p> <p>ხარისხი ირაციონალური მაჩვენებლით.</p> <p>მაჩვენებლიანი ფუნქცია.</p> <p>ლოგარითმი.</p> <p>ლოგარითმის თვისებები.</p> <p>შექცეული ფუნქცია.</p> <p>ლოგარითმული ფუნქცია.6</p> <p>მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები.</p> <p>მაჩვენებლიანი განტოლება.</p> <p>ლოგარითმული განტოლება.</p> <p>მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები.</p> <p>ნახევრადლოგორითმული ბადე.</p>	<p>მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება რეალური ვითარების მოდელირებისას.</p> <p>მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება.</p> <p>მოსწავლეს შეუძლია რიცხვთა პოზიციური სისტემების/ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების ერთმანეთთან დაკავშირება.</p> <p>მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად.</p>	<p>32 სთ</p>
<p><b>საკონტროლო წერა №3</b></p>		<p>1 სთ</p>
<p><b>IV თავი</b></p> <p>ფიგურათა პარალელური დაგეგმილება.</p> <p>კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა მართობულობა.</p> <p>წრფისა და სიბრტყის მართობულობა.</p> <p>წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი.</p> <p>პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილი.</p> <p>სამი მართობის თეორემა.</p> <p>კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. ორნახნაგა კუთხე.</p> <p>მართობული სიბრტყეები. სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანი.</p>	<p>მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.</p> <p>მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას.</p> <p>მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად.</p>	<p>26 სთ</p>
<p><b>საკონტროლო წერა №4</b></p>		<p>1 სთ</p>

1	2	3
<p><b>V თავი</b>  მიმდევრობა.  მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი.  მიმდევრობის ზღვარი.  ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ.  უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია.</p>	<p>მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხების გამოყენება  მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა.  მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება.  მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ცნებებისა და აპარატის გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.</p>	20 სთ
საკონტროლო წერა №5		1 სთ
<p><b>VI თავი</b>  ვექტორის კოორდინატები.  ვექტორების შეკრება-გამოკლება.  ვექტორის გამრავლება რიცხვზე, კოლინეარული ვექტორები.  ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი.  ბრუნვითი სხეულები, ცილინდრი. კონუსი.  სფერო, ბირთვი.</p>	<p>მოსწავლეს შეუძლია ვექტორებზე ოპერაციების შესრულება და მათი გამოყენება გეომეტრიული და საბუნებისმეტყველო პრობლემების გადაჭრისას.  მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას.  მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად.  მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად.</p>	14 სთ
საკონტროლო წერა №6		1 სთ
<p><b>VII თავი</b>  კომბინატორული ამოცანები.  გადანაცვლება, ნყობა.  ჯუფთება.  ნყობა განმეორებით.  ამოვხსნათ ამოცანები ალბათობათა თეორიიდან.  გეომეტრიული ალბათობა.  დაგროვილი სიხშირე. რანგი.  ოგივა.  ცენტრალური ტენდენციის საზომები.</p>	<p>მოსწავლეს შეუძლია დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო მონაცემების მოპოვება.  მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია.  მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა.  მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.  მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ცნებებისა და აპარატის გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.</p>	21 სთ
საკონტროლო წერა №7		

## მოსწავლის შეფასების სისტემა

### მოსწავლის შეფასების მიზანი, პრინციპები და მიდგომები

1. მოსწავლის შეფასების მიზანია სწავლა-სწავლების ხარისხის მართვა, რაც გულისხმობს სწავლის ხარისხის გაუმჯობესებაზე ზრუნვასა და კონტროლს.
2. მოსწავლის აკადემიური მიღწევის შეფასება უნდა იყოს ხშირი და მრავალმხრივი; მან ხელი უნდა შეუწყოს: მოსწავლეთა მრავალმხრივ განვითარებას, მათი შესაძლებლობების გამოვლენას, სხვადასხვა პოტენციალის მქონე მოსწავლეთათვის თანაბარი პირობების შექმნას.
3. მოსწავლე უნდა შეფასდეს სხვადასხვა ფორმებით (ესე, პროექტის მომზადება, ზეპირი გამოსვლა, ექსპერიმენტის ჩატარება, ცდის ჩატარება, წარმოდგენა, წერითი, ფერწერული ან სხვა ტიპის ნამუშევარი, არგუმენტირებული მსჯელობა და სხვ.).

### განმსაზღვრელი და განმავითარებელი შეფასება

1. სკოლაში გამოიყენება ორი ტიპის შეფასება: განმსაზღვრელი და განმავითარებელი.
2. განმსაზღვრელი შეფასება აკონტროლებს სწავლის ხარისხს, ადგენს მოსწავლის მიღწევის დონეს ეროვნული სასწავლო გეგმით განსაზღვრულ მიზნებთან მიმართებაში. განმსაზღვრელ შეფასებაში იწერება ქულა.
3. განმავითარებელი შეფასება აკონტროლებს თითოეული მოსწავლის განვითარების დინამიკას და ხელს უწყობს სწავლის ხარისხის გაუმჯობესებას. განმავითარებელი შეფასებისას გამოიყენება ისეთი საშუალებები, როგორცაა სიტყვიერი კომენტარი, რჩევა-დარიგება, დაკვირვების ფურცელი, თვითშეფასებისა და ურთიერთშეფასების სქემა და სხვ.
4. განმავითარებელი და განმსაზღვრელი შეფასებების აღწერილობა

	<b>განმავითარებელი</b>	<b>განმსაზღვრელი</b>
მიზანი	სწავლის ხარისხის გაუმჯობესება;  მოსწავლის განვითარების ხელშეწყობა	სწავლის ხარისხის გაკონტროლება; მოსწავლის მიღწევის დონის დადგენა ეროვნული სასწავლო გეგმით განსაზღვრულ მიზნებთან მიმართებაში; აკადემიური მოსწავლის დონის განსაზღვრა
შეფასების საგანი	სწავლის პროცესი	სწავლის შედეგი
შეფასების შედეგად მიღებული გადაწყვეტილება	წინსვლის ხელშესაწყობად განსხვავებული აქტივობის შერჩევა, სწავლების სტრატეგიის შეცვლა, რჩევა-დარიგების მიცემა და სხვ.	მომდევნო ეტაპზე (კლასში/საფეხურზე) დაშვება/არდაშვება
წარმართების კრიტერიუმების განსაზღვრა	კონკრეტული მოსწავლის წინსვლის საფუძველზე (საკუთარ მიღწევებთან მიმართებით - რა დონეს ფლობდა, რა დონეს ფლობს)	იმის საფუძველზე, თუ რამდენად მიაღწია სტანდარტით განსაზღვრულ შედეგებს (ყველასათვის საერთო, სტანდარტით დადგენილ ნორმასთან მიმართებაში)
შეფასების საშუალებები	თვით/ურთიერთშეფასების რუბრიკა; კითხვარი; სიტყვიერი (ზეპირი/წერილობითი) კომენტარი; უნარის განვითარების დონის აღწერა.	ქულა

მოსწავლეთა აკადემიური მიღწევები ფასდება ათქულიანი სისტემით

ქულები	შეფასების დონეები
10	მაღალი
9	
8	საშუალოზე მაღალი
7	
6	საშუალო
5	
4	საშუალოზე დაბალი
3	
2	დაბალი
1	

### საგნის სემესტრული ქულის შემადგენელი კომპონენტები

- სემესტრის მანძილზე მოსწავლეები ფასდებიან შემდეგი სამი კომპონენტის მიხედვით:
  - საშინაო დავალება;
  - საკლასო დავალება;
  - შემაჯამებელი დავალება.
- შეფასების სამივე კომპონენტს ერთნაირი წონა აქვს.
- საშინაო და საკლასო დავალებათა კომპონენტებში გამოიყენება როგორც განმსაზღვრელი, ასევე განმავითარებელი შეფასება.
- შემაჯამებელი დავალების კომპონენტში აუცილებელია განმსაზღვრელი შეფასების გამოყენება.
- ეროვნული სასწავლო გეგმა თითოეული საგნისათვის განსაზღვრავს სემესტრის განმავლობაში ჩასატარებელი შემაჯამებელი დავალებების სავალდებულო მინიმალურ რაოდენობას. ამ კომპონენტით შეფასებისას:
  - სტანდარტის მოთხოვნათა დასაკმაყოფილებლად, აუცილებელია შემაჯამებელი დავალების მრავალგვარი ფორმის გამოყენება (თხზულება, მოხსენება, რეფერატი, პროექტი, საველე-გასვლითი სამუშაო, ლაბორატორიული კვლევა, სახვითი და გამოყენებითი ხელოვნების ნიმუში და სხვ.);
  - მოსწავლე ვალდებულია შეასრულოს კლასში ჩატარებული ყველა შემაჯამებელი დავალება (ეროვნული სასწავლო გეგმით დადგენილი სავალდებულო მინიმუმი და სკოლის მიერ დამატებით დადგენილი, ამ უკანასკნელის არსებობის შემთხვევაში);
  - თუ მოსწავლე არ შეასრულებს რომელიმე შემაჯამებელ სამუშაოს გაცდენის გამო, სკოლა ვალდებულია, მისცეს მას გაცდენილი შემაჯამებელი დავალებების აღდგენის საშუალება. შემაჯამებელი აღდგენითი სამუშაოს ვადები და მისი ჩატარების ფორმა განისაზღვრება სასკოლო სასწავლო გეგმით.

### განმსაზღვრელი შეფასების ქულათა სახეობები

ზოგადსაგანმანათლებლო სისტემაში გამოიყენება განმსაზღვრელი შეფასების შემდეგი სახეობები:

- საგნის მიმდინარე და შემაჯამებელი ქულები – საშინაო, საკლასო და შემაჯამებელი კომპონენტის ქულები, რომლებსაც მოსწავლე იღებს სემესტრის განმავლობაში;
- საგნის სემესტრული ქულა – საგანში მიღებული შეფასება თითოეულ სემესტრში (სემესტრული გამოცდის ჩაბარების შემთხვევაში, გამოითვლება მისი გათვალისწინებით);

გ) საგნის წლიური ქულა – სემესტრული ქულებიდან გამომდინარე შეფასება საგანში. წლიურ ქულაში შეიძლება წლიური გამოცდის ქულაც აისახოს, თუ ასეთი გამოცდა გათვალისწინებულია სასკოლო სასწავლო გეგმით და სკოლის მიერ განსაზღვრულია, რომ მას გავლენა ექნება საგნის წლიურ ქულაზე;

დ) საერთო წლიური ქულა – საგნების წლიური ქულებიდან გამომდინარე შეფასება;

ე) საფეხურის საერთო ქულა – ზოგადი განათლების რომელიმე საფეხურის (დაწყებითი, საბაზო, საშუალო) საერთო შეფასება.

### **ქულების გამოანგარიშების წესი**

1. საგნის სემესტრული ქულის გამოანგარიშების წესი:

ა) მოსწავლის მიერ სემესტრის განმავლობაში სამივე კომპონენტში (საშინაო, საკლასო და შემაჯამებელი) მიღებული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს მიღებული ქულების რაოდენობაზე;

ბ) მიღებული ქულა უნდა დამრგვალდეს მთელის სიზუსტით (მაგ., 6.15 მრგვალდება 6-მდე, 7.49 მრგვალდება 7-მდე, 8.5 მრგვალდება 9-მდე);

გ) იმ შემთხვევაში, თუ მოსწავლეს არა აქვს შესრულებული ყველა შემაჯამებელი დავალება, მისი სემესტრული ქულის გამოსაანგარიშებლად სამივე კომპონენტში მიღებული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს მიღებული ქულებისა და შეუსრულებელი შემაჯამებელი დავალებების რაოდენობის ჯამზე.

2. საგნის წლიური ქულის გამოანგარიშების წესი:

ა) საგნის წლიური ქულის გამოსაანგარიშებლად საგნის სემესტრული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს ორზე;

ბ) საგნის წლიური ქულა მრგვალდება მთელის სიზუსტით (მაგ., 7.25 მრგვალდება 7-მდე, 4.49 მრგვალდება 4-მდე, 9.5 მრგვალდება 10-მდე);

გ) თუ სასკოლო სასწავლო გეგმა ითვალისწინებს წლიური გამოცდის ჩატარებას და განსაზღვრულია, რომ ამ გამოცდის ქულაც აისახება წლიურ ქულაზე, მაშინ საგნის წლიური ქულა სამი (ორი - საგნის სემესტრული და ერთი - გამოცდის) ქულის საშუალო არითმეტიკულია (დამრგვალებული მთელის სიზუსტით).

3. საერთო წლიური ქულის გამოანგარიშების წესი:

ა) საერთო წლიური ქულის გამოსაანგარიშებლად უნდა შეიკრიბოს ეროვნული სასწავლო გეგმით კონკრეტული კლასისთვის გათვალისწინებული ყველა სავალდებულო საგნის წლიური ქულა (საშუალო საფეხურზე, აგრეთვე, სასკოლო სასწავლო გეგმით განსაზღვრული არჩევითი საგნების ქულები სავალდებულო საგნების წლიურ ქულებთან ერთად) და ჯამი გაიყოს ქულების რაოდენობაზე;

ბ) საერთო წლიური ქულა მრგვალდება მეთაედის სიზუსტით (მაგ., 7.14 მრგვალდება 7.1-მდე, 8.15 მრგვალდება 8.2-მდე).

4. საფეხურის საერთო ქულის გამოანგარიშების წესი:

ა) საფეხურის საერთო ქულა გამოითვლება იმავე პრინციპით, რომლითაც ითვლება საერთო წლიური ქულა: ჯამდება საფეხურის მანძილზე ნასწავლი ყველა საგნის წლიური ქულა (მაგ. მათემატიკა მე-10 კლასი, მათემატიკა მე-11 კლასი, მათემატიკა მე-12 კლასი, ქართული მე-10 კლასი, ქართული მე-11 კლასი, ქართული მე-12 კლასი და ა.შ.) და ჯამი იყოფა ქულების საერთო რაოდენობაზე;

ბ) საფეხურის საერთო ქულა მრგვალდება მეთაედის სიზუსტით (მაგ., 6.43 მრგვალდება 6.4-მდე, 7.58 მრგვალდება 7.6-მდე).

# ბთავაზოთ რამდენიმე გაკვეთილის სანიშნო სცენარს

## I ტაჰი.

### 6. დაყვანის ფორმულაჰი

**რეზიუმე:** მოსწავლეები ეცნობიან დაყვანის ფორმულებს.

აქტივობის მიზანი:

მოსწავლეები ეცნობიან დაყვანის ფორმულებს სხვადასხვა ტრიგონომეტრიული ფუნქციები-სათვის, უმუშავდებათ ამ ფორმულების გამოყენების უნარ-ჩვევები.

მოსწავლეები შეძლებენ ტრიგონომეტრიული წრენიის დახმარებით თავად გამოიყვანონ ეს ფორმულაჰი.

შესწავლილი მასალის საფუძველზე შეძლებენ მოცემული ტრიგონომეტრიული ფორმულაჰი დაიყვანონ  $0^\circ$ -დან  $90^\circ$ -მდე კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებამდე და რიგ შემთხვევაში გამოითვალონ მათი მნიშვნელობები.

სავარაუდო ხანგრძლივობა - 1 სთ.

აქტივობის აღწერა:

1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალები ანალიზით, რის შემდეგაც იწყებენ ფიქრს პარაგრაფის დასაწყისში, წყვილებისათვის განკუთვნილ დავალებაზე (10 წთ).

2) შემდეგ წყვილების მიერ ხდება მათი ნააზრევის პრეზენტაცია. მოსწავლეებისთვის თვალსაჩინოა ერთეულოვან წრენიზე მიღებული სამკუთხედების ტოლობა, რის შედეგადაც ადვილად დაინახავენ, რომ  $\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ$  (5 წთ).

3) მასწავლებელი განმარტავს, თუ რას ეწოდება დაყვანის ფორმულაჰი და კითხვა-პასუხის რეჟიმში, წიგნში მოცემული თვალსაჩინოების გამოყენებით, მოსწავლეებთან ერთად ამტკიცებს

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$  და  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$  ფორმულებს (10 წთ).

4) მეცადინეობა გრძელდება წყვილების, ან მცირერიცხოვანი ჯგუფების მუშაობით, მოსწავლეებს გამოყავთ სინუს და კოსინუს ფუნქციებისთვის დაყვანის ფორმულაჰი, 5) აქტივობის გაფართოება-გაღრმავების მიზნით ვიხილავთ პარაგრაფში გარჩეულ მაგალითებს (5 წთ);

5) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

## II ტაჰი.

### 3. სიბრტყეთა მართობულობა

**რეზიუმე:** მოსწავლეები ეცნობიან სიბრტყეთა პარალელობას, სიბრტყეთა პარალელობის ნიშანს, პარალელური სიბრტყეების მესამე სიბრტყით კვეთისას მიღებული წრფეებისა და მონაკვეთების თვისებებს.

აქტივობის მიზანი:

მოსწავლეები ეცნობიან პარალელური სიბრტყეების თვისებებს და ნიშნებს, იძენენ მიღებული ცოდნის გამოყენების უნარ-ჩვევებს.

მოსწავლეები შეძლებენ, ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით, ამოიცნონ პარალელური სიბრტყეები, ამოარჩიონ ამ სიბრტყეების მესამე სიბრტყით კვეთისას მიღებული პარალელური წრფეები და ტოლი მონაკვეთები;

სავარაუდო ხანგრძლივობა -1 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:

- 1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც მასწავლებელი განმარტავს პარალელურ სიბრტყეებს, და თხოვს მოსწავლეებს დაასახელონ პარალელურ სიბრტყეთა წყვილები: საკლასო ოთახის მაგალითზე, მათ გარშემო მდე ბარე საგნების მაგალითზე (5 წთ)
- 2) შემდეგ მასწავლებელი კითხვა-პასუხის რეჟიმში ახსენებს მოსწავლეებს რას წარმოადგენს რაიმე ფაქტის ნიშანი, საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი და ამტკიცებს სიბრტყეთა პარალელობის ნიშანს (10 წთ);
- 3) შემდეგ წყვილები მუშაობენ პარაგრაფში მათთვის განკუთვნილ დავალებაზე და ახდენენ ნამუშევრის პრეზენტაციას (5 წთ);
- 4) მასწავლებელი აყალიბებს პარალელური სიბრტყეების მესამე სიბრტყით კვეთისას მიღებული წრფეების და მონაკვეთების თვისებებს და ამტკიცებს მათ მოსწავლეებთან აქტიური თანამშრომლობის რეჟიმში (10 წთ).
- 5) გაკვეთილი გრძელდება წყვილებში ან მცირერიცხოვან ჯგუფებში მუშაობით. მოსწავლეები ასრულებენ წიგნში წყვილებისთვის განკუთვნილ მეორე დავალებას და ახდენენ ნამუშევრის პრეზენტაციას (10წთ).
- 6) აქტივობის გაფართოება- გაღრმავების მიზნით ვიხილავთ პარაგრაფში გარჩეულ ამოცანას, მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

### III თაპი.

## 6. ლოგარითმული ფუნქცია

**რეზიუმე:** მოსწავლეები ეცნობიან ლოგარითმულ ფუნქციას, მის გრაფიკს, ფუნქციის თვისებებს.

აქტივობის მიზანი:

მოსწავლეები ეცნობიან ლოგარითმულ ფუნქციას, ფუნქციის თვისებებს, დაეუფლებიან ამ თვისებების გამოყენების უნარ-ჩვევებს პრობლემის გადასაჭრელად. მოსწავლეები შეძლებენ ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით გამოიყენონ ლოგარითმული ფუნქციის ესა თუ ის თვისება. შესწავლილი მასალის საფუძველზე შეძლებენ დაადგინონ  $\log_a x - 1$  -ის ნიშანი, შეადარონ ერთმანეთს ტოლფუძიანი ლოგარითმები.

სავარაუდო ხანგრძლივობა - 1სთ;

აქტივობის აღწერა:

- 1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც მასწავლებელი ახსენებს, რომ  $y=a^x$ ,  $a>0$  და  $a\neq 1$  ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა  $y=\log_a x$  (10წთ).
- 2) შემდეგ ხაზავენ  $y=a^x$  ფუნქციის გრაფიკებს ( $a>1$  და  $a\in(0;1)$  შემთხვევებისთვის) და  $y=x$  წრფის მიმართ სიმეტრიით თითოეული შემთხვევისთვის აგებენ  $y=\log_a x$  ფუნქციის გრაფიკებს (10 წთ);
- 3) შემდეგ კითხვა-პასუხის რეჟიმში აყალიბებენ ლოგარითმული ფუნქციის თვისებებს (10 წთ).
- 4) აქტივობის გაფართოება-გაღრმავების მიზნით მასწავლებელი ავლევს მოსწავლეებს იფირონ წიგნში მოცემულ, წყვილებისთვის განკუთვნილ დავალებებზე, რის შემდეგ ხდება ამ ნამუშევრების პრეზენტაცია (10 წთ);
- 5) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

## IV თავი.

### 2. კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა მართობულობა

**რეზიუმე:** მოსწავლეები ეცნობიან სივრცეში მდებარე წრფეებს (მკვეთი, პარალელური, მკვეთი) შორის კუთხის ცნებას, მართობული წრფეების განმარტებას.

აქტივობის მიზანი:

მოსწავლეები ეცნობიან ორ წრფეს შორის კუთხის ცნებას, ამ კუთხის გამოთვლის წესის დაუფლებას, გამოიმუშავენ კუთხის პოვნის წესის გამოყენების უნარ-ჩვევას.

მოსწავლეები შეძლებენ, ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით, შეარჩიონ შესაბამისი გზა და შეასრულონ შესაბამისი ნახაზი ორ წრფეს შორის კუთხის გამოსათვლელად.

შესწავლილი მასალის საფუძველზე, შეძლებენ ტოლი კუთხეების ამორჩევას და მათ შორის მეტ-ნაკლებობის დადგენას.

სავარაუდო ხანგრძლივობა -1 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:

1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც ვთხოვთ დაასახელონ პარალელური, თანამკვეთი და აცდენილი წრფეები (საკლასო ოთახის მაგალითზე) (5 წთ).

2) შემდეგ განვმარტავთ კუთხეს აცდენილ წრფეებს შორის და ვაყალიბებთ ამ კუთხის პოვნის წესს, რის შემდეგაც უკვე შესაძლებელია განიმარტოს ნებისმიერ ორ წრფეს შორის კუთხე და წრფეთა მართობულობა სივრცეში (10 წთ).

3) მასწავლებელი ავალებს მოსწავლეებს წყვილებში შეასრულონ ნიგნში მოცემული, წყვილები-სათვის განკუთვნილი ამოცანა, რის შემდეგაც რომელიმე წყვილი ახდენს ნამუშევრის პრეზენტაციას (10 წთ).

4) მასწავლებელი კითხვა-პასუხის რეჟიმში იხილავს პარაგრაფში გარჩეულ ორ ამოცანას (10 წთ).

5) აქტივობის გაფართოვება-გაღრმავების მიზნით, შესაძლოა დისკუსიის ფორმაც, იხილავენ პარაგრაფში მოცემულ ინდივიდუალურ შეკითხვებს (5 წთ).

6) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

## V თავი.

### 3. მიმდევრობის ზღვარი

**რეზიუმე:** მოსწავლეები ეცნობიან მიმდევრობის ზღვრის განმარტებას, მიმდევრობის ზღვრის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას.

აქტივობის მიზანი:

მოსწავლეები ეცნობიან მიმდევრობის ზღვრის განმარტებას, ზღვრის განმარტების გამოყენების უნარ-ჩვევას.

მოსწავლეები შეძლებენ აჩვენონ, რომ მოცემული მიმდევრობის ზღვარი მოცემული რიცხვია, ან რიგ შემთხვევებში თავად იპოვონ მიმდევრობის ზღვარი.

სავარაუდო ხანგრძლივობა -1 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:

1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც იხილება პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული ინდივიდუალური დავალებები, დაადგენენ მოცემულ მიმდევრობებს

შორის რომელია მონოტონური, ამოარჩევინ მათ შორის ისეთ მიმდევრობებს, რომელთა არცერთი წევრი არ აღემატება წინასწარ მოცემულ რიცხვს. (10 წთ).

2) გაკვეთილი გრძელდება წიგნში მოცემული, ინდივიდუალური დავალებით, რის შედეგადაც მასწავლებელს უკვე აქვს შესაძლებლობა, განმარტოს მოცემული რიცხვის  $\epsilon$  მიდამო (5 წთ).

3) კითხვა-პასუხის რეჟიმში იხილავენ პარაგრაფში მოცემულ დავალებას, რის შემდეგაც მასწავლებელი განმარტავს მიმდევრობის ზღვარს (10 წთ).

4) განმარტების უკეთ გასააზრებლად მასწავლებელი ახდენს მიმდევრობის ზღვრის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციის პრეზენტაციას (5 წთ).

5) აქტივობის გაფართოვება-გაღრმავების მიზნით, იხილავენ პარაგრაფში გარჩეულ მაგალითებს (10 წთ).

6) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

## VI ტაჰი.

### 4. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

**რეზიუმე:** მოსწავლეები ეცნობიან ვექტორების სკალარული ნამრავლის განმარტებას და გამოთვლის წესს.

აქტივობის მიზანი:

მოსწავლეები ეცნობიან ვექტორების სკალარულ ნამრავლის განმარტებას და ეუფლებიან ამ ნამრავლის გამოთვლის წესს. შეიმუშავენ ამ წესის გამოყენების უნარ-ჩვევებს.

მოსწავლეები შეძლებენ ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით გამოიყენონ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ამა თუ იმ პრობლემის გადასაწყვეტად.

შესწავლილი მასალის საუძველზე შეძლებენ ვექტორის სიგრძის გამოთვლას, მვექტორებს შორის კუთხის სიდიდის პოვნას.

სავარაუდო ხანგრძლივობა - 1სთ.

აქტივობის აღწერა:

1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც მასწავლებელი აძლევს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განმარტებას (5 წთ).

შემდეგ კითხვა-პასუხის რეჟიმში მასწავლებელი ამტკიცებს, რომ ვექტორის სკალარული კვადრატი ამ ვექტორის სიგრძის კვადრატის ტოლია და ავალებს მოსწავლეებს, იფიქრონ პარაგრაფში მოცემულ წყვილებისთვის განკუთვნილ ამოცანაზე (10 წთ).

2) წყვილები ახდენენ თავიანთი ნამუშევრის პრეზენტაციას (5 წთ).

3) ამის შემდეგ მასწავლებელი ამტკიცებს, რომ  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ , სადა  $\alpha$  და  $\vec{b}$  ვექტორებს შორის კუთხეა (10 წთ).

4) აქტივობის გაფართოვება-გაღრმავების მიზნით, გაირჩევა წიგნში ამოხსნილი სამი ამოცანა (10 წთ).

5) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

## VII თავი. 3. ჯუფთება

**რეზიუმე:** მოსწავლეები ეცნობიან  $n$  ელემენტიდან  $m$  ელემენტისანი ჯუფთების გამოსათვლელ ფორმულას, ნიუტონის ბინომს.

აქტივობის მიზანი:

მოსწავლეები ეცნობიან ჯუფთების გამოსათვლელ ფორმულას, ეუფლებიან მისი გამოთვლის წესს და შეიმუშავენ ამ წესის გამოყენების უნარ-ჩვევებს.

შეარჩიონ ამოცანის ამოხსნის გზა და შეარჩიონ შესაბამისი ფორმულა (წყობა, გადანაცვლება, ჯუფთება).

შესწავლილი მასალის საფუძველზე შეძლებენ გაამარტივონ ჯუფთების, წყობის, გადანაცვლების შემცველი გამოსახულებები, დათვალონ ამა თუ იმ ხდომილობის ალბათობა, იპოვონ ბინომის დაშლის ამა თუ იმ წევრის კოეფიციენტი.

სავარაუდო ხანგრძლივობა -1 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:

1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც მასწავლებელი მოსწავლეებთან აქტიური თანამშრომლობით იხილავს პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულ ამოცანას, რის შემდეგაც განმარტავს  $n$  ელემენტიდან  $m$  ელემენტისანი ჯუფთებას (10 წთ).

2) შემდეგ კითხვა-პასუხის რეჟიმში ამტკიცებენ ფორმულას  $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$  (5 წთ);

3) შემდეგ მოსწავლეები, მასწავლებლის დახმარებით, იხილავენ მათთვის განკუთვნილ ინდივიდუალურ დავალებას, რის შემდეგაც უკვე ხსნიან პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულ ამოცანას (10 წთ);

4) შემდეგ მასწავლებელი ამტკიცებს  $C_n^m = C_n^{n-m}$  და  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$  ფორმულებს და პასუხის საძიებლის განხილვის შემდეგ წერს ნიუტონის ბინომს (10 წთ);

5) აქტივობის გაფართოვება-გაღრმავების მიზნით ვიხილავთ პარაგრაფში გარჩეულ ამოცანებს (5 წთ);

6) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

# I ტაპი

## 1. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები

### რეზიუმე:

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებსა და თვისებებს მოსწავლეები X კლასში გაეცნენ. მათ იციან ტრიგონომეტრიული წრენიერი, მასზე ნებისმიერი წერტილის შესაბამისი კუთხის გრადუსული და რადიანული ზომის განსაზღვრა წერტილის კოორდინატების მიხედვით და პირიქით კოორდინატებით კუთხის პოვნა, იციან ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობები. შევეცადოთ კითხვებითა და გარკვეული მითითებებით გავისვენოთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებები, გრაფიკები.

### ამოხსნები, მითითებები:

7. წრეზე ერთი მიმართულებით მოძრაობის დროს მათ შორის მანძილი იფარება სიჩქარეების სხვაობით. თუ გავითვალისწინებთ, რომ A და B წერტილებს შორის მანძილი  $90^\circ$ -ია, ეს მანძილი უნდა დაიფაროს სიჩქარით  $(60-42)^\circ$ /სთ-ში სიჩქარით, ე.ი. პირველი შეხვედრა მოხდება  $\frac{90}{18}=5$  წთ-ში, მეორე შეხვედრა  $\frac{360+90}{18}=25$ წთ-ში. k-ური შეხვედრა  $\frac{360(k-1)+90}{18}=2k-15$  წთ-ში.

8. წრეზე საწინააღმდეგო მოძრაობის დროს მათ შორის მანძილი იფარება სიჩქარეების ჯამით, ე.ი. ა) პირველი შეხვედრა მოხდება  $\frac{90}{20+25}=2$  წთ-ში, ბ) მეორე შეხვედრა  $\frac{450}{45}=10$ წთ-ში. გ) k-ური შეხვედრა  $\frac{360(k-1)+90}{45}=(8k-6)$  წთ-ში.

9. ვაჩვენოთ სამკუთხედის უტოლობით.

10.  $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

$$\begin{cases} (x-1)^2=0 \\ (y-1)^2=1 \end{cases} \text{ ან } \begin{cases} (x-1)^2=1 \\ (y-1)^2=0 \end{cases}$$

$$(1;2) (1;0)$$

$$(2;1) (0;1)$$

11.  $f(x)=x^2-5x-6$        $g(x)=x^2$

$$f(g(x))=(x^2)^2-5x^2-6$$

$$x^4-5x^2-6=0$$

$$x^2 \neq -1 \quad x^2=6, \text{ ე.ი. } x=\pm\sqrt{6}.$$

13. პირველი განტოლებიდან  $\{x\}=2$   $\{y\}=0,3$ . მეორედან  $\{y\}=1$ ;  $\{x\}=0,2$ , თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $\{x\}+\{x\}=x$ . მივიღებთ:  $x=2,2$ ;  $y=1,3$ .

14. პერიოდულია, თუ მუდმივია, ე.ი.  $a+3=0$ .

## 2. დამოკიდებულება ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის

### რეზიუმე:

ფორმულათა ცხრილში მოცემული პირველი მე-6 და მე-7 იგივეობები მოსწავლეთათვის ცნობილია X კლასის კურსიდან. დანარჩენების გამოყენა ისევ მათ დავავალოთ. ყურადღება გავამახვილოთ  $\pm$  ნიშანზე. ნრენირზეც დავანახოთ, თუ როგორ შეესაბამება სინუსის და კოსინუსის თითოეულ მნიშვნელობას, კოფუნქციის ორი მნიშვნელობა. ჩამოაყალიბონ, თუ როგორ უნდა შეირჩეს შესაბამისი ნიშანი.

### ამოხსნები, მითითებები:

1. ა)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$   $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$  I მეოთხედი, ე.ი.  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{3}.$$

3.  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$   $\alpha \in (\frac{\pi}{2} + \pi)$  II მეოთხედი.  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -3$ .

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ საიდანაც } \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}. \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

2. ა)  $\frac{2 \sin x - 5 \cos x}{4 \cos x + 3 \sin x} =$  გავყოთ  $\cos x$ -ზე.

$$\frac{2 \operatorname{tg} x - 5}{4 + 3 \operatorname{tg} x} = \frac{1}{13}.$$

ბ)  $\frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x} = \frac{4}{15}.$

გ)  $\frac{7 \cos x + 3 \sin^2 x \cos x + 3 \cos^3 x}{4 \sin x + 3 \cos x} = \frac{7 \cos x + 3 \cos x}{4 \sin x + 3 \cos x} = \frac{10}{4 \operatorname{tg} x + 3} = \frac{2}{3}.$

5.  $6 \operatorname{tg}^2 \alpha - 11 \operatorname{tg} \alpha + 3$   $\operatorname{tg} \alpha = y$

$$6y^2 - 11y + 3 = 0$$

$y = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{3}$ , მაგრამ  $\alpha \in (225^\circ; 270^\circ)$ .  $\operatorname{tg} 225^\circ = 1$ . ტანგენსი ზრდადია მოცემულ შუალედში, ე.ი.

$$\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} 225^\circ. \text{ მივიღეთ } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{3}. \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

7.  $\operatorname{tg} \alpha$  დადებითია და I მეოთხედში არ არის, ე.ი. III მეოთხედშია.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}. \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} \sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

8. ა)  $\frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + 1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\operatorname{tg}^3 \alpha + 1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)}{\operatorname{tg}^3 \alpha + 1} = \frac{10}{9}.$

ბ)  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)((\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 3 \sin \alpha \cos \alpha)$ . გავითვალისწინოთ, რომ

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}, \text{ ე.ი. } \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{8}.$$

პასუხი:  $-\frac{11}{16}.$

გ) ბ)-ს გათვალისწინებით  $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{3}{8}$ .  $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{23}{32}$ .

11. შევადგინოთ d-ს მიმართ კვადრატული გამოსახულება.  $2d^2 + 5d + 2$ . რომელიც უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა  $d = -\frac{5}{4}$ .

9.  $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + 2 - 2\sin^2\alpha = 2 - \sin^2\alpha$   
 $-1 \leq -\sin^2\alpha \leq 0$      $1 \leq 2 - \sin^2\alpha \leq 2$

### 3. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივება, იზივობათა დამტკიცება

**რეზიუმე:**

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა შორის დამოკიდებულებების გამოყენება. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივების და იზივობის დამტკიცების დროს.

**ამოხსნები, მითითებები:**

3. ა)  $\sin\alpha - \cos\alpha = 0,5$   
 $1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$        $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{8}$

5. ბ)  $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

6. ა)  $\frac{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{2 - 5 \operatorname{ctg} \alpha}{(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \frac{1}{\operatorname{tg}^2 + 1}} = -\frac{10}{3}$ .

7.  $\sin\alpha + \cos\alpha = m$

$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = m^2$        $2\sin\alpha\cos\alpha = m^2 - 1$

$|\sin\alpha - \cos\alpha| = \sqrt{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = \sqrt{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{2 - m^2}$ .

გ)  $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{m^2}$ .

8. ა)  $\sin^2\alpha \left(1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right) \left(1 - \frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right) = \sin^2\alpha \left( (1 + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - \frac{1}{\sin^2\alpha} \right) =$   
 $= \sin^2\alpha \left( 1 + 2\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha} \right) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

10.  $\begin{cases} n^2 - x = 100 \\ m^2 - x = 168 \end{cases}$

$m^2 - n^2 = 68$

$(m-n)(m+n) = 68$ , მაგრამ  $x = n^2 - 100$  და  $x = m^2 - 168$ , ე.ი.  $m > 12$  და  $n > 10$ , ე.ი.  $m+n > 22$ .

მივიღეთ:  $\begin{cases} m + n = 34 \\ m - n = 2 \end{cases}$ , სადაც  $m = 18$  და  $x = 156$ .

#### 4. ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

##### რეზიუმე:

$\cos(\alpha-\beta)$ -ს ფორმულა მასწავლებელმა თავად უნდა დაამტკიცოს. აქ მოსწავლეებს დამოუკიდებლად მუშაობა ამკარად გაუჭირდებათ, მაგრამ დანარჩენი ფორმულების დამტკიცება  $\cos(\alpha+\beta)$ ,  $\sin(\alpha+\beta)$  და  $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$  უკვე შესაძლებელია მივანდოთ მათ.

##### ამოხსნები, მითითებები:

2. ა)  $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .

3)  $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$

4. ა)  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  ე.ი.  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

$\cos \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}$ .

10. გ)  $\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + x \right) - \cos x = -1$ .

$\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) - \cos x = -1$ .

$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

12. ა)  $\sin(\alpha-\beta) - 2\cos \alpha \cdot \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \beta \right) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta + 2\cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

13. ჩასმით ვღებულობთ, რომ  $c$ ;  $a-b+c$  და  $4a-2b+c$  მთელი რიცხვებია, ე.ი. მთელებია  $a-b$ ,  $2a$ ,  $2b$  და  $a+b$  რიცხვებიც. ამის შემდეგ განვიხილოთ  $x$ -ის ლუნი,  $n$ -კენტი მნიშვნელობები.

14.  $\sin \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ$  ან  $\alpha = 150^\circ$ .

$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \beta = 45^\circ$  ან  $\beta = 135^\circ$ .

მაგრამ  $\alpha = 150^\circ$  არ გვანეობს ( $150^\circ + 45^\circ > 180^\circ$ ). ე.ი.  $\alpha = 30^\circ$ . თუ  $\beta = 45^\circ$ , მაშინ მესამე კუთხე  $105^\circ$ -ია. ე.ი. უდიდესი შეიძლება იყოს  $135^\circ$ .

#### 5. ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

##### რეზიუმე:

ჯამის ფორმულების გამოყენებით დავამტკიცებინოთ მოსწავლეებს ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ვაჩვენოთ მათ ნახევარი კუთხის ფორმულები და ნახევარი კუთხის ტანგენსით ფუნქციათა შეცვლის ფორმულები.

##### ამოხსნები, მითითებები:

7. ა)  $\left( \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{3\pi}{8} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{3\pi}{8} \right)} \right)^2 = \left( \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{4}} \right)^2 = 2$

8. ა)  $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$  I მეოთხედი  
 $\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{5\pi}{4}$  III მეოთხედი

$$\cos \alpha = 0,8$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{0,1}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{0,9} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

10. ა)  $2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 1 + \sin \alpha$

ე)  $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha =$   
 $= 2 \operatorname{ctg} 2\alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = 4 \operatorname{tg} 4\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = 8 \operatorname{ctg} 8\alpha$

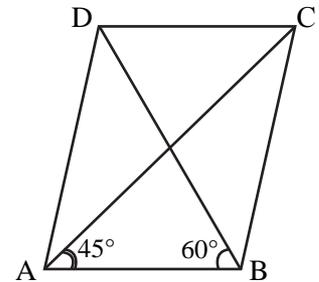
12. ა)  $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1$

ბ)  $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2 \sin \alpha \cos 2\alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)} =$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \operatorname{ctg} \alpha$$

13. გ)  $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{-\frac{2}{7}}{1 + \frac{1}{49}} = -\frac{7}{25}$

14. დავწეროთ სინუსების თეორემა AOD სამკუთხედში, ნიდილებით AO=6.



15.  $\triangle ABC$ -ში  $AC=5$ , ე.ი.  $BM=AM=2,5$ .  $\frac{BK}{KM} = \frac{AB}{AM}$ , საიდანაც  $BK = \frac{15}{11}$ .

## 6. დაყვანის ფორმულები

**რეზიუმე:**

დაყვანის ფორმულების ნაწილს  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); (\pi - \alpha)$  მოსწავლეები იცნობენ სამკუთხედების კუთხეებისთვის. გავაცნოთ მათ დანარჩენი და დავამტკიცებინოთ პარაგრაფში განხილული ნიშნულების მიხედვით. აღვნიშნოთ, რომ  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  ეს არის კუთხე, რომელიც ნიშნის შეუცვლელად ცვლის ოთხივე ფუნქციას კოფუნქციით. აღვნიშნოთ, რომ ზოგიერთი ფორმულა შეიძლება პერიოდულობისა და ლუნ-კენტობის გათვალისწინებითაც მივიღოთ. მაგ.  $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ . ხაზი გავუსვათ, რომ საჭიროა არა ფორმულების დაზეპირება, არამედ კუთხის დაყვანის წესის დამახსოვრება.

**ამოხსნები, მითითებები:**

3. ა)  $\sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{4} - \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$

7. დ)  $\sin \left( 5x - \frac{3\pi}{2} \right) \cdot \cos(2x + 4\pi) - \sin(5x + \pi) \sin^2 x = 0$

8. ა)  $\cos(\alpha + \beta - \gamma) = \cos(180^\circ - 2\gamma) = -\cos 2\alpha$

11. ა)  $\operatorname{tg}\alpha = k_1; \operatorname{tg}\beta = k_2.$

ნახაზის მიხედვით  $\beta = \alpha + \gamma$ , ე.ი.  $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ , რადგან ორ წრფეს შორის კუთხე არ აღემატება  $90^\circ$ -ს.  $\operatorname{tg}\gamma = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$

ბ) მართობული წრფეებისთვის  $\gamma = 90^\circ$ , ე.ი.  $\operatorname{tg}\gamma$  არ არის განსაზღვრული ანუ  $k_1 k_2 + 1 = 0$ , ე.ი.  $k_1 = -\frac{1}{k_2}.$

14. რადგან  $\frac{1}{\sqrt{x-2a}}$  უნდა იყოს მთელი და  $\sqrt{x-2a}$ -ც მთელია, ცხადია,  $x-2a=1, x=2a+1$ . ჩავსვით მარჯვენა მხარეში  $2a+1-2a^3-3a^2=1$ , სადაც  $a=0$  ან  $a=-2$ .

## 7. ამოხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება

**რეზიუმე:**

უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებები თავისი ფორმულებით განხილული იყო X კლასში. ახლა უკვე გავეცნოთ შედარებით რთული ტიპის განტოლებებს და მათ ამოხსნებს. მოსწავლეს უნდა შეეძლოს მიღებული ცოდნის გამოყენებით განტოლების უმარტივეს სახემდე ( $\sin x = a; \cos x = a; \operatorname{tg} x = a$ ) მიყვანა.

**ამოხსნები, მითითებები:**

5. ვ)  $\cos^2 x + (3 - \sqrt{3})\cos x - 3\sqrt{3} = 0$

$y^2 - (3 - \sqrt{3})y - 3\sqrt{3} = 0$

$y = \frac{(3 - \sqrt{3}) \pm \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3}}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -\sqrt{3} \end{cases}$

∅

6. ე)  $\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x = \frac{1}{4}$

$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x + \sin x = \frac{1}{4}$

$\sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$

საიდანაც  $\sin x = -\frac{1}{2}$

7. ვ)  $1 + \cos x + \cos 2x = 0$

$2\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x(2\cos x + 1)$

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

8. გ)  $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$

$2\sin x \cos x = (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2})$

$2\sin x \cos x - \cos x = 0$

$$\cos x = 0 \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

9. გ)  $8\sin^2 x - 3\cos^2 x = 4$

$$16\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 4 \quad : \cos^2 x$$

$$16\operatorname{tg} x - 3 = 4 + 4\operatorname{tg}^2 x$$

$$4\operatorname{tg}^2 x - 16\operatorname{tg} x + 7 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \quad \text{ან} \quad \operatorname{tg} x = \frac{7}{2}$$

10. ბ)  $3\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x + 3x\operatorname{tg}^2 x + 2 = 0$

$$3(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) + 4(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 2 = 0$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = y$$

$$3(y^2 - 2) + 4y + 2 = 0$$

$$4y^2 + 4y - 4 = 0$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{3}$$

გ)  $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 x - 0,5$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \sin 2x - 0,5$$

$$\sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

11. გ)  $11\operatorname{ctg} x - 5\operatorname{tg} x = \frac{16}{\sin x}$

$$11\cos^2 x - 5\sin^2 x = 16\cos x$$

$$\cos x = \frac{1}{4}$$

$$x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k$$

უმცირესი დადებითი —  $\pi - \arccos \frac{1}{4}$

უდიდესი უარყოფითი —  $\pi + \arccos \frac{1}{4}$

დ)  $2\sin^2 x + \cos^2 x + 2 + \cos 2x = 0 \quad : \cos^2 x$

$$4\sin x \cos x + \cos^2 x + 2 + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

მივიღებთ:  $(\operatorname{tg} x + 2)^2 = 0 \quad \operatorname{tg} x = -2$ .

$$x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k$$

უმცირესი დადებითი —  $\pi + \operatorname{arctg}(-2)$

უდიდესი უარყოფითი —  $\operatorname{arctg}(-2)$

12. ბ)  $4(1 + \cos x) = 9 + \sin^4 x - \cos^4 x \quad (-\pi; \pi)$

$$4 + 4\cos x = 9 + \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$\cos x = y$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$y = -3 \quad y = 1$$

$$\cos x = 1 \quad x = 2\pi n$$

პასუხი: 0.

გ)  $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin 2x - \cos^2 x = -2 \quad : \cos^2 x$

$$3\operatorname{tg}^2x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg}x + 1 = 0$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

(0;4) შუალედში მოხვდება  $\frac{\pi}{6}$ ;  $\frac{7\pi}{6}$ .

**13.** მოცემული განტოლება ტოლფასია სისტემის

ა)  $\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$ , რომელსაც ცხადია ამონახსნი არ აქვს.

ბ)  $x^2 - x + \frac{3}{2}$  გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა მეტია 1-ზე.

**14.** ა)  $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$  გავყოთ 2-ზე.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

დ)  $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$  ავიყვანოთ კვადრატში

$$a + \sin^2 x = \frac{25}{16}$$

$$\sin 2x = \frac{9}{16}$$

$$x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{9}{16} + \frac{\pi}{2} k \quad k \in \mathbb{Z}$$

**15.**  $AO = \frac{2}{3} AN = 10$ ;  $CO = \frac{2}{3} CM = 6$  ე.ი.  $\sqrt{136} = 2\sqrt{34}$

## I თავის დამატებითი სავარჯიშოები

**4.**  $y = \cos^2 \frac{x}{2} + \sqrt{-\sin^2 2x}$  გამოსახულებას აზრი რომ ჰქონდეს,  $-\sin^2 x \geq 0$  ე.ი.  $\sin 2x = 0$ ,  $2x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$x = \frac{\pi k}{2} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ვიპოვოთ  $y = \cos^2 \frac{x}{2}$ , როცა  $x = \frac{\pi k}{2}$  შესაძლებელია ორი შემთხვევა  $k=2n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  და  $k=2n+1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

1.  $y = \cos^2\left(\frac{2n}{4}\pi\right) = \cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)$  გამოსახულება ტოლია 0-ის ან 1-ის.

2.  $y = \cos^2\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right) = \cos^2\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$  ე.ი. გამოსახულების მნიშვნელობათა სიმრავლეა  $\left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$ .

**7.**  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = b$

ა)  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 + 2\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = b^2 + 2$ .

ბ)  $\operatorname{tg}^3 \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)((\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 + 3\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha) = b(b^2 + 3)$ .

**9.** ა)  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$  ავიღოთ  $(x_2 > x_1) \Rightarrow (\sin x_2 > \sin x_1) \Rightarrow \cos(\sin x_2) > \cos(\sin x_1)$  IV მეოთხედში  $\sin x$  და  $\cos x$  ფუნქციები ზრდადია, ე.ი.  $(x_2 > x_1) \Rightarrow \cos(\sin x_2) > \cos(\sin x_1)$ , ე.ი. ფუნქცია ზრდადია.

$$12. \text{ ս) } \sin \frac{2\pi}{13} + \sin^2 \frac{11\pi}{26} = \sin^2 \frac{2\pi}{13} + \cos^2 \frac{\pi}{13} = 1$$

$$\text{գ) } \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \cos 80^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 40^\circ \cos 20^\circ = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{4 \sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{4 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{1}{16}.$$

$$14. \text{ ծ) } \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad x = \frac{\pi}{2}k$$

$$17. \text{ ս) } \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}.$$

$$24. \beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$$

$$(1 + \operatorname{tg} \alpha) \left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = (1 + \operatorname{tg} \alpha) \left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}\right) = 2$$

$$25. 1 - \sin^2 x + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 = 0$$

$$\sin^2 x - \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ուտի սմոնսսնո:  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

## II ტაპი

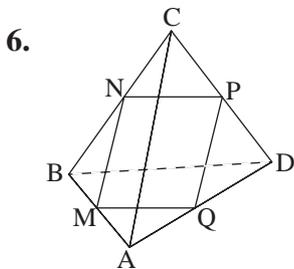
### 1. წრფეთა პარალელობის ნიშანი

#### რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს პარალელურ წრფეთა განმარტება, სივრცეში, მრავალწახნაგებზე იმის დადგენა, თუ რომელი ერფეებია პარალელური და ამ ფაქტის დასახელება.

#### ამოხსნები, მითითებები:

1. AD და DC წრფეები კვეთს  $\alpha$  სიბრტყეს ლემის თანახმად.
2. ტრაპეციის შუახაზი ფუძეების პარალელურია, ამიტომ თუ  $\alpha$  სიბრტყეს კვეთს ტრაპეციის ფუძეების შემცველი წრფეები, მაშინ შუახაზის შემცველი წრფეც უნდა კვეთდეს მას, მაგრამ ამოცანის პირობით შუახაზი მდებარეობს  $\alpha$  სიბრტყეში. ე.ი. მოცემული ტრაპეცია ან მდებარეობს  $\alpha$  სიბრტყეში, ან მისი ფუძეების შემცველი წრფეები  $\alpha$  სიბრტყეს არ კვეთს.
3. DC წრფის პარალელური წრფე სამკუთხედებს სიბრტყეებს კვეთს ლემის თანახმად.
4. a და b წრფეების პარალელური წრფე რომ არსებობდეს, მაშინ a და b წრფეები პარალელური იქნება და მათზე გაივლება სიბრტყე.
5. ორივე წრფე პარალელურია AC წრფის.



MN –  $\Delta ABC$ -ს შუახაზია,  
PQ –  $\Delta ACD$ -ს შუახაზი.

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AC \quad MN = \frac{AC}{2} \\ PQ \parallel AC \quad PQ = \frac{AC}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel PQ \text{ და } MN = PQ,$$

ე.ი. MNPQ – პარალელოგრამია.

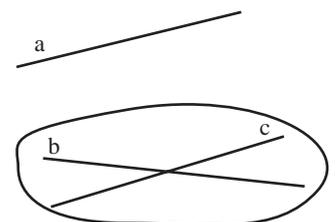
14. ფუძის დიაგონალი  $25x$ , ე.ი.  $25xh=50$ ,  $xh=2$ .  $S_{\text{წ.}} = 62xh=124$ .

### 2. წრფისა და სიბრტყის პარალელობა

#### ამოხსნები, მითითებები:

1. MN მონაკვეთი ABC სამკუთხედის შუახაზია. ე.ი.  $MN \parallel AB$  და ამიტომ  $MN \parallel \alpha$ ,  $MN = \frac{3}{2} \text{ სმ}$ .
2.  $CD \parallel AB$ , ე.ი.  $CD \parallel (ABM)$ .
4.  $NC = \frac{3}{5} BC = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12$ ;  $AM = \frac{3}{5} AB = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$ .  
 $MN = \frac{2}{5} AC = \frac{2}{5} \cdot 30 = 12$ .

5. ვთქვათ a და b აცდენილი წრფეებია. b წრფის ნებისმიერ წერტილზე გავატაროთ a წრფის პარალელური c წრფე (b:c) სიბრტყე პარალელურია a წრფის.



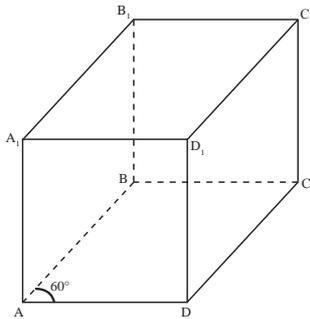
$$6. \left. \begin{array}{l} C_1D_1 \parallel AB; \quad C_1D_1 = AB \\ CD \parallel AB; \quad CD = AB \end{array} \right\} \Rightarrow C_1D_1 \parallel DC; \quad C_1D_1 = DC.$$

ე.ი.  $C_1CDD_1$  – პარალელოგრამია.  $P=2(7,2+5,8)=26$ .

9. ამოვხაზოთ ფუძე  $BK=4$ ,  $AD=2$ ,  $AB=5$ . მივიღეთ  $DK=1$ . ვიპოვოთ  $BD$  დიაგონალი  $BD=\sqrt{17}$ .

$$AC^2+17=2(25+4); \quad AC^2=41. \quad \text{დიაგონალი } \sqrt{17+8} = \sqrt{25} = 5.$$

11.

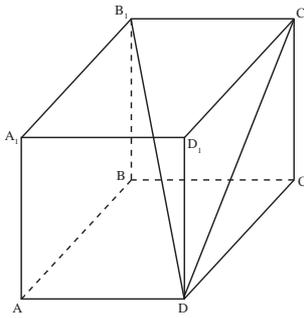


$$BD = \sqrt{1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{7}$$

$$B_1D = 2\sqrt{3}; \quad AC_1 = 4.$$

12.



საძიებელი მანძილი არის  $B_1C_1D$  მართკუთხა სამკუთხედის სიმაღლე და ტოლია  $\frac{5 \cdot 5\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

### 3. სიბრტყეთა პარალელურობა

რეზიუმე:

პარალელურ სიბრტყეთა განმარტების საფუძველზე მოსწავლეებს უნდა შეეძლოთ კონკრეტულ მაგალითებზე პარალელურ სიბრტყეთა წყვილების დასახელება და ა.შ. ფაქტის დასაბუთება.

ამოხსნები, მითითებები:

1.  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . ე.ი.  $A_1B_1 = AB = 10$ .

3.  $\triangle ACB \sim \triangle A_1C_1B_1$  მსგავსების კოეფიციენტით  $\frac{4}{9}$ .

5.  $MNP$  და  $ACD$  სამკუთხედები მსგავსია. მსგავსების კოეფიციენტი  $\frac{1}{2}$ -ია.

ე.ი.  $S_{MNP} = \frac{1}{4} S_{ACD} = \frac{1}{4} \cdot 92 = 23$ .

6. მითითება:  $\triangle A_1AB_1 \sim \triangle A_2AB_2$ .

12. ფუძის დიაგონალია  $205:5=41$ , ე.ი.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1681 & a = 40 \\ ab = 360 & b = 9 \end{cases}$$

13. გვერდითი წიბო — 5 სმ; ფუძის გვერდი —  $6\sqrt{2}$ .  $S_{სრ} = 2 \cdot 72 + 120\sqrt{2}$ .

## 4. ამოცანები კვეთების აგებაზე

**ამოხსნები, მითითებები:**

3. კვეთის სიბრტყე გადის PN წრფეზე, რომელიც ABD სიბრტყის პარალელურია. ე.ი. წრფე კვეთს სიბრტყის ABD სიბრტყესთან კვეთის წრფე PN წრფის, ამავე დროს DB წრფის პარალელურია.  $MK \parallel DB$ .

$$MK = PN = \frac{BD}{2} = 18; \quad MN = KP = \frac{AC}{2} = 15.$$

გავამახვილოთ ყურადღება იმაზე, რომ KMNპ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

4. O წერტილზე გავავლოთ  $MN \parallel BC$ .  $NK \parallel AC$ ;  $(MNK) \parallel (ABC)$ .  $\Delta OEN \sim \Delta BEC$ .

$$\frac{ON}{BC} = \frac{OE}{BE} = \frac{1}{3}; \quad ON = \frac{1}{3}BC; \quad MN = \frac{2}{3}BC.$$

$$\frac{S_{MNK}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

5.  $\Delta OEF \sim \Delta ALK$ .  $S_{OEF} = \frac{1}{4}S_{ALK} = 6 \text{ სმ}^2$ .

6. გ) გავავლოთ M წერტილზე  $BB_1$ -ის პარალელური EF მონაკვეთი. F წერტილზე  $FL \parallel BD$ . E წერტილზე  $EP \parallel B_1D_1$ . EPLF საძიებელი კვეთაა.

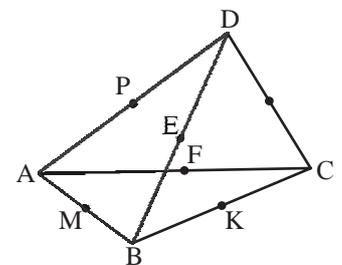
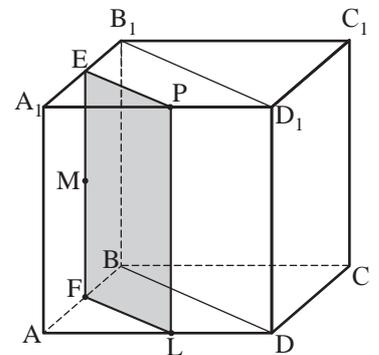
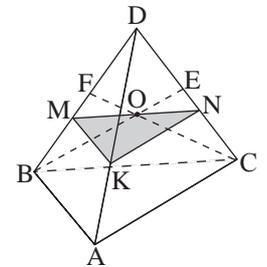
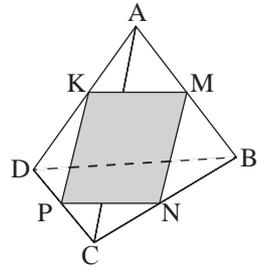
### II თავის დამატებითი სავარჯიშოები

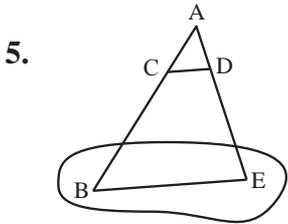
1. დავუშვათ საწინააღმდეგო: AC და BD წრფეები არ არიან აცდენილი, ე.ი. მათზე გაივლება სიბრტყე, რომელიც, ცხადია, მოხვდება AB და CD წრფეები, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

2. თუ არსებობს წრფე, რომელიც a და b წრფეების პარალელურია, მაშინ და წრფეებიც პარალელურია და მათზე გაივლება სიბრტყე.

3. MPNK პარალელოგრამია, ამიტომ MN და PK დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი მათი შუაწერტილია. ანალოგიურად, MENF ოთხკუთხედიც პარალელოგრამია, რომლის დიაგონალებია MN და EF-ია.

4.  $(AD \parallel BC) \Rightarrow AD \parallel (BMC)$ .

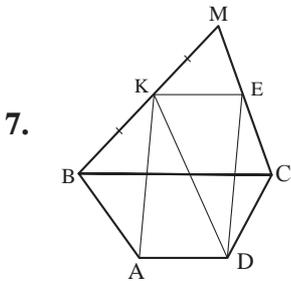




$$\triangle ACD \sim \triangle ABE.$$

$$\left(\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AB} \quad BE = 48 \text{ სმ.}$$



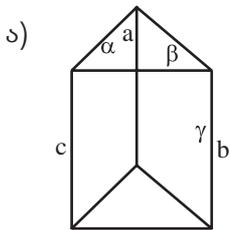
$$(BC \parallel AD) \Rightarrow BC \parallel (ADK), \text{ ე.ი. } (ADK) \cap (AMC) = KE$$

ამასთან,  $KE \parallel BC$ ;  $BK = KM$ , ამიტომ  $ME = EC$ ,

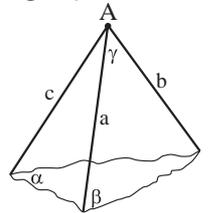
$$\text{ე.ი. } KE = \frac{BC}{2} = 9 \text{ სმ.}$$

8.  $(AB \parallel \alpha) \Rightarrow ABCD$  ტრაპეციის სიბრტყის და  $\alpha$  სიბრტყის თანაკვეთა იქნება წრფე, რომელიც  $AB$ -ს პარალელურია, ამავე დროს ის  $C$  წერტილზე გადის, ე.ი.  $(ABCD) \cap \alpha = (DC)$ .

9.  $\alpha \cap \beta \equiv a$ ;  $\alpha \cap \gamma \equiv c$ ;  $\beta \cap \gamma \equiv b$ . განვიხილოთ შემთხვევა, როცა: ა)  $a \parallel c$ ; ბ)  $a \cap c = \{A\}$ .



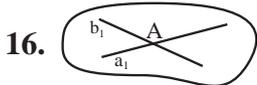
თუ დავუშვებთ, რომ  $a$  და  $b$  წრფეები იკვეთება რაიმე  $A$  წერტილში, მაშინ  $A \in \alpha$  და  $A \in \gamma$ , ე.ი.  $A$  წერტილი  $c$  წრფეზე მდებარეობს, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება.



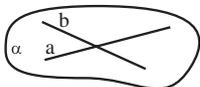
ბ) მსჯელობა ანალოგიურია.

10. ვთქვათ  $a$  წრფე კვეთს  $\alpha$  სიბრტყეს  $A$  წერტილში  $\beta \parallel \alpha$ . ავიღოთ  $\beta$  სიბრტყეზე ნებისმიერი  $B$  წერტილი და გავავლოთ სიბრტყე  $a$  წრფესა და  $B$  წერტილზე.

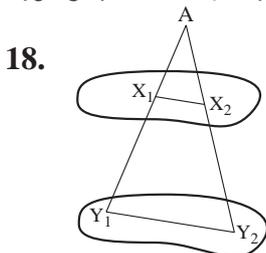
11. ამ ორი წრფიდან ერთი მაინც აცდენილია  $a$  წრფესთან. შეიძლება იყოს: ერთი პარალელური, ერთი აცდენილი, ან ორივე აცდენილი  $a$  წრფესთან.



$\alpha$  სიბრტყეში ავიღოთ  $a$  და  $b$  მკვეთი წრფეები.  $A$  წერტილზე  $a_1 \parallel a$ ;  $b_1 \parallel b$ .  $(a_1, b_1) \parallel \alpha$ ; ერთადერთობა საწინააღმდეგოს დაშვებით დავამტკიცოთ.



17. დავუშვათ საწინააღმდეგო:  $\alpha$  და  $\beta$  სიბრტყეებს აქვთ საერთო წერტილი, რომელზეც გავლებულია ორი ( $\alpha$  და  $\beta$ ) სიბრტყე, რომლებიც პარალელურია  $\gamma$  სიბრტყის, რაც შეუძლებელია.



$$\triangle AX_1X_2 \sim \triangle AY_1Y_2.$$

### III თავი

#### 1. ხარისხი ირაციონალური მაჩვენებლით

##### რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს ირაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხებზე მოქმედებების შესრულება; თვისებების გამოყენებით გამოსახულებების გამარტივება.

##### ამოხსნები, მითითებები:

3. დავალაგოთ ზრდის მიხედვით რიცხვები (ხარისხის მაჩვენებლები).

3;  $2\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{3}$ ; 2,5.

$$6. \text{ დ) } \left( \sqrt{\left(\sqrt{5} - \frac{5}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{5}\right)^3} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \sin 45^\circ = \left(\frac{5}{2} - \sqrt{5} - \frac{3}{2} - \sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

$$7. \text{ დ) } \frac{\sqrt[3]{a + \sqrt{1 - a^2}} \cdot \sqrt[6]{1 - 2a\sqrt{1 - a^2}}}{\sqrt[3]{1 - 2a^2}} = \frac{\sqrt[6]{(a^2 + 2a\sqrt{1 - a^2} + 1 - a^2)(1 - 2a\sqrt{1 - a^2})}}{\sqrt[3]{1 - 2a^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{1 - 4a^2(1 - a^2)}}{\sqrt[3]{1 - 2a^2}} = \frac{\sqrt[6]{1 - 4a^2 + 4a^4}}{\sqrt[3]{1 - 2a^2}} = 1.$$

$$8. x^{\frac{1}{3}} \equiv m \quad y^{\frac{1}{3}} \equiv n, \text{ მაშინ } a = \sqrt{m^6 + m^4 n^2} + \sqrt{n^6 + m^2 n^4}$$

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{m^6 + m^4 n^2 + n^6 + m^2 n^4 + 2\sqrt{2n^6 n^6 + m^8 n^4 + m^4 n^8}} = \sqrt[3]{m^6 + m^4 n^2 + n^6 + m^2 n^4 + 2(m^4 n^6 + n^2 m^4)} =$$

$$= \sqrt[3]{(m^2 + n^2)^3} = m^2 + n^2$$

$$12. (x+2)^2 + y^2 = 100 \quad \text{და } x=y \text{ ან } x=-y.$$

$$(-8; -8) \quad (6; 6)$$

$$(-8; 8) \quad (6; -6)$$

$$13. (x; 0) \quad (9; 12)$$

$$(x-9)^2 + 12^2 = x^2 \quad x=12,5.$$

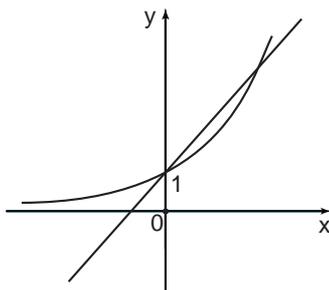
#### 2. მაჩვენებლიანი ფუნქცია

##### რეზიუმე:

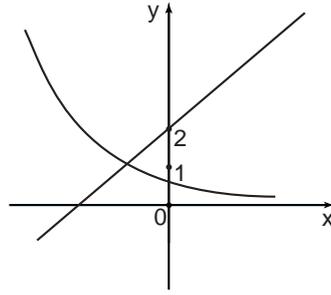
მოსწავლემ უნდა იცოდეს მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრა. უნდა იცოდეს მისი თვისებები და შეეძლოს გრაფიკის აგება. გრაფიკულად უნდა შეეძლოს იმის დადგენა, რამდენი ამონახსნი აქვს  $a^x = kx + b$  სახის განტოლებას პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

##### ამოხსნები, მითითებები:

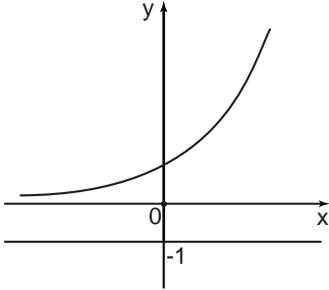
19. ა) 2 ამონახსნი



ბ) 1 ამონახსნი



გ)



არც ერთი ამონახსნი

20. გ)  $y = \frac{1}{2^{-x-2}} = 2^{x+2} = 8 \cdot 2^{x-1} = 2^{x+2} = 8 \cdot 2^{x-1}$ .

23.  $\begin{cases} 24 = b \cdot a^{-1} \\ 0,75 = b \cdot a^{1,5} \end{cases}$  გავეყოთ

$a^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{32} \quad a = \frac{1}{4} \quad b=6$

### 3. ლოგარითმი

რეზიუმე:

ბ

ამოხსნები, მითითებები:

11.  $2^{2+4+\dots+2k} = 2^{56}$ .

$\frac{2+2k}{2} \cdot k = 56$

$k^2+k-56=0 \quad k=7$

13. ა)  $D=a^2-100=0$

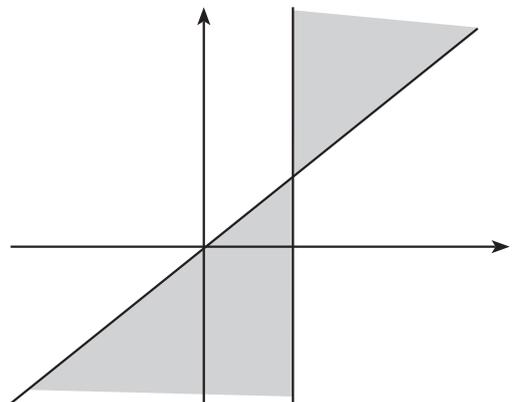
$a=\pm 10$ .

14. ა)  $x^2-x < y-xy$

$x(x-1)-y(x-1) < 0$

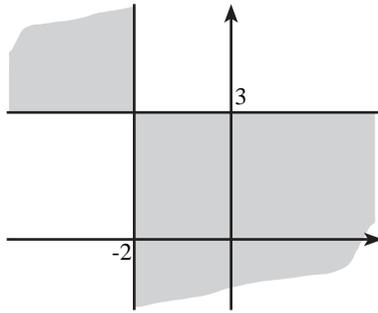
$(x-1)(x-y) < 0$

$$\begin{cases} x > 1 \\ y > x \\ x < 1 \\ y < x \end{cases}$$

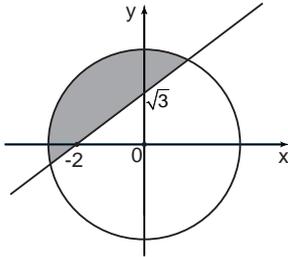


ბ)  $(x+2)(y-3) > 0$

$$\begin{cases} x > -2 \\ y > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2 \\ y < 3 \end{cases}$$



15. ბ)



#### 4. ლობარითმის თვისებები

**რეზიუმე:**

მოსწავლემ უნდა იცოდეს ლობარითმის თვისებები, მათი გამოყენება მაგალითების ამოხსნის დროს.

**ამოხსნები, მითითებები:**

6. ბ)  $\log_{\frac{1}{2}} \left( \log_3 (\cos 30^\circ) - \log_3 (\sin 30^\circ) \right) = \log_{\frac{1}{2}} \left( \log_3 \frac{\sqrt{3}}{2} - \log_3 \frac{1}{2} \right) = \log_{\frac{1}{2}} \log_2 \sqrt{3} = 1$

7. ა)  $\log_2 14 = b$        $\log_2 7 = b$

$$\log_{49} 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 49} = \frac{5}{2 \log_2 7} = \frac{5}{2(b-1)}$$

ბ)  $\log_7 9 = a$        $\log_7 5 = b$

$$\log_{15} 49 = \frac{\log_7 49}{\log_7 15} = \frac{2}{\log_7 3 + \log_7 5} = \frac{2}{\frac{a}{2} + b} = \frac{4}{a + 2b}$$

გ)  $\log_{12} 16 = a \Rightarrow \frac{4}{2 + \log_2 3} = a$ , საიდანაც  $\log_2 3 = \frac{4 - 2a}{a}$

დ)  $\log_3 25 = a$        $\log_3 10 = b$

$$\log_{50} 2x = \frac{\log_3 27}{\log_3 50} = \frac{3}{\log_3 5 + \log_3 10} = \frac{3}{\frac{a}{2} + b} = \frac{6}{a + 2b}$$

8.  $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \dots \log_{14} 15 \cdot \log_{15} 16 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 4} \dots \frac{\lg 15}{\lg 14} \cdot \frac{\lg 16}{\lg 15} = \frac{\lg 16}{\lg 2} = \lg_2 16 = 4.$

11.  $x_1; x_2; \dots; x_n; \dots$  გეომეტრიული პროგრესიაა. განვიხილოთ  $\lg x_1; \lg x_2; \dots; \lg x_n; \dots$  მიმდევრობა და  $\lg x_{n-1} + \lg x_{n+1} = \lg(x_{n-1} \cdot x_{n+1}) = \lg x_n^2 = 2 \lg x_n$ . რ.დ.გ.

12. ა)  $\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16$  ე.ი. მთელი ნაწილი 3.

14. ვთქვათ რაციონალურია, ე.ი.  $\log_2 3 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 3 = 2^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow 3^n = 2^m$ , რაც შეუძლებელია.

15.  $y=2ax+1 \quad y=(a-6)x^2-2$

$$2ax+1=(a-6)x^2-2$$

$$(a-6)x^2-2ax-3=0$$

$$\frac{D}{4}a^2+3a-18<0$$

$$a \in (-6;3)$$

16.  $x^2 - \frac{15}{4}x + a^2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \\ x_1 x_2 = a^2 \\ x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

$$x_2^2 + x_2 - \frac{15}{4} = 0$$

საიდანაც  $x_2 = -\frac{5}{2} \quad x_2 = \frac{3}{2}$

$$x_1 = \frac{25}{4} \quad x_1 = \frac{9}{4}$$

მაგრამ  $a^2 \neq -\frac{5}{2} \cdot \frac{25}{4}$  ე.ი.  $a^2 = \frac{27}{8} \quad a = \pm \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$

17. ჩავთვალოთ, რომ განტოლებას ამონახსნები გააჩნია, მაშინ  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ;  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

პითაგორას თეორემით  $4R^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 8c}{4a^2}$

$$S = \pi R^2 = \frac{b^2 - 8c}{16a^2} \pi.$$

19.  $(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+\dots+(x^2+20x+99)=400$

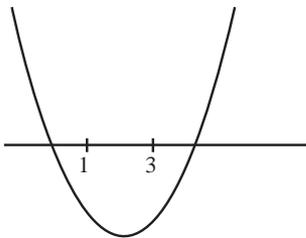
$$20x^2+(x+2x+3x+\dots+20x)+(1+3+\dots+39)=400$$

$$20x^2 + \frac{x+20x}{2} \cdot 20 + \frac{1+39}{2} \cdot 20 = 400$$

$$20x^2+210x=0$$

$$x=0 \text{ ან } x=-10,5$$

20.



ე.ი.  $f(x)=(x-3a)(x-a-3)$

$$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(3) < 0 \end{cases} \text{ მივიღებთ } a \in (0;3).$$

## 5. შექცეული ფუნქცია

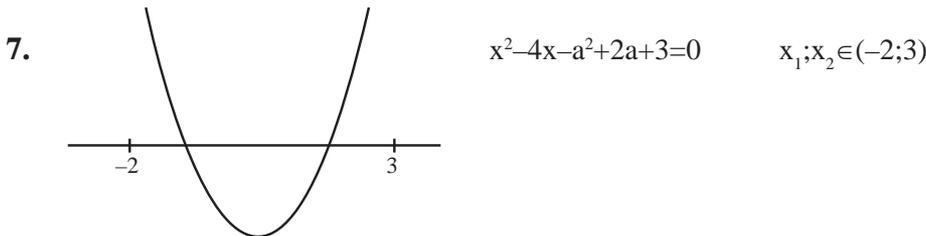
### რეზიუმე:

გავახსენოთ მოსწავლეებს შექცეული ფუნქციის ცნება, დავანერინოთ რამოდენიმე ფუნქცია და მისი შექცეული ფუნქცია; გაიხსენონ ფაქტიმ რომელ ფუნქციებს აქვთ შექცეული ფუნქციები და რომელს არა.

### ამოხსნები, მითითებები:

6.  $x^2 - xy - 6y^2 = 11$   
 $(x - 3y)(x + 2y) = 11$

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + 2y = 11 \\ x - 2y = 11 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad (7; 2)$$



ამოცანის პირობის შესასრულებლად შევადგინოთ სისტემა:

$$\begin{cases} f(x_0) < 0 \\ f(-2) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 - 8 - a^2 + 2a + 3 < 0 \\ 4 + 8 - a^2 + 2a + 3 > 0 \\ 9 - 12 - a^2 + 2a + 3 > 0 \end{cases} \quad a \in (0; 2)$$

### 9. ა) ამოვხსნათ განტოლება:

$$\sqrt{x + 2} = 2x - 11$$

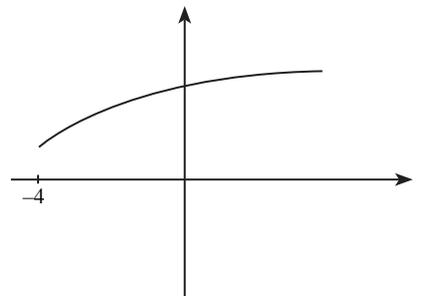
$$x + 2 = 4x^2 - 44x + 121$$

$$x = \frac{17}{4} \text{ (არ აკმაყოფილებს } x=7; y=3 \text{.)}$$

12.  $\sqrt{ax + 8} + b$  უმცირეს მნიშვნელობას იღებს, როცა

$\sqrt{ax + 8} = 0$ , ე.ი.  $b=1$  ზრდადობის შუალედია  $[-4; \infty)$ , ე.ი.

$\sqrt{-4a + 8} + 1 = 1$ , საიდანაც  $a=2$ .



## 6. ლოგარითმული ფუნქცია

ამოხსნები, მითითებები:

$$1. \left(1 + \frac{5,5}{100}\right)^n = \frac{19}{7} \quad n = \log_{\frac{211}{200}} \frac{19}{7} = \frac{\lg 19 - \lg 7}{\lg 211 - \lg 200} \approx 18$$

$$2. 1 < \lg 11 < 2 \quad \text{ე.ი. } [\lg 11] = 1$$

12. რადგან  $f(x)$  კენტია და როცა  $x > 0$  განსაზღვრულია, ე.ი. ის განსაზღვრულია მაშინაც, როცა  $x < 0$  და ნებისმიერი  $x \in D(f)$  სრულდება ტოლობა  $f(-x) = -f(x)$ . თუ  $x < 0$ , მაშინ  $x = -|x|$ . მაშინ  $f(-|x|) = -f(|x|)$ , ე.ი. როცა  $x < 0$   $f(x) = \log_3\left(-\frac{x}{3}\right)$ .

როცა  $x > 0$   $\log_3 \frac{x}{3} = 4$ , საიდანაც  $x = 243$ .

თუ  $x < 0$   $-\log_3\left(-\frac{x}{3}\right) = 4$ , საიდანაც  $x = -\frac{1}{27}$ .

$$13. m = -\log_3 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = -\log_3 6 \cdot \log_6 8 = -\log_3 8 > -2.$$

14. ვიპოვოთ ერთ-ერთი მედიანა, მაგალითად, CK.

$$k\left(\frac{3+5}{2}; \frac{-2+2}{2}\right) \quad \text{ე.ი. } k=(4;0).$$

$$CK = \sqrt{(-1-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{41}$$

$$15. \text{გ) } g(g(x)) = (x^2+1)^2+1 = x^4+2x^2+2.$$

$$19. n^2+39=(n+1)^2 \quad n=19.$$

## 7. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა იცოდეს ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ელემენტარული განტოლებების ამოხსნა. მაჩვენებლიანი განტოლების ფესვების დაწერა ლოგარითმით და ამ ლოგარითმის მნიშვნელობის პოვნა.

1. მაჩვენებლიანი განტოლებები

ამოხსნები, მითითებები:

$$8. \text{ე) } 2^{2x+5} - 3 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$$

$$2 \cdot 2^{2(x+2)} - 3 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0 \quad 2^{x+2} \equiv y$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ ან } t = 1$$

$$x = -3 \quad x = -2.$$

9. ა)  $3^{x+5} - 20 \cdot 3^{x+2} = 63$

$3^{x+2}(27-20) = 63$

$3^{x+2} = 9 \quad x = 0$

ბ)  $7^{3-x} - 7^{2-x} = 2^{5-x} - 2^{3-x}$

$7^{2-x}(7-1) = 2^{2-x}(8-2)$

$\left(\frac{7}{2}\right)^{2-x} = 1 \quad x = 2.$

11. განტოლებას ექნება 1 ამონახსნი  $x$ -ის მიმართ, თუ  $pt^2 - 5t + 1 = 0$  განტოლებას აქვს ერთი დადებითი ამონახსნი ( $D=0$ ) ან ორი სხვადასხვანი მნიშვნელოვანი ამონახსნი, ან როცა  $p=0$ ,  $p = \frac{25}{4}$  ან  $p \leq 0$ .

12.  $x(x+1) + (x+1)(x+2) + \dots + (x+9)(x+10) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 9 \cdot 10$

$x^2 + x + x^2 + 3x + 1 \cdot 2 + x^2 + 5x + 2 \cdot 3 + \dots + x^2 + 19x + 9 \cdot 10 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 9 \cdot 10$

$10x^2 + x + 3x + \dots + 19x = 0$

$10x^2 + \frac{x + 19x}{2} \cdot 10 = 0$

$10x^2 + 100x = 0$

$x = 0 \quad x = -10.$

13.  $(k-1)x^2 + (k+4)x + (k+7) = 0$

$0 = 0 \quad k = -\frac{22}{3}; 2$

14.

$k$	$k^3$	$5k$	$k^3 + 5k$
0	0	0	0
1	1	2	0
2	2	1	0

15. ბოლო ციფრი შეიძლება იყოს მხოლოდ 5, ე.ი. 0; 3; 4; 6; 9 ციფრები უნდა განთავსდეს პირველ ორ ციფრად ისე, რომ მათი ჯამი 9-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლეოდეს 4-ს 405; 495; 945.

16.  $x^2 + (k-10)x + 9 = 0$

ორი განსხვავებული დადებითი ამონახსნი, ე.ი.

$\begin{cases} D > 0 \\ k - 10 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-10)^2 - 36 > 0 \\ k < 10 \end{cases} \Rightarrow k < 4$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (k-10)^2 - 18 = k^2 - 20k + 82$

$y = k^2 - 20k + 82$

$k_0 = 10$ , ე.ი.  $k < 4$ -სთვის გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა იქნება  $k = 3$ -სთვის  $9 - 60 + 82 = 31$ .

## 2. ლოგარითმული განტოლება

### რეზიუმე:

ხაზი გავუსვავთ იმ ფაქტს, რომ ლოგარითმულ განტოლებას, ისევე, როგორც ირაციონალურს, აუცილებლად სჭირდება შემოწმება.

### ამოხსნები, მითითებები:

3. ბ)  $\lg x = 2\lg x + \lg(x+1)$

$$\lg x + \lg(x+1) = 0$$

$$x(x+1) = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad x > 0$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

ე)  $\lg \lg x = \lg \lg 64 - \lg \lg 2$

$$\lg \lg x = \lg \frac{\lg 64}{\lg 2}$$

$$\lg x = \log_2 64$$

$$\lg x = 6 \quad x = 10^6.$$

ვ)  $\log_4(17-2^x) = \frac{1}{2}(4-x)$

$$17-2^x = 4^{2-\frac{x}{2}}$$

$$17-2^x = \frac{1}{2^x}$$

$$2^x = 1 \quad 2^x = 16$$

$$x = 0 \quad x = 4$$

თ)  $\lg(81 \sqrt[3]{3^{x^2-8x}}) = 0$

$$\sqrt[3]{3^{x^2-8x}} = 3^{-4}$$

$$\frac{x^2-8x}{3} = -4 \quad x=2; 6.$$

5. ა)  $\lg(x^3+8) - 0,5\lg(x+2)^2 = \lg 7$

$$x^2 - 2x + 4 = 7 \quad x > -2$$

$$x=3; x=-1.$$

ე)  $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 - \lg \frac{1}{x}$

$$(2 + \lg x)^2 + (1 + \lg x)^2 = 14 - \lg x$$

$$\begin{cases} \lg x = 1 \\ \lg x = -\frac{9}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10 \\ x = \sqrt{10^{-9}} \end{cases}$$

6.  $y = 2^{x^2} \quad (1) \quad z = 2^{y^2} \quad (2)$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow y^2 \geq 1 \Rightarrow 2^{y^2} \geq 2$$

$$(1)\text{-დან } x^2 = \log_2 y$$

$$(2)\text{-დან } y^2 = \log_2 z$$

$$x = \pm \sqrt{\log_2 y} \quad \text{რადგან } \log_2 z \geq 2, \text{ ე.ი. } y = \sqrt{\log_2 z}$$

$$\text{მივიღეთ } x = \pm \sqrt{\log_2 y} = \pm \sqrt{0,5 \log_2 \log_2 z}$$

$$8. \text{ ბ) } \begin{cases} 2 \log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y \log_2 x - 2 \log_2 x = 3^{y+1} \end{cases}$$

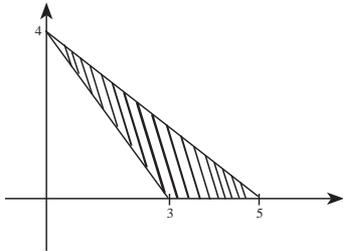
$$\begin{cases} \log_2 x = a & 3^y = b \\ \begin{cases} 2a - b = 15 \\ 3ab - 2a = 3b \end{cases} & \text{საიდანაჯ} \end{cases} \quad \begin{cases} a = p \\ b = 3 \\ a = \frac{5}{2} \\ b = -10 \end{cases} \quad (2^9; 1)$$

$$10. \text{ ა) } y = \log_2(2^x + 3) \quad \text{და} \quad y = x + 2$$

$$\log_2(2^x + 3) = x + 2$$

$$2^x + 3 = 2^{x+2} \quad x = 0$$

11.



$$\text{ა) } y = \log_2(x^2 - 8x + 16)$$

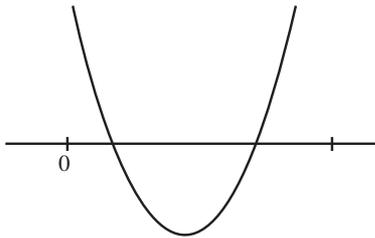
$$O_y: \quad x=0 \quad \log_2 16 = 4 \quad (0; 4)$$

$$O_x: \quad y=0 \quad \log_2(x^2 - 8x + 16) = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 1 \quad (3; 0); (5; 0)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4.$$

12.



$$(p-3)x^2 - 2px + 5p = 0$$

$$x^2 - \frac{2p}{p-3}x + \frac{5p}{p-3} = 0$$

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ f(0) > 0 \\ x_0 > 0 \end{cases} \quad \left(3; \frac{15}{4}\right)$$

## 8. მარჯვენაბლიანი და ლოგარითმული უტოლობები

**რეზიუმე:**

მოსწავლემ უნდა შეძლოს მარჯვენაბლიანი ან ლოგარითმული გამოსახულებებისთვის შესაბამისი აღნიშვნის შემოღება; მოცემული უტოლობის ამოხსნა და ფუძის გათვალისწინებით სწორი პასუხის დანერგა.

**ამოხსნები, მითითებები:**

**I მარჯვენაბლიანი უტოლობა**

$$5. \text{ ბ) } 4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0 \quad \text{გავეყოთ } 5^{2x} > 0$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^x < -1 & \emptyset \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x > 2 & x < \log_{\frac{2}{5}} 2 \end{cases}$$

$$6. a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$$

$$8 \cdot 4^x + 2a \cdot 2^x - a^2 < 0$$

ცხადია  $D > 0$  და თუ  $a \neq 0$  სამწევრის ფესვები სხვადასხვანაირია, რაც იმას ნიშნავს, რომ უტოლობას ამონახსნი ექნება.

$$7. \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} - (5a - 6)x + 4a^2 \leq 1$$

$$x^2 - (5a - 6)x + 4a^2 \geq 0$$

$$(5a - 6)^2 - 16a^2 \leq 0$$

$$a \in \left[\frac{2}{3}; 6\right].$$

## II ლოგარითმული უტოლობა

$$2. z) \log_5(x^2 + x - 1) > 1$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 > 0 \\ x^2 + x - 1 > 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 6 > 0$$

$$x < -3 \text{ ან } x > 2$$

$$\text{თ) } \lg(x^2 - 6x + 18) < 1$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 18 > 0 \\ x^2 - 6x + 18 < 10 \end{cases} \quad (2; 4)$$

$$\text{ლ) } \log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2 - 4x + 3) \leq 0$$

$$\begin{cases} \log_{\frac{9}{16}}(x^2 - 4x + 3) > 0 \\ \log_{\frac{9}{16}}(x^2 - 4x + 3) \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 1 \\ x^2 - 4x + 3 \geq \frac{9}{16} \end{cases} \quad \left(2 - \sqrt{2}; \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{13}{4}; 2 + \sqrt{2}\right)$$

$$3. \text{ ე) } \log_{0.7} 3 \cdot \lg(2x - 1) > 0 \quad \log_{0.7} 3 < 0$$

$$\lg(2x - 1) < 0 \quad x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\text{ზ) } (x + 5)\lg(x^2 + 1) > 0 \quad \lg(x^2 + 1) > 0$$

$$\text{ე.ი. } x + 5 > 0 \quad x > -5.$$

5.  $\log_a(x^2-x-2) > \log_a(-x^2+2x+3)$

მივიღეთ  $\log_a \frac{13}{16} > \log_a \frac{3}{16}$ , ე.ი.  $a > 1$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > -x^2 + 2x + 3 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad x \in \left(\frac{5}{3}; 3\right)$$

6. ბ)  $\log_a(x^2+2x+2) < 0$

თუ  $a > 1$   $x^2+2x+2 < 1$   $x \in \emptyset$ .

ე.ი.  $0 < a < 1$ .

7. ა)  $\log_a(x^2+2) > 1$

თუ  $0 < a < 1$   $x^2+2 < a$   $x \in \emptyset$

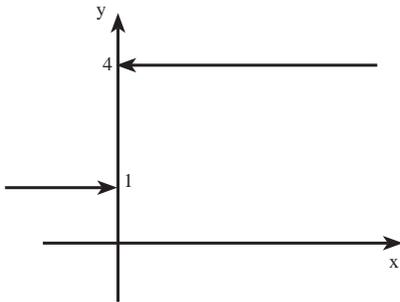
თუ  $a > 1$   $x^2+2 > a$   
 $x^2 > a-2$

უტოლობა რომ შესრულდეს  $x \in \mathbb{R}$ -სთვის  $a-2 < 0$ ;  $a < 2$  ე.ი.  $a \in (1; 2)$ .

### 9. ნახევრადლოგარითმული გადა

ამოხსნები, მითითებები:

6. გ)  $y = 2^{\frac{|x|+x}{x}} = \begin{cases} 4, & \text{თუ } x > 0 \\ 1, & \text{თუ } x < 0 \end{cases}$



9.  $\begin{cases} 10a + b = a^2 + b^2 + 12 \\ 10a + b = 2ab + 16 \end{cases} \quad (a-b)^2 = 4 \quad \begin{cases} a - b = 2 \\ a - b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 + b \\ b = 4 \\ a = b - 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 64 \\ \emptyset \end{matrix}$

12. წრფეა. ა)  $x = \lg x$  მივიღეთ  $y = x$  წრფის განტოლება.

$x = \lg x$	$10 = \lg 10$	$100 = \lg 100$
$y = x$	1	1

ბ)

$x=\lg x$	$y=2x+0,5$
1	$y=2\lg 1+0,5=0,5$
2	$y=2\lg 2+0,5$
3	$y=2\lg 3+0,5$
-	-
-	-
-	-
10	$y=2\cdot 1+0,5=2,5$

### ტესტი

1. ა; 2. ბ; 3. გ; 4. დ; 5. გ; 6. გ; 7. გ; 8. ე; 9. ბ; 10. ბ.

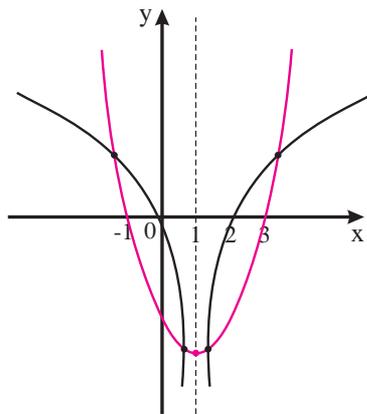
### III თავის დამატებითი სავარჯიშოები

11.  $x^2-2x-\log_2|1-x|=3$

$\log_2|1-x|=x^2-2x-3$

ავაგოთ  $y=\log_2|1-x|$  და  $y=x^2-2x-3$

ოთხი კვეთის წერტილი



12.  $y=(3,6^{1+\log_{3,6}(10+x)})^{\log_6(5-1)}$

$O_y \quad x=0 \quad y=2,5.$

14. ე)  $3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x = 2^{x+3} - 2 \cdot 3^{x-2}$

$3^{x-2}(18+2) = 2^{x-2}(32-12)$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2} = 1 \quad x=2$

თ)  $9^{x-1} + 3^x = 2 \cdot 3^{1,5-x}$  გავეყოთ  $3^x \neq 0$

$\frac{1}{9} \cdot 3^x + 1 = 2 \cdot 3^{0,5-x} \quad 3^{0,5-x} = y$

$y^2 - 18y + 9 = 0$

$y=3 \quad x=2$

15. ბ)  $\lg \sqrt{1-x} + 3 \lg \sqrt{1+x} = \lg \sqrt{1-x^2} + 2$

$\lg \frac{1}{\sqrt{1+x}} + 3 \lg \sqrt{1+x} = 2$

$$2 \lg \sqrt{1+x} = 2, \quad \sqrt{1+x} = 10$$

არ აკმაყოფილებს, ე.ი.  $x \in \emptyset$ .

**16. ა)**  $10x^{\lg x} + 10x^{-\lg x} = 101$

$$10x^{\lg x} + \frac{10}{x^{\lg x}} = 101 \quad x^{\lg x} = y$$

$$10y^2 - 101y + 10 = 0$$

$$y_1 = 10 \quad y_2 = \frac{1}{10}$$

1)  $x^{\lg x} = 10$  ავიღოთ ორივე მხარეს  $\lg$

$$\lg x^{\lg x} = 1;$$

$$\lg^2 x = 1$$

$$\lg x = \pm 1$$

$$x = \frac{1}{10}; 10$$

2)  $x^{\lg x} = \frac{1}{10}$

$$\lg^2 x = -1 \quad \emptyset$$

ბ)  $3 \cdot x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64 \quad a^{\log_c b} + b^{\log_c a}$

4.  $2^{\log_5 x} = 64$

$$\log_5 x = 4 \quad x = 5^4.$$

**26. ბ)**  $\begin{cases} x^2 - 2x - 2 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \quad x \in [-1; 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}; 3]$

**27.**  $8^{x+\frac{1}{3}} - 9 \cdot 4^x + 4 \cdot 2^x \geq 0$  შევკვეცოთ  $2^x$ -ზე.

$$2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} 2^x < \frac{1}{2} \\ 2^x > 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \end{cases}$$

# IV ტაპი

## 1. ფიგურათა პარალელური დაგეგმილება

ამოხსნები, მითითებები:

1. ერთი — თუ სამივე წერტილი მდებარეობს ისეთ წრფეზე, რომელიც დასაგეგმილებელი  $I$  წრფის პარალელურია, ორი — თუ წერტილი მდებარეობს  $I$  წრფის პარალელურ წრფეზე, სამი — თუ არც ერთი წერტილი ამ წერტილებისა არ მდებარეობს  $I$  წრფის პარალელურ წრფეზე.

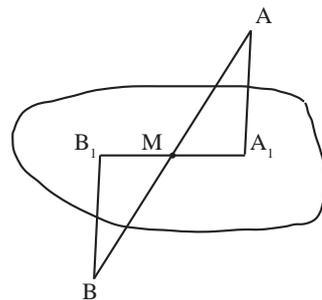
2. ა) სიბრტყე, წრფე; ბ) ნახევარსიბრტყე, წრფე; გ) კუთხე, სხივი.

3. პარალელურია.

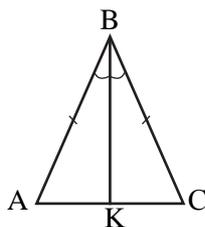
4.  $MB \equiv x$ ;  $AA_1 \parallel B_1B \Rightarrow \triangle AA_1M \sim \triangle BB_1M \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_1M}{B_1M} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{AM+MB}{MB} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow \frac{m}{MB} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow MB = \frac{mb}{a+b};$$

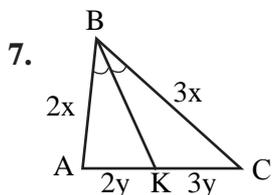
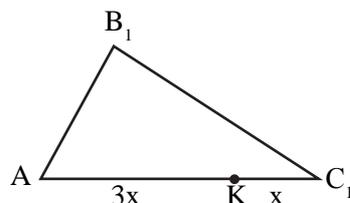
$$AM = \frac{am}{a+b}.$$



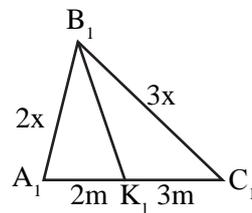
6. ა) ამოხსნა: ცხადია,  $AK=KC$ ,  
ე.ი. გამოსახულებაში  $A_1K_1=K_1C_1$ .



ბ) ეს მართობი  $AC$  გვერდს ყოფს შეფარდებით 3:1. აგება: გამოსახულებაზე. ვიღებთ ისეთ  $K$  წერტილს, რომ  $A_1K_1:K_1C_1=3:1$ .



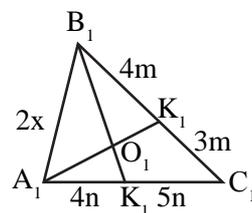
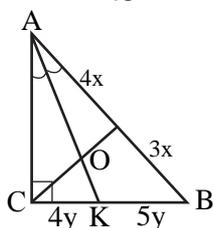
7. აგება:  $ABC$  სამკუთხედის გამოსახულებაზე  $A_1C_1$  გვერდზე ვაგებთ ისეთ წერტილს, რომ  $A_1K_1:K_1C_1=2:3$ .



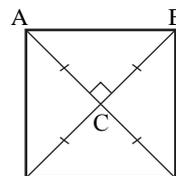
8. რადგან ჩახაზული წრენირის ცენტრიც ბისექტრისების კვეთის წერტილია, ამიტომ ბისექტრისის თვისების თანახმად,

$$AK:KB=4:3 \text{ და } CP:PB=4:5.$$

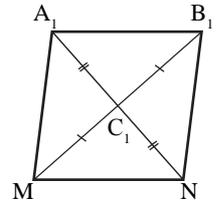
აგება: ვაგებთ  $K_1$  და  $P_1$  წერტილებს ისე, რომ  $A_1K_1:K_1P_1=4:3$  და  $C_1P_1:P_1B_1=4:5$ .  $A_1P_1$  და  $C_1K_1$  წრფეების კვეთის წერტილი იქნება  $O$  წერტილის სახე ( $O_1$  წერტილი).



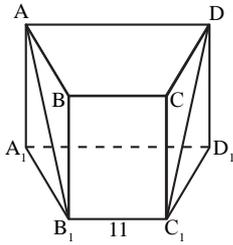
9. ა) გამოსახულებას შევავსებთ პარალელოგრამამდე (კათეტების გამოსახულების პარალელური წრფეებით).



აგება: გამოსახულებაში  $B_1C_1$  სხივზე გადავდებთ  $C_1M=C_1B_1$ , ხოლო  $A_1C_1$  სხივზე კი  $C_1N=A_1C_1$  მონაკვეთებს.  $A_1B_1NM$  იქნება კვადრატის გამოსახულება.



10.

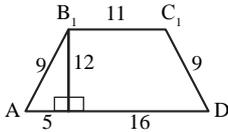
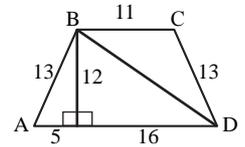


ამოვხაზოთ ფუძე.

$$AK = \frac{21 - 11}{2} = 5 \Rightarrow KD = 16.$$

$$\triangle BKD \Rightarrow BD = 20.$$

$$S_{\text{პ}} = 180 \Rightarrow DD_1 \cdot BD = 180 \Rightarrow 20 \cdot DD_1 = 180 \Rightarrow DD_1 = 9.$$



ამოვხაზოთ  $A, B_1, C_1, D$  ტრაპეცია.  $B_1P = 2\sqrt{13}$ .  $S_{AB_1C_1D} = \frac{27}{2} \cdot 2\sqrt{13} = 27\sqrt{13}$

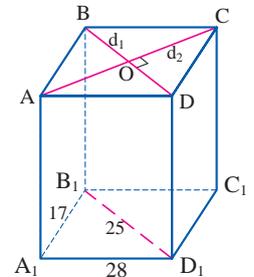
პასუხი:  $27\sqrt{13}$ .

11.

ამოხსნა:  $ABCD$  პარალელოგრამია, ე.ი.  $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow d = 39$ .

ვიპოვოთ ფუძის ფართობი  $S = 2\sqrt{35} \cdot 10 \cdot 7 \cdot 18 = 420$ .

$$\frac{64H}{420} = \frac{16}{15}, \quad H = 7. \quad S_1 = d_1 H = 39 \cdot 7 = 273 \text{ სმ}^2. \quad S_2 = d_2 H = 25 \cdot 7 = 175 \text{ სმ}^2.$$



12.  $SO$  იყოს პირამიდის სიმაღლე.  $SC$  კი პირამიდის გვერდითი წიბოა. ამოვხაზოთ  $SOC$  სამკუთხედი.

ა) სამკუთხა პირამიდისთვის  $OC$  არის  $\frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .  $SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$ .

ბ) ოთხკუთხა პირამიდისთვის  $OC$  არის დიაგონალის ნახევარი, ე.ი.  $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;  $S_o = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

$$SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$$

გ) ექვსკუთხა პირამიდისთვის  $OC$  არის ფუძის გვერდის ტოლი  $OC = a$ , ე.ი.  $SO = \sqrt{b^2 - a^2}$ .

13. იხილეთ ამოცანა 12-ის ნახაზი.  $SO = 7$ .  $OC = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ .  $SC = \sqrt{7^2 + \frac{81}{2}} = \sqrt{89,5}$ .

## 2. კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა მართობულობა

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა)  $(OA; CD) = 50^\circ$ ; ბ)  $(OA; CD) = 20^\circ$ ; გ)  $(OA; CD) = 90^\circ$ .

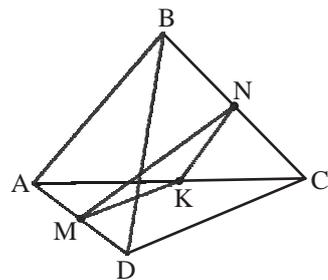
3. ა) თუ დავუშვებთ, რომ  $a \parallel AC$ , და გავითვალისწინებთ, რომ პირობის თანახმად  $a \parallel BD$ , მივიღებთ, რომ  $AC \parallel BD$ , რაც შეუძლებელია. კუთხე  $a$  წრფესა და  $AC$  წრფეს შორის ტოლია კუთხის  $BD$  და  $AC$  წრფეებს შორის. ე.ი.  $90^\circ$ -ის.

ბ)  $a$  და  $AD$  წრფეების აცდენილობა ა) შემთხვევის ანალოგიურია, კუთხე  $a$  და  $AD$  წრფეებს შორის ტოლია  $AD$  და  $BD$ -ს შორის კუთხის, ე.ი.  $\frac{\angle ABC}{2} = 57^\circ 30'$ .

4.  $BN = NC$ ;  $AM = MD$ .

$N$  წერტილზე  $ABC$  სიბრტყეში გავატაროთ  $NK \parallel AB$ .  $\angle MNK$  ტოლია  $MN$  და  $AB$  წრფეებს შორის

კუთხისა. რადგან  $BN=NC$  და  $NK\parallel AB$ . ე.ი.  $AK=KC$  და  $NK$   $ABC$  სამკუთხედის შუახაზია. გავავლოთ  $ADC$  სიბრტყეში  $M$  წერტილზე  $DC$ -ს პარალელური წრფე. რადგან  $AM=MD$ , ეს წრფე  $AC$ -ს შუახაზ-ტილზე, ე.ი.  $K$  წერტილზე გაივლის.  $MK$   $ADC$  სამკუთხედის შუახაზია.  $MK = \frac{DC}{2}$ ;  $KN = \frac{AB}{2}$ , მაგრამ  $AB=DC$  ე.ი.  $MKN$  სამკუთხედი ტოლფერდაა და  $\angle MNK = \angle NKM$ , რ.დ.გ.



5. ა) მოცემულობის თანახმად  $ABCD$  მართკუთხედიანია, ე.ი.  $DC \perp BC$ , ამავე დროს  $BC \parallel B_1C_1$ , ე.ი.  $DC \perp B_1C_1$ . ანალოგიურად,  $AB \perp A_1D_1$ .

6. ტოლი ნიბოებია  $AS=SC$  და  $SB=SD$ .  $ABCD$  პარალელელოგრამიდან  $\Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 2(7^2 + 3^2) \Rightarrow BD^2 + 36 = 2(49 + 9) \Rightarrow BD^2 = 80$ .

$$\Delta SOC \Rightarrow SC^2 = SO^2 + OC^2 \Rightarrow SC^2 = 16 + 9 \Rightarrow SC = 5.$$

$$\Delta SOD \Rightarrow SD^2 = 16 + (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow 16 + 20 \Rightarrow SD = 6.$$

$SO$  — პირამიდის სიმაღლეა,  $SK$  — აპოთემა. მაშინ

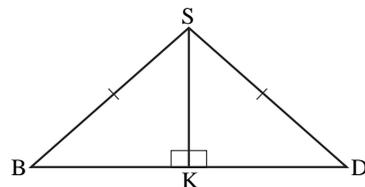
ა) სამკუთხა პირამიდისთვის  $OK = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SK = \sqrt{h^2 - \frac{a^2}{6}}$ ;

ბ) ოთხკუთხა პირამიდისთვის  $OK = \frac{1}{2}a \Rightarrow SK = \sqrt{h^2 - \frac{a^2}{4}}$ ;

გ) ექვსკუთხა პირამიდისთვის  $OK$  არის  $a$  გვერდის მქონე ექვსკუთხედში ჩახაზული წრენიის რადიუსი, ე.ი.  $OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $SK = \sqrt{h^2 - \frac{3a^2}{4}}$ .

8. ამოვხაზოთ დიაგონალური კვეთა.  $BD$  ფუძის დიაგონალი, ე.ი.  $BD = 14\sqrt{2}$ .  $BS=SD=10$ .  $SK = \sqrt{100 - 98} = \sqrt{2}$ .

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 14\sqrt{2} = 14.$$



9.  $S_{\text{ჰ3}} : Q = 1:4 \Rightarrow S_{\text{ჰ3}} = \frac{Q}{4}$ .

### 3. წრფისა და სიბრტყის მართობულობა

ამოხსნები, მითითებები:

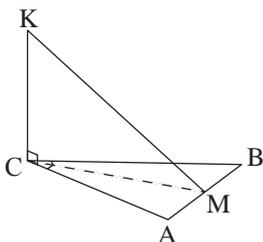
2. ა)  $OB \perp AD$  მონაკვეთის შუამართობია;

ბ)  $\Delta AOB = \Delta AOC$  ( $AO$  საერთოა;  $OB=OC$ ;  $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$ ).

3. ცხადია,  $\Delta AOK = \Delta BOK = \Delta COK = \Delta DOK$ , ე.ი.  $KA = KB = KC = KD = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2}$ .

4.  $(AC = 6; BC = 8) \Rightarrow AB = 10$ .  $AM=MB$ . ე.ი.  $CM = \frac{AB}{2} = 5$ .

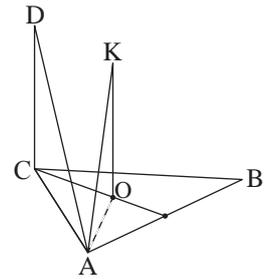
$\Delta CKM$ -ში  $\angle C$  მართია  $CK=12$   $CM=5$  პითაგორის თეორემით  $KM=13$ .



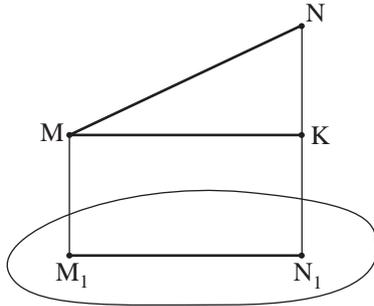
5. ABC სამკუთხედის ტოლგვერდობის გამო  $DA=DB$  და  $KA=KB$ .

განვ.  $\triangle DAC$   $\angle DCA=90^\circ$ ;  $DC=16$ ;  $AC=16\sqrt{3}$ , ე.ი.  $AD=\sqrt{16^2+(16\sqrt{3})^2}=32$ .  
 $\triangle AOK$ -ში  $\angle AOK=90^\circ$  ( $DC\parallel OK$ ).

$$AO = \frac{AC\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 16; \quad OK = 12. \quad \text{ე.ი.} \quad AK = \sqrt{16^2+12^2} = 20.$$



6.  $\triangle MNK$ -ში  $\angle K=90^\circ$ ;



$$MN=30$$

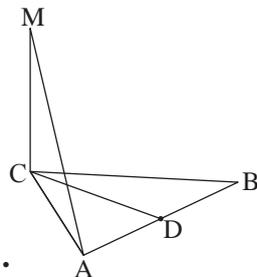
$$NK=NN_1-MM_1=24.$$

$$\text{ე.ი.} \quad M_1N_1 = MK = \sqrt{MN^2 - NK^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18.$$

#### 4. წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი

ამოხსნები, მითითებები:

2.  $AC=BC=10$ ;  $AB=12$ ;  $AD=DB=6$ .



$\triangle ACD$ -დან

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 8. \quad (MC \perp AC; MC \perp CB) \Rightarrow MC \perp (ABC) \Rightarrow MC \perp CD.$$

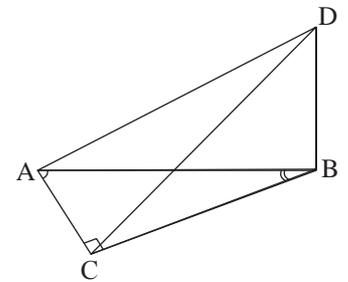
$$\text{ე.ი.} \quad \triangle MCD\text{-ში} \quad MD = \sqrt{MC^2 + CD^2} = \sqrt{225 + 64} = 17.$$

3.  $\triangle ABC$ -ში  $\angle A + \angle B = 90^\circ$ . ე.ი.  $\angle C = 90^\circ$ .

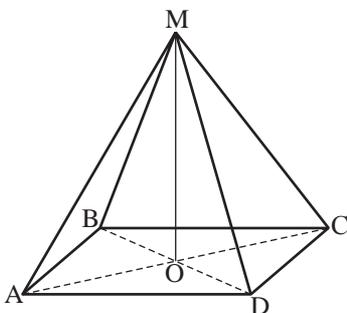
$DB \perp (ABC)$

ე.ი.  $DB$  მართობია  $ABC$  სიბრტყის ნებისმიერი წრფის. მივიღეთ, რომ

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp DB \\ AC \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (BCD) \Rightarrow AC \perp DC \cdot \text{რ.დ.გ.}$$

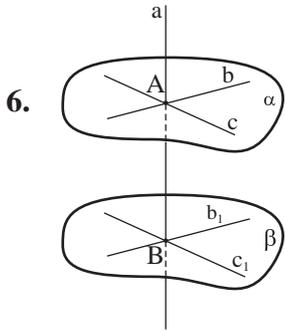
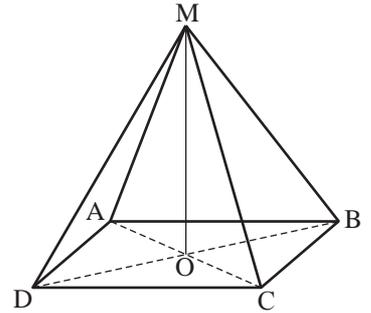


4.  $\triangle AMC$ -ში  $\left. \begin{array}{l} AM = MC \\ AO = OC \end{array} \right\} \Rightarrow MO \perp AC$   
 ანალოგიურად  $\triangle MBD$ -ში  $MO \perp BD$   
 $\Rightarrow MO \perp (ABCD)$ .



5. ( $\angle MAB = \angle MAD = 90^\circ$ )  $\Rightarrow MA \perp (ABCD)$

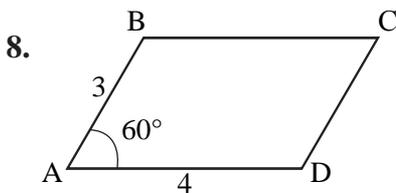
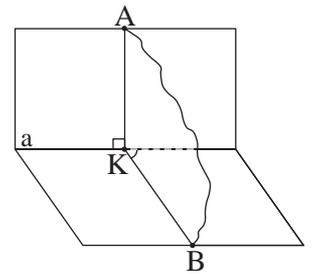
- ა)  $\Delta MAD$ -დან  $MD = \sqrt{MA^2 + AD^2} = \sqrt{25 + 72} = \sqrt{97}$ .  
 $AC = AD\sqrt{2} = 12$ .  $\Delta MAC$ -დან  $MC = \sqrt{AM^2 + AC^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$ .  
 ბ)  $\Delta AMO$ -დან  $MO = \sqrt{MA^2 + AO^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$ .



$\alpha \parallel \beta$ ;  $a \perp \alpha$ . უ.დ.  $a \perp \beta$ .  $(a \perp \alpha) \Rightarrow a \perp b$ ;  $a \perp c$ .  
 გავავლოთ  $\alpha$  და  $\beta$ -ს გადაკვეთის B წერტილზე  $b_1 \parallel b$  და  $c_1 \parallel c$ .

ცხადია,  $a \perp b_1$  და  $a \perp c_1$ . ე.ი.  $a \perp \beta$ .

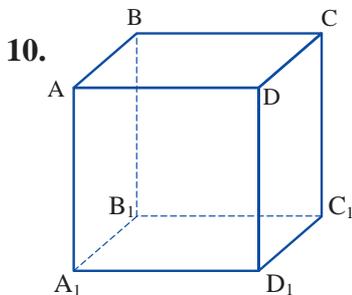
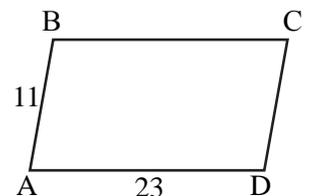
7. A წერტილზე და a წრფეზე გავავლოთ სიბრტყე. ამ სიბრტყეში დავუშვათ  $AK \perp a$ . K წერტილზე გავავლოთ a წრფის პერპენდიკულარული ნებისმიერი წრფე, რომელიც (a;A) სიბრტყეში არ მდებარეობს  $KB \perp a$ . სიბრტყე, რომელიც გადის AK და KB წრფეებზე a წრფის მართობელია. ერთადერთობა დავამტკიცოთ წინააღმდეგობის დაშვებით.



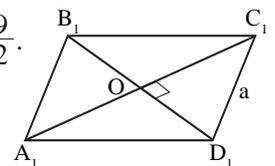
ფუძის გვერდებია  $a=3$  და  $b=4$ . გვერდითი ნიბო აღვნიშნოთ  $h$ -ით, ე.ი.  $h^2 = ab \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$ . პარალელებიპედის დიაგონალები აღვნიშნოთ  $d_1$  და  $d_2$ -ით. ამოვხაზოთ ფუძე  $BD^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13$ .

$d_1^2 = h^2 + BD^2 = 12 + 13 = 25 \Rightarrow d_1 = 5$   
 $d_2^2 = h^2 + AC^2 = 12 + 37 \Rightarrow d_2 = 7$

9. ABCD პარალელოგრამი პარალელებიპედის ფუძეა  $AC:BD=3:2$   
 $\Rightarrow AC=3x$  და  $BD=2x$ .  $(3x)^2 + (2x)^2 = 2(23^2 + 11^2) \Rightarrow 13x^2 = 1300 \Rightarrow x=10$ .  
 $S_1 = AC \cdot h = 30 \cdot 1 = 30$ ;  $S_2 = BD \cdot h = 20$ .



$A_1C = 8$  და  $BD_1^2 = 5$ ,  $h=2$ .  $BD_1^2 = h^2 + B_1D_1^2 \Rightarrow B_1D_1^2 = 21$ .  
 $A_1C^2 = h^2 + A_1C_1^2 \Rightarrow 64 = A_1C_1^2 + 4 \Rightarrow A_1C_1^2 = 60$ .  
 $\Delta C_1OD_1 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{A_1C_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{B_1D_1}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow a = \frac{9}{2}$ .



11. ა) 4; ბ) 18.

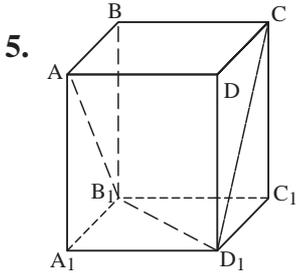
## 5. პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილი

ამოხსნები, მითითებები:

2.  $\triangle BKC \Rightarrow BC^2=9^2+3^2 \Rightarrow \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ .  $SB=SC=SA \Rightarrow O$  წერტილი შემოხაზული წრეწირის ცენტრია  $R=\frac{3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 6}{4 \cdot 9 \cdot 3}=5$ .

$\triangle SOB \Rightarrow SO=\sqrt{169-25} = 12$ .

3. ფუძის დიაგონალია 10 სმ.  $h^2=13^2-5^2 \Rightarrow h=12$ .



5. I. ვიპოვოთ  $AB_1$  და  $CD_1$  წრფეებს შორის მანძილი. გავავლოთ  $DC_1 \parallel AB_1$ . მანძილი ამ წრფეებს შორის არის  $AB_1$  წრფიდან  $D_1DCC_1$  სიბრტყემდე მანძილი.  $AD \perp D_1DCC_1$  სიბრტყის  $AD=2$  მ. ანალოგიურად დანარჩენ პარალელურ სიბრტყეთა წყვილებს შორის მანძილი იქნება 1 მ და 3 მ.

7. პირამიდის სიმაღლე გაყოფილია 4 ტოლ ნაწილად. თითოეული ეს ნაწილი აღვნიშნოთ  $h$ -ით, მაშინ

$$\frac{S_1}{400} = \frac{(h)^2}{(4h)^2} \Rightarrow S_1 = 25; \quad \frac{S_2}{400} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_2 = 100;$$

$$\frac{S_3}{400} = \frac{(3h)^2}{(4h)^2} \Rightarrow S_3 = 225.$$

8.  $S_{33} + 200 = S_9$

$$\frac{S_{33}}{S_9} = \frac{(3h)^2}{(7h)^2} = \frac{9}{49} \Rightarrow \frac{S_{33} - 200}{S_9} = \frac{9}{49} \Rightarrow 49S_{33} - 9800 = 9S_9.$$

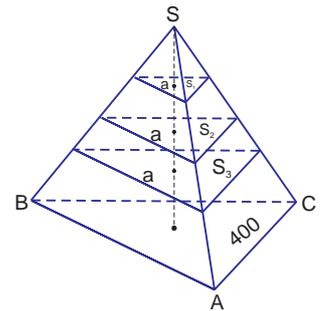
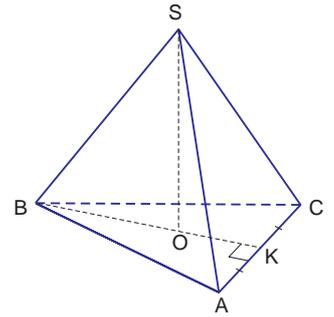
$$40S_9 = 9800 \Rightarrow S_9 = 245.$$

9. ვთქვათ ეს კვეთა არის ფუძიდან  $x$  მანძილზე, მაშინ

$$\frac{S_{33}}{S_9} = \frac{(16-x)^2}{(16)^2} \Rightarrow x=6.$$

10. პირამიდის სიმაღლე აღვნიშნოთ  $h$ -ით.

$$\frac{S_{33}}{S_9} = \frac{(h-14)^2}{h^2} \Rightarrow \frac{54}{150} = \frac{(h-14)^2}{h^2} \Rightarrow \left(\frac{h-14}{h}\right)^2 = \frac{9}{25} = \frac{h-14}{h} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5h-70=3h \Rightarrow 2h=70; h=35.$$

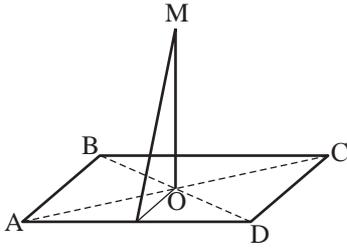


## 6. სამი მართობის თეორემა

ამოხსნები, მითითებები:

1. ორ შემთხვევას განსაზღვრავს EF წრფის M სიბრტყეზე გეგმილის მდებარეობა.

3.

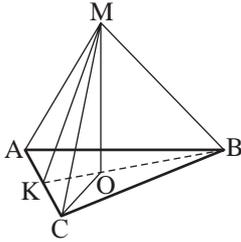


$$MK = a; \quad AC = d$$

$$OK = \frac{AD}{2} = \frac{d}{2\sqrt{2}}$$

$$MO = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{8}}$$

4.



$$MA = MB = MC = 5$$

$$MK = \sqrt{13}$$

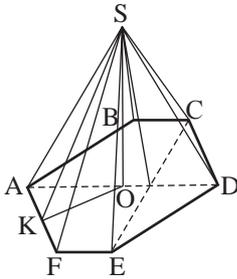
$$AB = AC = BC \equiv a$$

$$\begin{cases} MO^2 = MK^2 - KO^2 \\ MO^2 = MC^2 - CO^2 \end{cases} \Rightarrow 25 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 13 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2,$$

საიდანაც  $a^2 = 48$ .

$$MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = \sqrt{25 - \frac{48}{3}} = 3.$$

6.



$$SA = SF = \sqrt{10} \quad SK = \sqrt{8} \quad \text{უკ. } OP.$$

AOF ტოლგვერდი სამკუთხედი.

$$\triangle ASK - \text{დან } AK = \sqrt{10 - 8} = \sqrt{2}.$$

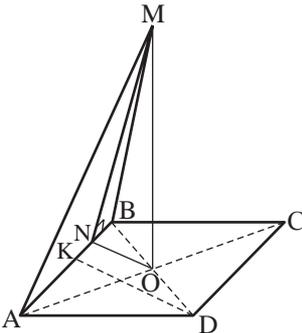
$$AF = 2\sqrt{2}.$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{10 - 8} = \sqrt{2}.$$

$$OP = PD = \frac{OD}{2} = \sqrt{2}.$$

$$\triangle SOP - \text{ში } SP = \sqrt{SO^2 + OP^2} = \sqrt{2 + 2} = 2.$$

7.



$$AB = BC = CD = AD = a = \sqrt{65}$$

$$MN = 2a$$

$$\angle BAD = 60^\circ.$$

ე.ი. ABD სამკუთხედი ტოლგვერდაა

$$DK \perp AB$$

$$ON \perp AB; \quad OB = OD \quad \text{ე.ი. } KN = NB.$$

$$\text{მივიღეთ } NB = \frac{AB}{4} = \frac{a}{4}.$$

$$\triangle MNB - \text{ში } MB = \sqrt{MN^2 + NB^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{65}}{4} = \frac{65}{4}.$$

8. ვთქვათ უნდა გავავლოთ ნვეროდან x მანძილზე

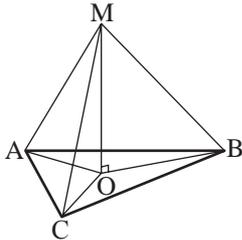
$$\text{ა) } \frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{h}{3}; \quad \text{ბ) } \frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{h}{5}.$$

9. ა)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}ah$ ;    ბ)  $a^2+2ah$ ;    გ)  $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2} + 3ah$ .

## 7. კუთხე წრფისა და სიბრტყის შორის

ამოხსნები, მითითებები:

2.



$AB = BC = AC = 7\sqrt{6}$   
 $\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = 45^\circ$ .  
 უკ. MA.  
 $MO = AO = R_{ABC} = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = 7\sqrt{2}$ .  
 $AM = AO\sqrt{2} = 14$ .

4. ნახაზი წინა ამოცანა 2-ის.

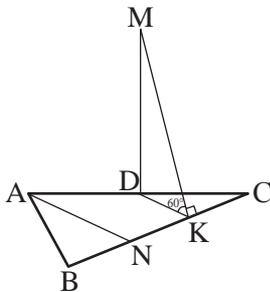
$AB = c = 29$     $AC = b = 5$     $BC = a = 30$

$\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = \alpha$ ;    $\cos \alpha = \frac{29}{48}$ ;

$OA = OB = OC = R_{ABC} = \frac{abc}{4S} = \frac{29 \cdot 30 \cdot 5}{4\sqrt{32 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 27}} = \frac{29 \cdot 25}{48}$

$MB = \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{29 \cdot 25 \cdot 48}{48 \cdot 29} = 25$ .

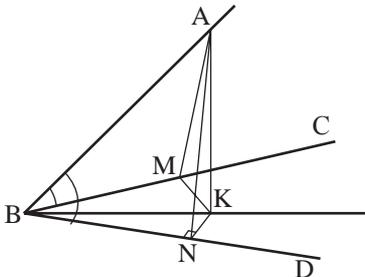
5.



$AN \perp BC$ . გავატაროთ  $DK \parallel AN$ ;  $AD = DC$ .  $DK \perp BC$ , ე.ი.  $DK = \frac{AN}{2}$   
 ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის AN სიმაღლე.  $AN = 12$ ;  $DK = 6$ .  
 $\triangle MDK$  – ში  $\angle D = 90^\circ$   $DK = 6$ . ე.ი.  $MK = 12$ .  
 $MDK$  სამკუთხედზე შემოხაზული წრენილის რადიუსი

ტოლია  $\frac{MK}{2} = 6$ .    $S_R = \pi R^2 = 36\pi$ .

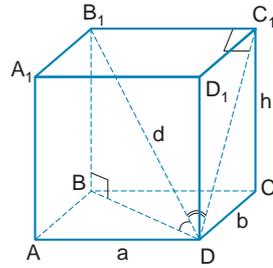
6.



დავუშვათ A წერტილიდან (BCD) სიბრტყეში მართობი AK.  
 უ.დ. რომ BK CBD კუთხის ბისექტრისაა.  
 $KM \perp BC$ ;  $KN \perp BD$  სამი მართობის თეორემით,  $AM \perp BC$   
 და  $AN \perp BD$ .  
 $\triangle ABM = \triangle ABN$  ( $\angle ABM = \angle ABN$ ; AB საერთოა). ე.ი.  $BM = BN$ .

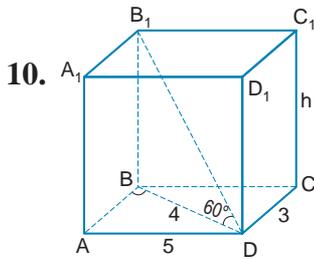
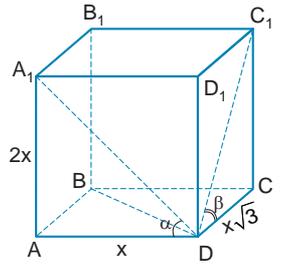
განვ.  $\triangle MBK$  და  $\triangle NBK$ . ეს სამკუთხედები ტოლია (BK საერთოა). ე.ი.  $\angle MBK = \angle NBK$ , რ.დ.გ.

8.  $\Delta B_1C_1D \Rightarrow B_1C_1=3x$  და  $d=4x \Rightarrow x=\frac{d}{4}$ .  
 $\Delta B_1BD \Rightarrow \frac{h}{4x} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow h = \sqrt{3}d = \frac{\sqrt{3}d}{4}$ ;  $a = \frac{3d}{4}$ .  
 $\Delta B_1BD \Rightarrow BD^2=d^2-h^2=13x^2$ .  
 $\Delta ABD \Rightarrow a^2+b^2=13x^2 \Rightarrow b^2=4x^2 \Rightarrow b=2x=\frac{d}{2}$ .



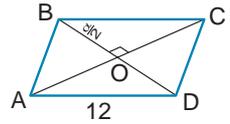
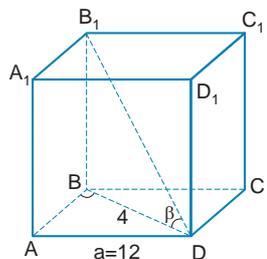
9.  $\left. \begin{aligned} \text{ctg}\alpha &= \frac{1}{2} \\ \text{ctg}\beta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AA_1 = 2x, AD = x \text{ და } DC = \sqrt{3}x$

ABCD მართკუთხედი, ე.ი.  $BD=2x$ .  
 $\Delta B_1BD$  მართკუთხაა, კათეტები  $BB_1=BD=2x$ , ე.ი. საძიებელი კუთხეა  $45^\circ$ .

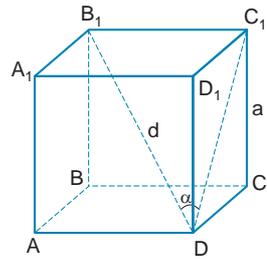


10.  $\Delta ABD$ -ში  $AB=3$ ;  $BD=4$  და  $AD=5 \Rightarrow \angle ABD=90^\circ$ .  
 $\Delta B_1BD \Rightarrow BB_1=h=4\sqrt{3}$ .  
 $ABCD$  პარალელეპიპედიდან  $(AC)^2+4^2=2(3^2+5^2) \Rightarrow AC^2=52$ .  
 $\Delta ACC_1 \Rightarrow AC_1^2=h^2+AC^2=52+48=100 \Rightarrow AC_1=10$ .

11. ამოცხაზოთ ფუძე (რომბი)  
 $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow BO = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4 \Rightarrow BD=8$ .  
 $\Delta B_1BD \Rightarrow \frac{BD}{BB_1} = 8 \Rightarrow BB_1=1$ .  
 $S_{\text{ს3}} = 4ah = 4 \cdot 2 = 48$ .

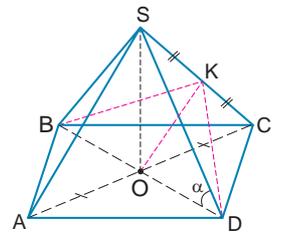


12. პრიზმის ფუძეა კვადრეტი. გვერდი აღვნიშნოთ a-თი.  
 $\Delta B_1C_1D \Rightarrow \frac{a}{d} = \sin\alpha \Rightarrow a = 3\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} = 2\sqrt{3}$ .  
 ხოლო  $C_1D^2=d^2-a^2=9 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 15$ .  
 $\Delta C_1CD \Rightarrow C_1C^2=C_1D^2-a^2=15-12=3$ .  $a=\sqrt{3}$ .



13. BD დიაგონალზე SA ნიბოს პარალელურად უნდა გავავლოთ  $\beta$  სიბრტყე. გვანტიერესებს ეს სიბრტყე სად გადაკვეთს SC ნიბოს.  $O \in \beta$ . გავავლოთ  $OK \parallel AS$ . ცხადია,  $OK \in \beta$ ,  $OK$  არის  $\Delta ACS$ -ის შუახაზი.

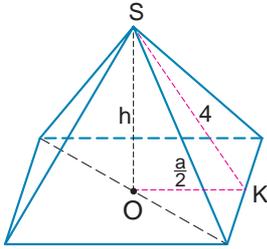
$ABCD$  კვადრატია  $\Rightarrow BD \perp AC$   
 $SO$  პირამიდის სიმაღლეა  $\Rightarrow BD \perp SO$  )  $\Rightarrow BD \perp (SOC)$  სიბრტყის  
 (ორი ურთიერთგადაკვეთი წრფის მართობულია). ე.ი.  $\left. \begin{aligned} BD \perp OK \\ \text{განვ. } \Delta BKD \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\Delta BKD} = \frac{1}{2} BD \cdot OK$ .



$$OK = \frac{1}{2}AC = 3,5. \Delta SOD \Rightarrow \frac{OD}{SD} = \cos \alpha \Rightarrow OD = 7 \cdot \frac{6}{7} = 6 \Rightarrow BD = 12.$$

$$S_{\Delta BKD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3,5 = 21.$$

14.

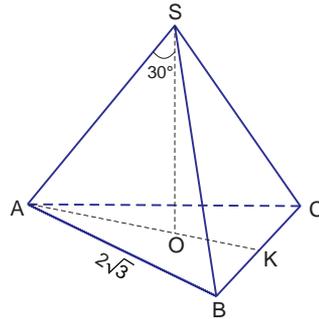


აპოთემა აღვნიშნოთ H.  $S_{\text{პიკ}} = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot H = 2aH.$

$$\Delta SOK \Rightarrow H = \sqrt{h^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4h^2 - a^2}}{2}. a = \frac{P}{\sqrt{4h^2 - a^2}}.$$

15.  $\Delta ABC \Rightarrow AK = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3. AO = \frac{2}{3}AK = 2.$

$\Delta AOS \Rightarrow AS = 4.$



16. აპოთემა იქნება SK (იხ. ამოცანა 15-ის ნახაზი). ფუძის გვერდი იყოს a.

$$S_{\text{პიკ}} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot SK = 12a.$$

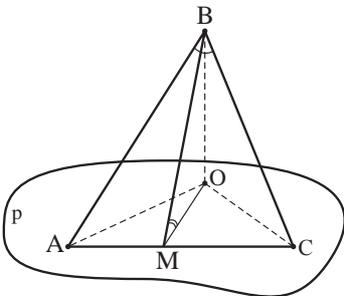
$$\Delta SOK \Rightarrow OK = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow AK = 12\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 24.$$

$$S_{\text{პიკ}} = 12 \cdot 24 = 288.$$

## 8. ორნახნაბა კუთხა

ამოხსნები, მითითებები:

1.



მოც.:  $AB = BC. \angle B = \beta; \cos \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$((\widehat{ABC}); p) \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

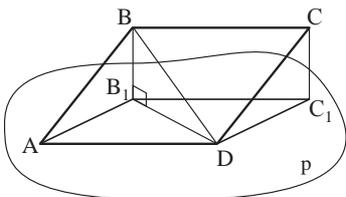
უ.გ.  $\angle BAO. BM \perp AC$ , ე.ი.  $AM = MC$  და  $\angle BMO = \alpha.$

$$AB \equiv a. \Delta ABM - \text{შო } BM = AB \cos \frac{\beta}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\Delta BOM - \text{შო } BO = BM \sin \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ ე.ი.}$$

$$\Delta ABO - \text{შო } AB = a \quad BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ მივიღეთ: } \angle BAO = 45^\circ.$$

2.



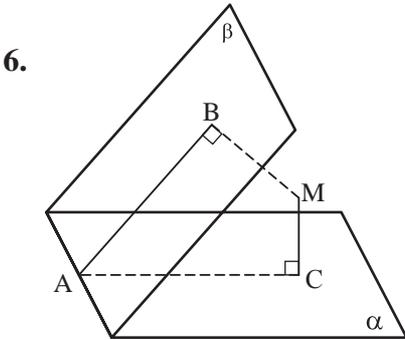
მოც.: ABCD კვადრატის.

$$((\widehat{ABC}); p) = \alpha; \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

უ.გ.  $\sin \widehat{BDB}.$

$$\alpha = \angle BAB_1 \text{ ე.ი. თუ } AB=a, \text{ მაშინ } BB_1 = a \sin \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{5}.$$

$$\triangle BB_1D - \text{ში } BB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{5} \quad BD = a\sqrt{2} \quad \text{ე.ი. } \sin \angle BDB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{5a\sqrt{2}} = 0,2.$$



6.

$$\text{მოც.: } (\widehat{\alpha; \beta}) = 60^\circ \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

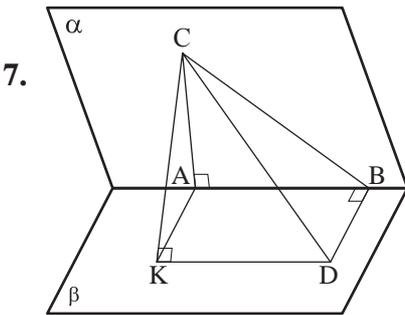
$$MC \perp \alpha; MB \perp \beta; MC = MB = 13.$$

უ.გ. MA.

$$\triangle MCA = \triangle MBA \quad (BM = CM;$$

AM სვეტოთ).

$$\text{ე.ი. } \angle BAM = \angle MAC = \angle BAC : 2 = 30^\circ. \quad AM = 2MC = 26.$$



7.

$$\text{ა) } (\widehat{\alpha; \beta}) = 120^\circ. \quad AC = AB = a. \text{ გავავლოთ } AK \parallel BD; \quad AK = BD.$$

$$\angle CAK = 120^\circ. \quad \triangle CAK - \text{ში } CK = a\sqrt{3}.$$

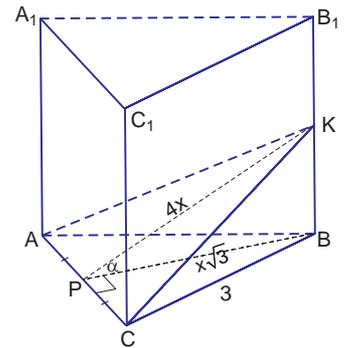
$$\triangle CKD - \text{ში } CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = 2a.$$

$$\text{ბ) } AB=3; \quad AC=2; \quad BD=1. \text{ ანალოგიურად } \triangle CAK - \text{ში კოსინუსების თეორემით ვიპოვოთ } CK^2=7.$$

$$\triangle CKD - \text{ში } CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{7 + 9} = 4.$$

$$\left. \begin{aligned} 8. \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BP = \sqrt{3}x \text{ და } KP = 4x \\ \triangle ABC \Rightarrow BP = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} = 4x \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{\triangle AKC} = \frac{1}{2} AC \cdot KP = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$



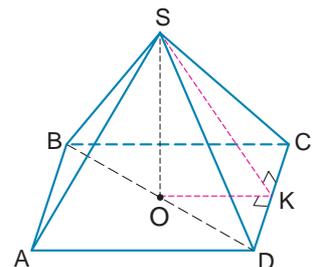
$$9. \quad S_{\text{გ}} = P_{ABC} \cdot B_1B \text{ (იხილეთ მე-8 ამოცანის ნახაზი).}$$

$$BP = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad \text{tg} 60^\circ = \frac{KB}{BP} \Rightarrow KB = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2}. \quad BK = KB_1 \Rightarrow BB_1 = 9. \quad S_{\text{გ}} = 9 \cdot 9 = 81.$$

$$10. \quad \cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow OK = 2x \text{ და } SK = 3x. \quad OK = \frac{a}{2} = 3, \text{ ე.ი. } x = 1,5.$$

$$SK = 4,5.$$

$$S_{\triangle SOC} = \frac{1}{2} SK \cdot DC = 4,5 \cdot 6 = 27.$$



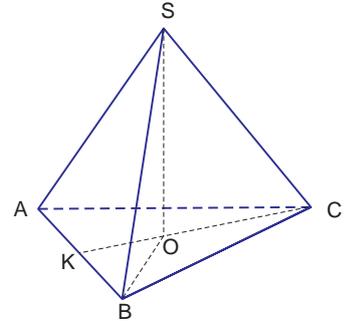
11.  $\angle DSC = \alpha \Rightarrow \angle DSK = \frac{\alpha}{2}$  (იხილეთ წინა მე-10 ამოცანის ნახაზი).  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow DK = x$  და  $SK = 3x$ , მაგრამ  $DK = \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2} = x$ , ე.ი.  $SK = \frac{3\sqrt{21}}{2}$ .

$$S = S_{\text{ფ}} + S_{\text{გ}} = a^2 + 2a \cdot SK = 21 + 2\sqrt{21} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{2} = 21 + 63 = 84.$$

12.  $\angle SKO = \alpha$ .  $\cos \alpha = \frac{1}{3} = \frac{OK}{SK} \Rightarrow OK = x$  და  $SK = 3x$ .

$$\Delta SOK \Rightarrow 9x^2 = x^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 8x^2 = 3 \Rightarrow x = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SK = 3x = 6\sqrt{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{6}.$$



13. განვ.:  $\Delta SOB$ .  $SB = 11$  და  $\angle SBO = 30^\circ \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{OB}{SB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OB}{11} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{3} \cdot 11}{2}$ .

$$\Delta ABC \Rightarrow SK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ მაგრამ } \frac{2}{3}SK = OB = \frac{\sqrt{3} \cdot 11}{2}. \text{ მივიღეთ: } \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 11}{2} \Rightarrow a = \frac{33}{2}$$

(იხილეთ წინა მე-12 ამოცანის ნახაზი).

14. რადგან გვერდითი წახნაგები ფუძისადმი ტოლი კუთხეებითაა დახრილი, ე.ი. O წერტილი ფუძეში ჩახაზული წრენირის ცენტრია (იხილეთ მე-12 ამოცანის ნახაზი) (1).  $\Delta ABC$  წესიერია, ე.ი. (1)-ის გათვალისწინებით პირამიდა წესიერია, რ.დ.გ.

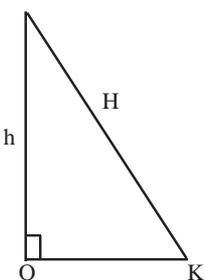
15.  $S = S_{\text{ფ}} + S_{\text{გ}} \Rightarrow 16 = a^2 + 2a \cdot SK$  (იხილეთ მე-10 ამოცანის ნახაზი).  $SK = x$ .  $\Delta SKD \Rightarrow 25 = x^2 + \frac{a^2}{4}$ .

$$\text{მივიღეთ სისტემა: } \begin{cases} 4x^2 + a^2 = 100 \cdot 4 \\ a^2 + 2ax = 16 \cdot 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x^2 + 4a^2 = 400 \\ 25a^2 + 50ax = 400 \end{cases}.$$

$16x^2 + 4a^2 = 25a^2 + 50ax$  ერთგვაროვანი განტოლებიდან მივიღებთ, რომ  $\frac{x}{a} = \frac{7}{2}$ , საიდანაც სისტემის ერთ-ერთ განტოლებაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ, რომ  $a = \sqrt{2}$ .

16. ფუძის დიდი დიაგონალია  $2a$ . დიაგონალური კვეთის ფართობი იქნება  $S_{\text{კვ}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h = ah$ . აპოთემა

ალენიშნოთ  $H$ -ით. მაშინ გვერდითი წახნაგის ფართობი იქნება:  $S_1 = \frac{1}{2} a \cdot H$ . პირობის თანახმად:  $S_{\text{გ}} = S_1 \Rightarrow ah = \frac{1}{2} a \cdot H \Rightarrow H = 2h$ .



OK არის ტოლგვერდა ( $a$  გვერდით) სამკუთხედის სიმაღლე.  $OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  (განიხილეთ ფუძის ექვსკუთხედი).

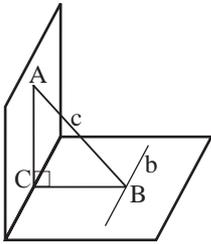
$$H^2 = h^2 + OK^2 \Rightarrow 4h^2 = h^2 + \frac{a^2 \cdot 3}{4} \Rightarrow 3h^2 = \frac{a^2 \cdot 3}{4} \Rightarrow h = \frac{a}{2}.$$

$$S_{\text{გ}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot H = 3a^2.$$

## 9. მართოკუთხედიანი სივრცეები. სივრცეების მართოკუთხოვნის ნიშანი

ამოხსნები, მითითებები:

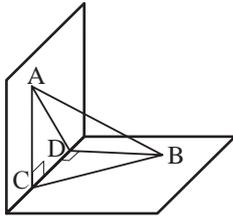
1.



მანძილი A წერტილიდან b წრფემდე ტოლია AB-ს.  $CB \perp z$ .

$$AB = \sqrt{0,25 + 1,44} = 1,3.$$

4.



ე)  $AC=1$ ;  $BD=b$ ;  $CD=c$ .

უ.ვ. AB.

$$\triangle ACD : AD = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$\triangle ADB : AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

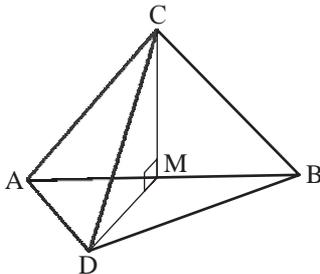
ვ)  $AD=m$ ;  $BC=n$ ;  $CD=p$ .

უ.ვ. AB.

$$\triangle ACD : AC^2 = m^2 - p^2$$

$$\triangle ACB : AB = \sqrt{m^2 + n^2 - p^2}$$

5.



$AC=CB$ ;  $\angle ACB=90^\circ$ .

$AD=DB$ ;  $\angle ADB=90^\circ$ ;  $AB=5\sqrt{2}$ .

$((\widehat{ACB})(\widehat{ADB})) = 90^\circ$ . უ.ვ. CD.

დავუშვათ  $CM \perp AB$ , ე.ი.  $\angle CMD=90^\circ$ .

მართკუთხა ტოლფერდა ACB და ADB სამკუთხედებში

$$CM = \frac{AB}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = DM, \text{ ე.ი. } CDM \text{ სამკუთხედში } CD = CM\sqrt{2} = 5.$$

6. (იხილეთ წინა მე-5 ამოცანის ნახაზი).  $AC=AD=3$ ;  $BC=BD=4$ , უ.ვ. CD.

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{AD^2 + DB^2} = 5. \quad CM=DM = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}, \text{ ე.ი. } CD = CM\sqrt{2} = \frac{12\sqrt{2}}{5}.$$

8. აჩვენეთ მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობა. ერთი კათეტი პირამიდის სიმაღლე, მეორე — ა) აპოთემა — ჰიპოტენუზა; ბ) და გ) მახვილი კუთხეები ტოლი აქვთ). სამივე შემთხვევაში ეს სამკუთხედები ტოლია სხვადასხვა ნიშნით.

10. რადგან სიმაღლე გადის დიაგონალების კვეთის წერტილზე, ანუ ჩახაზული წრენიის ცენტრში, ეს ნიშნავს, რომ გვერდითი ნახნაგების (პირამიდის წვეროდან გავლებული) სიმაღლეები ტოლია, ანუ გვერდითი ნახნაგები ტოლდინია. ფუძის გვერდი აღვნიშნოთ a-თი.  $a^2=9+16 \Rightarrow a=5$ . აპოთემა აღვნიშნოთ H-ით. მაშინ

$$\left. \begin{aligned} H^2 &= h^2 + ok^2 \\ S_{\text{რომბის}} &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 5 \cdot 2OK \Rightarrow OK = \frac{12}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H^2 = 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{25 + 144}{25} = \frac{169}{25}; H = \frac{13}{5}.$$

$$S_{\text{გ}} = 2a \cdot H = 2 \cdot 5 \cdot \frac{13}{5} = 26.$$

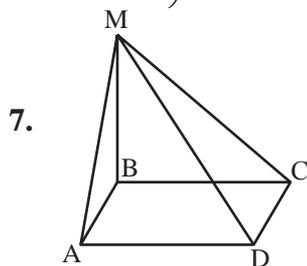
11. იხილეთ ამოცანა 10.

#### IV თავის ღამათებითი სავარჯიშოები

1. არ შეიძლება. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოცემული ორი წრფე იქნება პარალელური.

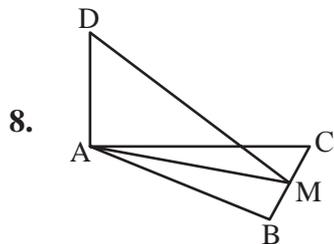
2. MBD სამკუთხედი მართკუთხაა, იმიტომ, რომ  $(MB \perp AB; MB \perp BC) \Rightarrow MB \perp (ABC)$ .

3.  $\left. \begin{aligned} AC = AB \\ CM = MB \end{aligned} \right\} \Rightarrow AM \perp CB$      $\left. \begin{aligned} CD = DB \\ CM = MB \end{aligned} \right\} \Rightarrow DM \perp CB$      $\left. \begin{aligned} CB \perp AM \\ CB \perp DM \end{aligned} \right\} \Rightarrow CB \perp (ADM)$



$$\left. \begin{aligned} BA \perp AD \\ MB \perp (ABCD) \end{aligned} \right\} \Rightarrow MA \perp AD$$

ე.ი.  $\triangle AMD$  მართკუთხაა.  
ანალოგიურად,  $\triangle MBC$ -ც მართკუთხაა.

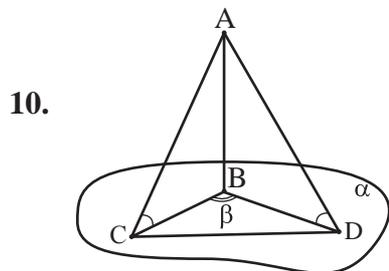


$$AB = AC = 10; BC = 12; AD = 24.$$

A წერტილიდან მანძილი BC წრფემდე AM მონაკვეთის ტოლია.  
 $AM \perp BC$ , ხოლო D წერტილიდან – DM მონაკვეთის.

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 8$$

$$\triangle ADM - \text{ში } DM = \sqrt{24^2 + 8^2} = 8\sqrt{10}.$$

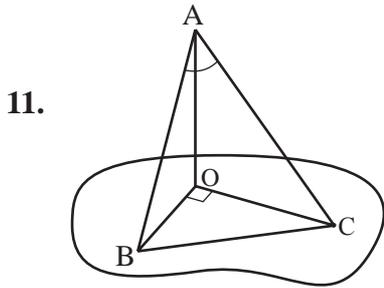


$$\angle ACB = \angle ADB = 30^\circ$$

$$AB \perp \alpha \quad AB = a$$

$$CB = BD = a\sqrt{3}$$

$$\triangle CBD: \quad CD = 3a$$

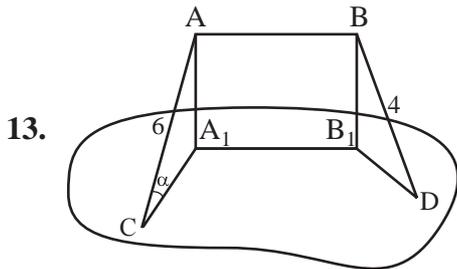


$$\left. \begin{aligned} AB = AC = 7\sqrt{2} \\ \angle BAC = 60^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC = 7\sqrt{2}$$

$$\angle BOC = 90^\circ \quad BO = OC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 7.$$

$$(\triangle ABO \quad AO \perp BO)$$

$$AB = 7\sqrt{2} \quad BO = 7 \Rightarrow AO = 7.$$



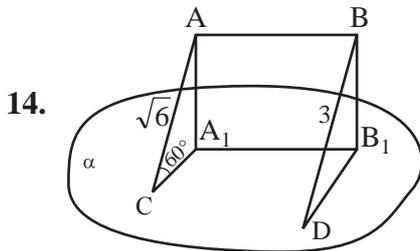
უ.ვ.  $\angle BDB_1$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$AA_1 = AC \sin \alpha = 2$$

$$BB_1 = AA_1 = 2.$$

$\triangle BB_1D \quad BD = 4; \quad BB_1 = 2 \quad \text{უ.ვ.} \quad \angle BDB_1 = 30^\circ.$



$$AA_1 = AC \sin 60^\circ = \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

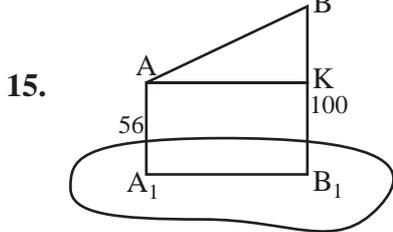
$$A_1C = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$AA_1C$  სამკუთხედში ჩახაზული წრის ფართობი:

$$S = \pi r^2 = \pi \frac{(3\sqrt{2} - \sqrt{6})^2}{16} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)^2}{8}$$

$BDB_1$  სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობია:

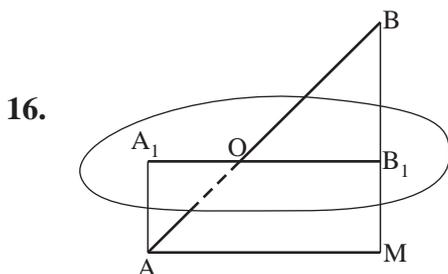
$$S_1 = \pi R^2 = \frac{9}{4} \pi \quad \frac{S_1}{S} = \frac{6}{(\sqrt{3} - 1)^2}.$$



$$AK \parallel A_1B_1$$

$$BK = 100 - 56 = 44$$

$$\triangle ABK: \quad AK = \sqrt{125^2 - 44^2} = \sqrt{81 \cdot 169} = 9 \cdot 13 = 117 = A_1B_1.$$



$$AA_1 = 6 \quad BB_1 = 10$$

$$A_1B_1 = 12$$

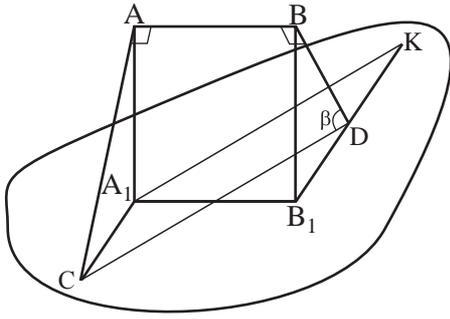
გადავლოთ  $AM \parallel A_1B_1$

$$AM = A_1B_1 = 12$$

$$BM = BB_1 + A_1A = 16$$

$$\triangle ABM: \quad AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20.$$

19.



$$AB=16 \quad BD=4\sqrt{6} \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{2,5}}{4}$$

$$AC=8; \quad \text{უ.ვ. } CD.$$

$$\Delta BB_1D: \quad BB_1 = BD \sin \beta = \sqrt{15}$$

$$B_1D = \sqrt{(4\sqrt{6})^2 - 15} = 9.$$

$$\Delta AA_1C: \quad AA_1 = \sqrt{15} \quad AC=8.$$

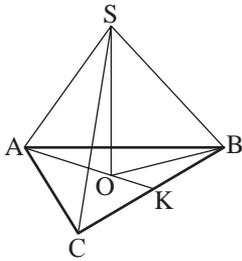
$$\text{ე.ი. } A_1C = \sqrt{64 - 15} = 7.$$

$((B_1BD) \perp AB \quad (AA_1C) \perp AB) \Rightarrow (AA_1C) \parallel (BB_1D), \quad B_1D \parallel A_1C.$

$B_1D$ -ს გაგრძელებაზე გადავდოთ  $DK=A_1C$ . მივიღეთ:  $A_1KDC$  პარალელოგრამი.

$$CD = A_1K = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1K^2} = 16\sqrt{2}.$$

21.



$$SA = SB = SC.$$

$$AC = AB \quad AK \perp BC \quad AK = 4; \quad CB = 4.$$

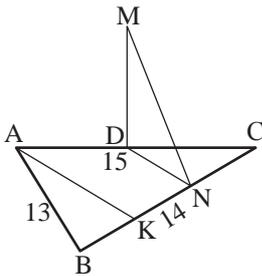
$$SO \perp (ABC) \quad SO = 6.$$

$$\text{უ.ვ. } SA.$$

$$OA = OB = OC = R_{ABC} = 2,5$$

$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = 6,5.$$

22.



$$AD = DC.$$

$$MD \perp (ACB) \quad DM = 4.$$

უ.ვ. მანძილი M წერტილიდან BC გვერდამდე.

დავუშვათ  $DN \perp BC$ , სამი მართობის თეორემის თანახმად  $MN \perp BC$ .

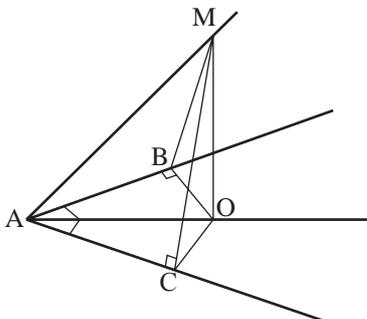
ე.ი. უნდა ვიპოვოთ MN.

დავუშვათ  $AK \perp BC$ , ცხადია  $DN \parallel AK$ ,  $DN = \frac{AK}{2}$ . ვიპოვოთ AK.

$$AK = \frac{2S_{ABC}}{BC} = 12, \quad \text{ე.ი. } DN = 6. \quad \Delta MND: \quad MN = 2\sqrt{3}.$$

23. AD წრფის გეგმილი BAC კუთხის ბისექტრისაა, ამიტომ ის BC გვერდს AB და AC გვერდების პროპორციულ ნაწილებად ყოფს.

24.



$$MO \perp (ABC)$$

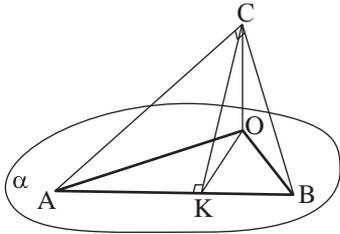
$$MB = MC = b \quad MA = a$$

$$\text{უ.ვ. } MO.$$

$$\Delta ABO: \quad BO = AB = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$\Delta MBO: \quad MO = \sqrt{2b^2 - a^2}.$$

25.

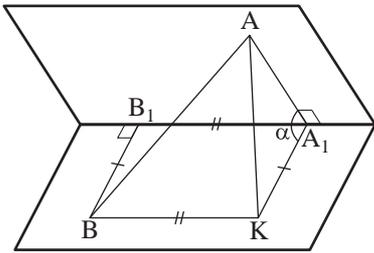


$\triangle ABC: \angle C = 90^\circ$ .  
 $CB = 7 \quad AC = 24$ .  
 $(\alpha; (ABC)) = 30^\circ \quad CO \perp \alpha$ .  
 უპ. CO.

$CK \perp AB$ . უპ.  $\angle CKO = 30^\circ \Rightarrow CO = \frac{CK}{2} \quad CK = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{7 \cdot 24}{25}$ .  $CO = 3,36$ .

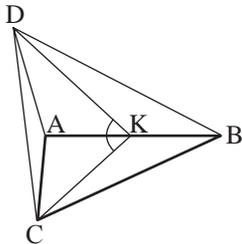
26. ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის A წვეროდან დაშვებული სიმაღლე.

27.



$AB = \sqrt{BK^2 + AK^2} =$   
 $= \sqrt{c^2 + a^2 + b^2 - 2abc \cos \alpha}$

28.



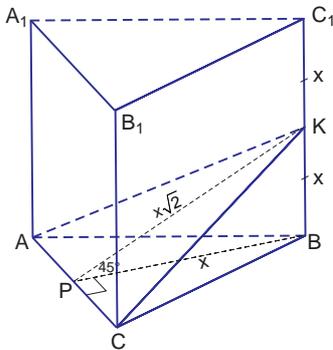
$AB = 16 \quad AC = 17; S_{ADB} = 160 \quad \angle DKC = 60^\circ$ .

უპ. DC.

$\triangle ACK: CK = 15$   
 $\frac{16 \cdot DK}{2} = 160 \quad DK = 20$

$\triangle DCK: DC = \sqrt{400 + 225 - 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$ .

30.



$\triangle KPC \Rightarrow KP = \sqrt{2} KC = CC_1$ .  
 $\triangle ABC \Rightarrow PC = \frac{\sqrt{3}}{2} = x \Rightarrow CC_1 = \sqrt{3}$ .  
 $S_{\text{ს3}} = 3 \cdot a CC_1 = 3\sqrt{3}$ .

31.  $S = 2S_{\text{გ}} + S_{\text{ს3}} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} + (a+b+c) \cdot h = 480 + 4500 = 4980$ .

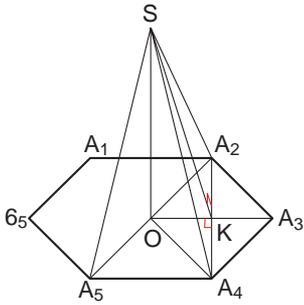
პასუხი: 4980 სმ<sup>2</sup>.

32. იხილეთ ამოცანა 30-ის ნახაზი.

$BC:AB = 5:6 \Rightarrow AP = PB = 3x$  და  $BC = 5x$ .  $\triangle BPC \Rightarrow PC = 4x$ .

$S_{ABC} = 3x \cdot 4x = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot h \Rightarrow h = \frac{24}{5}x$  (h პრიზმის სიმაღლეა)

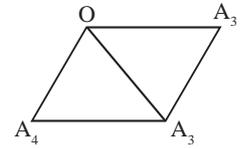
$S = 24x^2 + 16x \cdot \frac{24}{5}x = 2520 \Rightarrow x = 5$ .  $AB = 30$ მ;  $BC = 25$ მ და  $CC_1 = 24$ მ.



**33.** ამოვხაზოთ ის ნაწილი, რომელიც გვჭირდება.  $A_1A$  არის ექვსკუთხედის დიდი დიაგონალი, ე.ი. დიაგონალური კვეთაა  $\Delta A_5SA_2$ .  $S_{\Delta A_5SA_2} = \frac{1}{2}h \cdot 2a = ah$ .  $A_2A_4$  არის მართი დიაგონალი.  $OA_2A_3A_4$  რომბია, მაშასადამე  $OA_3 \perp A_2A_4$ , საიდანაც სამი მართობის თეორემის თანახმად  $SK \perp A_2A_4$ .

ე.ი.  $S_{\Delta A_4SA_2} = \frac{1}{2}A_2A_4SK$ .

ამოვხაზოთ  $OA_2A_3A_4$  რომბი.  $\angle A_4 = 60^\circ \Rightarrow OA_3 = a$ .



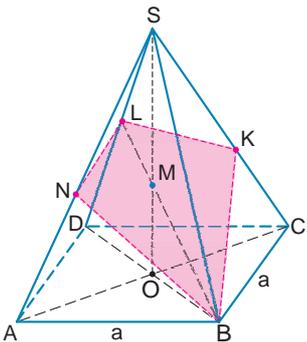
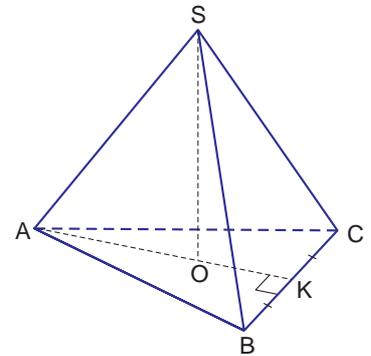
$$\Delta OKS \Rightarrow SK = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}. A_2A_4 = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta A_4SA_2} = \frac{a\sqrt{12h^2 + 3a^2}}{2}.$$

პასუხი:  $S_1 = ah$ ;  $S_2 = \frac{a\sqrt{12h^2 + 3a^2}}{2}$ .

**34.**  $\Delta AOS \Rightarrow h = \sqrt{b^2 - AO^2}$ ;  $\Delta ABC \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,

ე.ი.  $h = \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}$ .

$$S_{\Delta ASK} = \frac{1}{2}AK \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{4}.$$

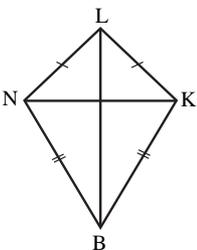


**36.** ვთქვათ ეს კვეთა  $SD$  ნიბოს კვეთის  $L$  წერტილში, ხოლო  $AS$  და  $CS$  ნიბოებს შესაბამისად  $N$  და  $K$  წერტილებში. პირობის თანახმად,  $SD$  ნიბო მართობულია კვეთის სიბრტყის, ანუ  $(BNLK)$  სიბრტყის, მაშასადამე,  $SD$  მართობულია ამ სიბრტყის ნებისმიერი წრფის, ე.ი.  $SD \perp BL$ ,  $SD \perp BK$  და  $SD \perp LK$ .  $\Delta DBS$  ტოლგვერდაა ( $\angle DSB = 60^\circ$ ), ე.ი.  $BL$  არის მედიანაც, ანუ  $DL = LS$  და  $BL = \sqrt{3}$ .

ამოვხაზოთ  $DSC$  სამკუთხედი. ადვილად დარწმუნდებით,

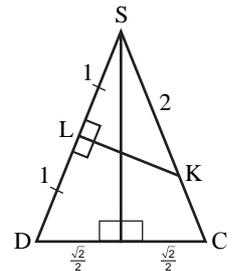
რომ  $\frac{SK}{SC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ , ხოლო  $\Delta ASC \Rightarrow \frac{NK}{AC} = \frac{SK}{SC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ , საიდანაც  $NK = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ .

ამოვხაზოთ კვეთა. ცხადია,  $NC = LK$  და  $NB = BN$ , ე.ი.  $NK \perp LB$ .

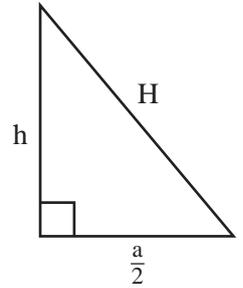


$$S_{NLKB} = \frac{1}{2}BL \cdot NK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$$

პასუხი:  $S_{33} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ .



38. ფუძის დიაგონალი იქნება  $a\sqrt{2}$ , დიაგონალური კვეთა კი  $S_{\text{ჰ3}} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot h$ , პირობის თანახმად ეს კვეთა ფუძის ტოლდია, ე.ი.  $\frac{\sqrt{2}}{2} ah = a^2$ , საიდანაც  $h = a\sqrt{2}$ .  $S_{\text{ჰ3}} = 2a \cdot H$ , საიდანაც  $HM$  აპოთემა  $H = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$ .  $S_{\text{ჰ3}} = 3a^2$ .

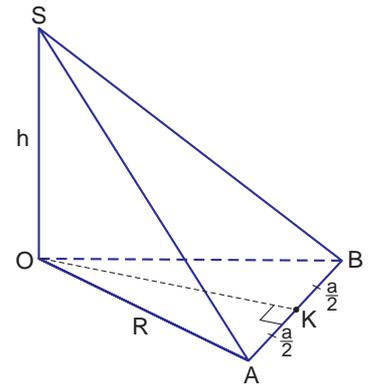


39. ამოვხაზოთ პირამიდის ის ნაწილი, რომელიც გვეჭირდება.

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ \Rightarrow \angle AOK = 18^\circ.$$

პირობის თანახმად,

$$h = R + \frac{a}{2}. \Delta OAK \Rightarrow OK = R \cos 18^\circ. AK = R \sin 18^\circ \Rightarrow a = 2R \sin 18^\circ.$$



$$\Delta SOK \Rightarrow SK = \sqrt{h^2 + R^2 \cos^2 18^\circ} = \sqrt{(R + R \sin 18^\circ)^2 + R^2 \cos^2 18^\circ} = R \sqrt{2 + 2 \sin 18^\circ}$$

$$S_{\text{ჰ3}} = 5a \cdot SK = 5 \cdot 2R \sin 18^\circ \cdot R \sqrt{2 + 2 \sin 18^\circ} = 10R^2 \sin 18^\circ \sqrt{2(1 + \sin 18^\circ)}.$$

ტესტი:

1. ა; 2. გ; 3. ბ; 4. გ; 5. გ; 6. დ; 7. გ; 8. ა; 9. დ.

# V ტაზი

## 1. მიმდევრობა

### რეზიუმე:

გავახსენოთ მოსწავლეებს მიმდევრობის განმარტება. გავახსენოთ, თუ როგორ უნდა შევეცადოთ დავინახოთ კანონზომიერება, რომლითაც შედგენილია მოცემული მიმდევრობა. შევახსენოთ მიმდევრობის ზოგ. წევრის ფორმულა; რეკურენტული ფორმულა, არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები. ვთხოვოთ მათ დაასახელონ პარაგრაფის დასაწყისში დასმულ ამოცანაში წევრთა გაგრძელება.

ა) სამკუთხა, ოთხკუთხა, ხუთკუთხა... პირამიდა;

ბ)  $X_n = 2n^2 - 1$ .

### ამოხსნები, მითითებები:

1. ზ)  $\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{8} \dots$ ;      თ) 1; 0; -1; ...

6. გ)  $a_1=1; a_{n+1}=a_n^2+1$ ;    ვ)  $a_1=4; a_{n+1}=2a_n+2(-1)^{n+1}$ .

11.  $(\sqrt[4]{10n+4})^2 = \sqrt{n-4} \cdot \sqrt{n+2}$   
 $n^2-13n-14=0$ , საიდანაც  $n=14$ .

## 2. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი

### რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ინდუქციური და დედუქციური მსჯელობების ერთმანეთისგან გარჩევა. უნდა შეეძლოს დასკვნების გაკეთება, როგორც ერთ, ისე მეორე შემთხვევაში და იმის დანახვა, თუ როდის არის მსჯელობიდან გაკეთებული დასკვნა ჭეშმარიტი. მოსწავლემ უნდა იცოდეს მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი. უნდა შეეძლოს ამ პრინციპებით შესაბამისი მაგალითების გაკეთება (უტოლობების დამტკიცება, ჯამების დათვლა, გაყოფადობების დამტკიცება...).

### ამოხსნები, მითითებები:

1. ა)  $S_n = 1+3+5+\dots+(2n-1)$ .

$S_1=1; S_2=4; S_3=9 \dots S_n=n^2$ ;

$S_1$  — ჭ;

დავუშვათ  $S_k=k^2$ ;

$S_{k+1}=k^2+a_{k+1}=k^2+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$ ;

ბ)  $S_n = -1+3-5+7-\dots+(-1)^n(2n-1)$

$S_1=-1; S_2=2; S_3=-3 \dots S_n=(-1)^2-n$ ;

$S_1$  — ჭ;

$S_{k+1}=(-1)^k+(-1)^{k+1}(2k+2-1)=(-1)^k(k-2k-1)=(-1)^{k+1}(k+1)$ ;

გ)  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$S_1 = \frac{1}{3}; S_2 = \frac{2}{5}; S_3 = \frac{3}{7} \dots S_n = \frac{n}{2n+1}.$$

$S_1$  — ჭ.

$$S_{k+1} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3};$$

$$\text{ფ) } \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$S_1 = \frac{1}{3 \cdot 1 + 1}; S_2 = \frac{2}{3 \cdot 2 + 1} \dots S_n = \frac{n}{3n+1};$$

$S_1$  — ჭ.

$$S_{k+1} = \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}.$$

2.  $n=19$ -სთვის გამოსახულება არ არის მარტივი.

$$3. \text{ ა) } \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

$$A_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{ჭ.}$$

$$A_k = \frac{1}{k+1}$$

$$A_{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{k+1}, \text{ რ.დ.გ.}$$

$$3) 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$S_1 = 1$  ჭ.

$$S_{k+1} = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

$$4. \text{ ა) } (6^{2n}-1):35$$

$$A_1: (6^2-1):35 \quad \text{ჭ.}$$

$$A_k: (6^{2k}-1):35$$

$$A_{k+1}: 6^{2k+2}-1 = 36 \cdot 6^{2k}-1 = \underbrace{35 \cdot 6^{2k}} + \underbrace{6^{2k}-1}:35$$

$$\text{ბ) } (4^n + 15n - 1):9 \quad \text{ჭ.}$$

$$A_1: 4 + 15 - 1 = 9$$

$$A_{k+1}: 4^{k+1} + 15k + 14 = 4 \cdot 4^k + 15k + 14 = 4 \cdot 4^k + 4 \cdot 15k - 4 - 3 \cdot 15k + 18 = 4 \underbrace{(4^k + 15k - 1)} - \underbrace{45k + 18}:9$$

$$\text{გ) } (7^{n+2} + 8^{2n+1}):57$$

$A_1$  — ჭ.

$$A_k: (7^{k+3} + 8^{2k+1}):57$$

$$A_{k+1}: 7^{k+2} + 8^{2k+3} = 7 \cdot 7^{k+1} + 64 \cdot 8^{2k+1} = 7 \underbrace{(7^{k+1} + 8^{2k+1})} + \underbrace{57 \cdot 8^{2k+1}}.$$

$$\text{დ) } (n^3 + 3n^2 + 5n + 3):3$$

$A_1$  — ჭ.

$$A_{k+1}: (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) + 3 = k^3 + 6k^2 + 14k + 12 = \underbrace{k^3 + 3k^2 + 5k + 3} + \underbrace{3k^2 + 9k + 9}.$$

$$ე) (6^{2n-1} + 1) : 7$$

$$A_1 - 3.$$

$$A_{k+1}: 6^{2k+1} + 1 = 36 \cdot 6^{2k-1} + 36 - 35 = 36(\underbrace{6^{2k-1} + 1}) - 35$$

$$ვ) (6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) : 11$$

$$A_1 - 3.$$

$$A_{k+1}: 6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1} = \underbrace{36 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^{k+1}} = 33 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot \underbrace{(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^{k+1})}.$$

$$5. ა) 2^n > 2n + 1 \quad n \geq 3$$

$$n=3 \quad 8 > 7 \quad 3.$$

$$A_k: 2^k > 2k + 1$$

$$A_{k+1}: 2^{k+1} > 2(k+1) + 1$$

$A_k$ -ს უტოლობა შევკრიბოთ

$$2^k > 2 \quad (k \geq 3) \text{ ჭეშმარიტი უტოლობაა}$$

$$\text{მივიღებთ: } 2^k + 2^k > 2k + 1 + 2. \quad 2 \cdot 2^k > 2k + 3.$$

$$ბ) \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

$$S_2 = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} \quad 3.$$

$$\text{ვთქვათ } S_k > \frac{13}{24}, \text{ უ.დ. } S_{k+1} > \frac{13}{24}$$

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0$$

$$ე.ი. S_{k+1} > S_k > \frac{13}{24}.$$

$$ბ) \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad n > 1$$

$$n=2 \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

$$A_k: \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

$$A_{k+1}: \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

განვიხილოთ ჭეშმარიტი უტოლობა

$$1 + \sqrt{\frac{k}{k+1}} > 1, \text{ საიდანაც თუ გავამრავლებდით } \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \text{-ზე}$$

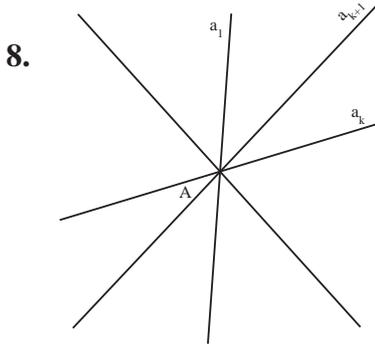
$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \text{ შევკრიბოთ } A_{k+1} \text{ უტოლობასთან, მივიღებთ დასამტკიცებელს.}$$

6. შევაერთოთ  $A_1K$ . ვთქვათ  $A_1 \dots A_k$ .  $K$ -კუთხედის დიაგონალების რიცხვია  $\frac{k(k-3)}{2}$

$(k+1)$ -კუთხედში დაემატება  $A_{k+1}$ -დან გავლებული ყველა დიაგონალი  $(k-1)$  ცალი და  $A_1A_k$  დიაგონალი, ე.ი.  $\frac{k(k-3)}{2} + k - 2 + 1 = \frac{k(k-3) + 2k - 2}{2} = \frac{(k-2)(k+1)}{2}$ . რ.დ.გ.

7. ა)  $a_k = a_1 + d(k-1)$

$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + dk$



ვთქვათ  $A$  წერტილზე გამავალი  $a_1, \dots, a_k$  წრფე სიბრტყეს ყოფს  $2k$  ნაწილად. გავავლოთ  $a_{k+1}$  წრფე, რომელიც ორ მეზობელ წრფეს შორის კუთხეს გაყოფს ორ ნაწილად, ე.ი. დაყოფას დაემატება კიდევ  $2$  ნაწილი  $2k+2=2(k+1)$ .

9.  $2 + 22 + 222 + \dots + \underbrace{22\dots2}_n = \frac{2}{9}(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_n) =$   
 $= \frac{2}{9}(10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \dots + 10^n - 1) = \frac{2}{9}\left(\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right) = \frac{2}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$

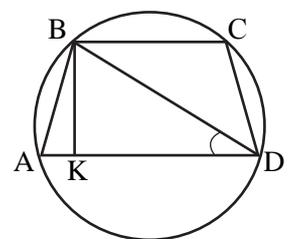
10.  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[512]{a} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{512}} = a^{\frac{511}{512}}$

11.

	რკინა (%)	ნიკელი (%)	
I	10	90	x
II	80	20	3-x

$\frac{10x + 80(3-x)}{3} = 60$ , საიდანაც  $x = \frac{6}{7}$  კგ

12. ამოცანის პირობის თანახმად,  $AB=CD=60^\circ$ , ე.ი.  $\angle ADB=30^\circ$ , მაშინ  $შუახაზი=KD=h\sqrt{3}$ , ე.ი.  $S=h^2\sqrt{3}$ .



### 3. მიმდევრობის ზღვარი

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2}{2n} = 2$ .

$\left| \frac{4n-2}{2n} - 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$ .

4. ა)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n}) = 2$ ;      ბ)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{1}{n}) = 3$ .

5. ა)  $a_n = \frac{2n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ ;

$n=1$      $a_n=2$

$n=2$      $a_n=1\frac{1}{2}$ ,      ე.ო.  $b=2$ ;       $1 < a_n \leq 2$ .

6.  $x^2 - (2^a - 1)x - 3(4^{a-1} - 2^{a-1}) = 0$

$D = (2^a - 1)^2 + 12(\frac{4^a}{4} - \frac{2^a}{2}) = 4 \cdot 2^{2a} - 8 \cdot 2^a + 1 \geq 0$

$$\begin{cases} 2^a \geq \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \\ 2^a \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq \log_2(2 + \sqrt{3}) - 1 \\ a \geq \log_2(2 - \sqrt{3}) - 1 \end{cases}$$

8.  $0, 11^{\log_3 \frac{4x-1}{3x+2}} > 1$        $\log_3 \frac{4x-1}{3x+2} < 0$

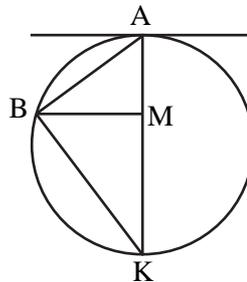
$$\begin{cases} \frac{4x-1}{3x+2} < 1 \\ \frac{4x-1}{3x+2} > 0 \end{cases} \quad x \in (\frac{1}{4}, 3)$$

9.  $AM=x$        $MK=20-x$

$BM = \sqrt{x(20-x)}$

$S_{ABK} = 10\sqrt{20x-x^2}$

უდიდესი იქნება  $x_0 = \frac{-20}{-2} = 10$ .



#### 4. ზომიერითი თეორემა ზღვართა შესახებ

ამოხსნები, მითითებები:

1. ე)  $x_n = \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2 + 1} = \frac{6n^2 + 2}{n^2 + 2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 6$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{3n^2 + 4} = \frac{1}{6}$

6. ა)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 5n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{5}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \sqrt{2}$

ბ)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 3} \cdot \sqrt{n^2 - n + 5}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 3} + \sqrt{n^2 - n + 5}}{2n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}}{2 - \frac{2}{n}} = 1$

$$7. \text{ ა) } x_n = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n+4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ბ) } x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right) =$$

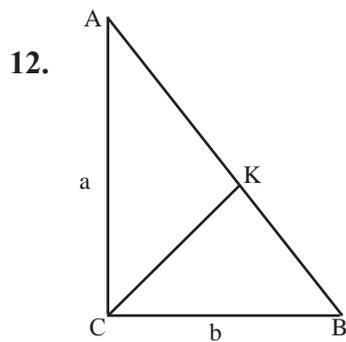
$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} (\sqrt{3} - \sqrt{1} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) = \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{2\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

8. ა) შეიძლება იყოს კრებადი. მაგ.  $a_n = \frac{1}{n}$ ;  $b_n = (-1)^n$ .

ბ) შეიძლება იყოს განშლადი, მაგ.  $a_n = \frac{n+1}{n}$ .  $b_n = (-1)^n$ .

9. ყოველთვის არა, მაგალითად, თუ  $a_n = (-1)^n$ ;  $b_n = (-1)^{n+1}$ , მაშინ  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$ , ხოლო  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 1$



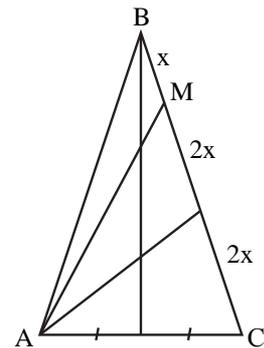
$$S_{ACK} = 384$$

$$S_{CKB} = 216$$

$$\frac{S_{ACK}}{S_{CKB}} = \frac{AK}{KB} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{16}{9}, \text{ ე.ი. } \frac{a}{b} = \frac{4}{9} \text{ და } ab = 1200.$$

საიდანაც  $a=40$ ;  $b=30$ , ე.ი.  $AB=50$ .

13.  $BM:MC=1:4$



## 5. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია

ამოხსნები, მითითებები:

$$1. a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}; \dots \quad b_1 = a \quad q = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P: p_1 = 4a \quad q = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad S_p = \frac{4a}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} a$$

$$S: S_1 = a^2 \quad q = \frac{1}{2}$$

$$S_s = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$$

$$3. S_3=10,5 \\ S=12$$

$$\begin{cases} \frac{b_1(q^3 - 1)}{q - 1} = \frac{21}{5} \\ \frac{b_1}{q - 1} = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} q^3 = \frac{1}{8} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$4. \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{1}{3}; \quad x = \frac{2}{3}.$$

$$5. b_1 q^{n-1} = \frac{4b_{n+1}}{1-q}$$

$$b_1 q^{n-1}(1-q) = 4b_1 q^4$$

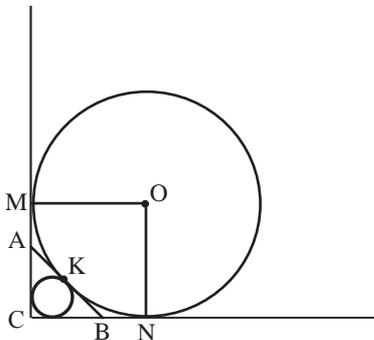
$$q^{n-1} = 5q^n \quad q = \frac{1}{5}$$

$$6. \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 16 \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{768}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b_1^2}{(1-q)^2} = 256 \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{768}{5} \end{cases} \quad \frac{1+q}{1-q} = \frac{3}{5} \quad q = \frac{1}{4}; \quad b_1 = \frac{3}{16}.$$

$$12. \begin{cases} 10x + y = x^2 + xy + y^2 \\ 10(x+5) + y = (x+5)^2 + (x+5)y + y^2 \end{cases} \quad 2x+y=5.$$

13 და 63.

13.



$$AK=AM; \quad KB=BN$$

$$P_{ACB} = CM + CN = 2R$$

$$\begin{cases} a + b + c = 2R \\ a + b - c = 2r \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = R + r \\ c = R - r \end{cases} \quad \text{ავიყვანოთ კვადრატში}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (R+r)^2$$

$$(R-r)^2 + 4S = (R+r)^2$$

$$S = Rr$$

$$15. \text{ა) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}}{0,25n^2 + n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\frac{1}{2} + \frac{n}{2}}{2}}{0,25n^2 + n + 3} = 1$$

$$\text{ბ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n-1} + 3^n - 2^{2n}}{5^n + 2^n + 3^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n + 27\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{1}{5}$$

$$16. \left(1 - \frac{4}{1}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}$$

1-სთვის წინადადება ჭეშმარიტია. დავუშვათ ჭეშმარიტია k-სთვის. უ.დ. რომ (k+1) თანამამრავლი ტოლია  $\frac{2k+1}{-2k-1}$ .

$$\frac{1+2k}{1-2k} \cdot \left(1 - \frac{4}{(2k-1)^2}\right) = -\frac{2k+3}{2k+1}.$$

**შეამოწმე შენი ცოდნა**

1. გ; 2. დ; 3. ბ; 4. ბ; 5. ბ; 6. დ; 7. გ; 8. დ; 9. ბ; 10. გ.

**ღამათაპიტი სავარჯიშოები**

7. დ)  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

$A_1 = 1/5$

$A_k: S_k = \frac{k}{4k+1}$

$A_{k+1}: S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{4k^2 + 5k + 1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}$ , რ.დ.ბ

8. ა)  $k^3 - k:5$

$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 2k = k^3 - k + 3k^2 + 3k$ ;

ბ)  $(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3):9$

$A_{k+1}: (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9k^2 + 27k + 27$ ;

გ)  $(9^{n+1} - 8n - 9):16$

$A_{k+1}: 9^{k+2} - 8(k+1) - 9 = 9 \cdot 9^{k+1} - 8k - 17 = 9 \cdot 9^{k+1} - 9 \cdot 8k + 8 \cdot 8k - 84 + 64 = 9(9^{k+1} - 8k - 9) + 64k + 64$ ;

დ)  $(10^m + 18m - 28):27$

$A_{k+1}: 10^{k+1} + 18(k+1) - 28 = 10 \cdot 10^k + 10 \cdot 18k - 9 \cdot 18k - 10 \cdot 28 + 9 \cdot 28 + 18 = 10(10^k + 18k - 28) + 270$ .

14. ა)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0$

ბ)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = 1$

18. ბურთის მიერ გავლილი მანძილია  $10+2S$ , სადაც  $S$  გეომეტრიული პროგრესიის ჯამია  $b_1=6$

და  $q = \frac{3}{5}$ , ე.ი.  $10 + 2 \cdot \frac{6}{\frac{2}{5}} = 40$  მ.

## VI ტაპი

### 1. ვექტორის კოორდინატები

#### რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს: ვექტორის სანყისი და ბოლო წერტილების კოორდინატებით ვექტორის კოორდინატების დაწერა; კოორდინატების მიხედვით ტოლი ვექტორების ამოჩვენება; ტოლი ვექტორების სანყისი და ბოლო წერტილების სამის, მოცემულობის მიხედვით, მეოთხეს კოორდინატების დადგენა.

#### ამოხსნები, მითითებები:

7.  $\vec{NM} = \vec{PQ}$ , ე.ი.  $-1-3=x-1$  და  $2-3=y-0$ , საიდანაც  $Q(-3;-1)$ .

9.  $|\vec{a}| = \sqrt{4+9+12} = 5$ ;  $|\vec{b}| = \sqrt{1+16+8} = 5$ .

### 2. ვექტორების შეკრება-გამოკლება

#### რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ვექტორების შეკრება-გამოკლება, როგორც გეომეტრიულად, ასევე კოორდინატებში. უნდა შეეძლოს ვექტორების მოცემული კოორდინატებით მოქმედების შედეგად მიღებული ვექტორების კოორდინატების დაწერა.

#### ამოხსნები, მითითებები:

4.  $A(0;0;1)$ ;  $B(3;2;1)$ ;  $C(4;6;5)$ ;  $D(1;6;3)$ .

$$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{CD} = (3;2;0) + (-3;0;-2) = (0;2;-2)$$

$$\sqrt{2}|\vec{a}| = \sqrt{2}\sqrt{0+2^2+(-2)^2} = 4$$

9.  $M(x;y)$   $AB$  მონაკვეთის შუანერტილია  $x = \frac{x_A + x_B}{2} = 3,5$ ;  $y = \frac{y_A + y_B}{2} = -3$ .

10.  $y=x^2$  გრაფიკის წვერო  $(0;0)$  მოცემული პარალელური გადატანით გადავა  $(2;-1)$  წერტილში, ე.ი.  $y=(x-2)^2-1$ .

### 3. ვექტორის გამრავლება რიცხვზე. კოლინეარული ვექტორები

#### რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს მოცემული ვექტორის მოცემულ რიცხვზე გამრავლებით მიღებული ვექტორის კოორდინატების დაწერა; მოცემულ ვექტორებს შორის კოლინეარული ვექტორების ამოჩვენება და უნდა იცოდეს ვექტორების კოლინეარულობის პირობა.

#### ამოხსნები, მითითებები:

4.  $\vec{a}$ ;  $\vec{b}$ ;  $\vec{d}$  და  $\vec{m}$  ვექტორები კოლინეარულია.

5.  $\vec{AC}$  და  $\vec{AB}$  ვექტორები კოლინეარულია.

7. ა)  $\begin{cases} x - 2 = 2 \\ x - 2 = 5 \end{cases} \quad x=4 \text{ ან } 7.$

#### 4. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

**რეზიუმე:**

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს: ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის პოვნა კოორდინატებითა და მათი სიგრძეებით და მათ შორის მდებარე კუთხითაც; მოცემული კოორდინატებით ვექტორებს შორის კუთხის მოძებნა. უნდა იცოდეს, რისი ტოლია სკალარული კვადრატი და ორი მართობული ვექტორის სკალარული ნამრავლი.

**ამოხსნები, მითითებები:**

4. თუ  $\vec{a} + \vec{b}$  და  $\vec{a} - \vec{b}$  მართობულია, მაშინ  $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ , ე.ი.  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .

5.  $|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} \cdot \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2} \cdot \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2} = 29.$

6. ბ)  $|\vec{a}| = 2 \quad |\vec{b}| = 1 \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 60^\circ$

$\vec{a}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 + 2 + 1} = \sqrt{7}$

$5 = 2\sqrt{7} \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$

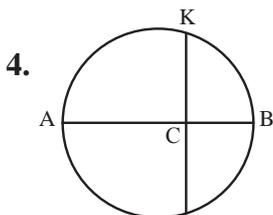
7.  $\vec{AB}(-3;0;-4); \vec{AC}(4;0;-3)$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -12 + 12 = 0$ , ე.ი.  $\angle A = 90^\circ.$

-	1	2	3
1		+	
2			+
3	+		
4		+	
5	+		

#### 5. გრუნძითი სხეულები, ცილინდრი

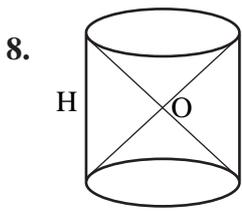
**ამოხსნები, მითითებები:**



$AC:CB=3:1$

$AC = \frac{3R}{2} \quad CB = \frac{R}{2}; \quad CK = \frac{R\sqrt{3}}{2} = r.$

$S = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot H \quad H = \frac{2S}{R\sqrt{3}}.$

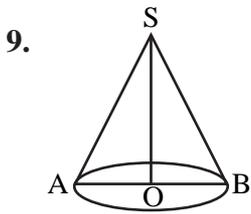


$$\frac{\pi R^2}{2RH} = \frac{\pi}{4}$$

$\frac{R}{H} = \frac{1}{2}$ , ანუ  $\frac{2R}{H} = 1$ , ე.ი. ღერძული კვეთა კვადრატია, ანუ კუთხე დიაგონალებს შორის  $90^\circ$ -ია.

## 6. კონუსი

ამოხსნები, მითითებები:



$$\cos \alpha = \frac{SO}{SB} = \frac{1}{3}$$

$$SO = x, SB = 3x; \quad 2x = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \quad x = \frac{5}{2\sqrt{\pi}} \quad OB^2 = 8x^2$$

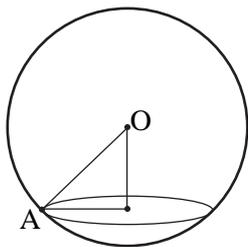
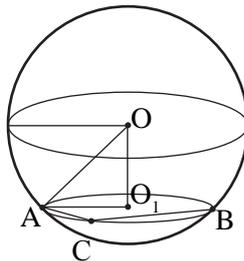
$$S_{\text{ფ}} = \pi \cdot OB^2 = \pi \cdot 8x^2 = 8\pi \cdot \frac{25}{4\pi} = 50.$$

10.  $\frac{\pi R^2}{\frac{1}{2}H \cdot 2R} = \pi$ , საიდანაც  $R=H$ , ე.ი. ფუძესთან მდებარე კუთხეა  $45^\circ$ .

## 7. სფერო, ბირთვი

ამოხსნები, მითითებები:

3.  $AB=10; AC=8; BC=6.$   
 $AB^2=AC^2+BC^2$ , ე.ი.  $\angle C=90^\circ.$   
 $OO_1 = \sqrt{OA^2 - AO_1^2} = 12.$



4.  $R=10$   
 $\pi r^2 = 9\pi \quad r=3$   
 $OO_1 = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91}.$

7. ბ)  $y = x^2 - 2x + 3$   $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

წვერო  $A(1;2) \rightarrow A_1(3;-1)$   
 $y = (x-3)^2 - 1$

## შეამოწმე შენი ცოდნა

1. გ; 2. დ; 3. ბ; 4. გ; 5. დ; 6. დ; 7. გ; 8. ბ; 9. ბ; 10. ა; 11. ბ; 12. გ; 13. ა; 14. ა; 15. ა.

**ღამატეპითი სავარჯიშოეპი**

4.  $\vec{a}(2;-3;6) \quad |\vec{b}|=1 \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$

$\vec{b}(2x;-3x;-6x)$

$4x^2+9x^2+36x^2=1$

$x^2=\frac{1}{49}$ , რადგან  $\vec{a}$  და  $\vec{b}$  თანამიმართულია  $x = \frac{1}{7}$ .

5.  $\vec{c} = (-3;7) \quad \vec{d} = (2;5)$

$|\vec{c}| = \sqrt{58} \quad |\vec{d}| = \sqrt{29} \quad \vec{c} \cdot \vec{d} = 29$

$\cos\alpha = \frac{29}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha = 45^\circ$

16. მოპირდაპრე კუთხეეპი მართია, ე.ი. ნრენირი შემოიხაზება.

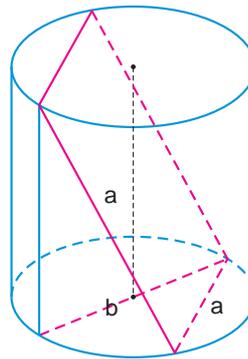
28.  $\frac{\pi R^2}{2RH} = \frac{\pi}{4} \quad \frac{R}{H} = \frac{1}{2}$ , ე.ი.  $45^\circ$ .

29. კვადრატის გვერდია  $a$ , მისი გეგმილია  $b$ .

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4R^2 \\ a^2 - b^2 = h^2 \end{cases} \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \cdot 49 \\ a^2 - b^2 = 4 \end{cases}$$

$2a^2 = 4 \cdot 50$

$a = 10$



32.  $2\pi RH = 2\pi R^2$

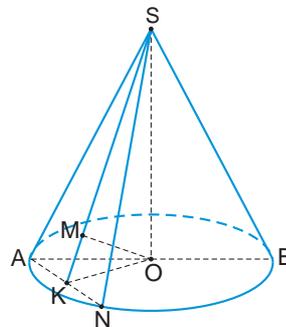
$H = R$

39.  $H = SO = 20; \quad R = ON = 25$

$OM \perp SK \quad OM = 12$ .

$\Delta SOK$ .  $SM = 16; MK = 9$ , ე.ი.  $SK = 25$ .

$OK = 15$ .  $\Delta KON$ .  $KN = 20$ .  $S_{ASN} = 500$ .



# VII თავი

## 1. კომბინატორული ამოცანები

### ამოხსნები, მითითებები:

1. წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს ექვსი ადგილი. პირველი გაკვეთილის შერჩევის 10 ვარიანტია, რადგან გაკვეთილების გამეორება არ შეიძლება. მეორე გაკვეთილის შერჩევის 9 ვარიანტია და ა.შ. ე.ი. ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

გაკვეთილი	I	II	III	IV	V	VI
ვარიანტი	10	9	8	7	6	5

სულ იქნება  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$  ვარიანტი.

2.  $\begin{matrix} 10 & 9 & 8 \\ \text{თავმჯდ.} & \text{I მოადგ.} & \text{II მოადგ.} \end{matrix}$  ვარიანტების რაოდენობა  $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

3. წინა ამოცანიდან უკვე ვიცით, თუ რამდენი დალაგებული სამეული შეიძლება შედგეს 10 ადამიანისგან. ეს არის 720. რადგან a,b,c სამეულისაგან შეიძლება მივიღოთ დალაგებული 6 სამეული, ესენია: {a;b;c}; {a;c;b}; {c;a;b}; {c;b;a}; {b;a;c}; {b;c;a}, ე.ი. სამეულების რაოდენობა  $720:6=120$ .

4. ა) ნომერი 000 შეიძლება, ამიტომ შესაძლო ნომრების რაოდენობაა 1000;  
ბ) შესაძლო სერიები: HHA; HAH; AHH.

5. ა)  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 13 \cdot 14 = 14!$

ბ) რადგან 2 ერთმანეთის გვერდით უნდა მოხვდეს, ჩვენ შეგვიძლია ის ორი წარმოვიდგინოთ ერთნიგნად, ანუ უნდა განვიხილოთ 13 წიგნის დალაგების შესაძლებლობა და მიღებული პასუხი გავამრავლოთ 2-ზე, რადგან იმ ორი ურთიერთმდებარეობის ორი შემთხვევა არსებობს (a;b) და (b;a). პასუხი:  $2 \cdot 13!$ .

6. ა) ციფრების რაოდენობაა 10, მაგრამ პირველ ადგილზე 0 ვერ იქნება. პირველ ადგილზე გვაქვს 9 შესაძლო ვარიანტი. მეორე ადგილზე ვირჩევთ დარჩენილი 9-დან. მესამეზე — დარჩენილი 8-დან და ა.შ.

პასუხი:  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ .

ბ)  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4$ .

7. პირველ ადგილზე წერია 2, ე.ი. ჩვენ გვინტერესებს დარჩენილ 6 ადგილზე მიღებული ვარიანტები; სულ ტოლია:  $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$  (იგულისხმება, რომ მეორე ციფრიც შეიძლება იყოს 0).

8. ა) კენტი ციფრების რაოდენობაა 5, ე.ი. ასეთი რიცხვების რაოდენობა იქნება  $5^5$ . ბ) ლუნი ციფრების რაოდენობაა 5. მაგრამ პირველ ადგილზე 0 ვერ იქნება. ე.ი. ასეთი რიცხვების რაოდენობაა  $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^5$ .

9. ერთიანი აუცილებლად გვხვდება მხოლოდ ერთხელ. ის შეიძლება იდგეს პირველ, მეორე, მესამე ან მეოთხე ადგილზე, ე.ი. ჩვენ უნდა დავთვალოთ რამდენი სამნიშნა რიცხვი შედგება დანარჩენი 7 ციფრისგან და მიღებული პასუხი გავამრავლოთ 4-ზე. ე.ი.  $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 4 \cdot 7^3$ .

10. ასეთი სიტყვების რაოდენობაა  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ .

11. პირველ ადგილას გვაქვს შესაძლო 15 ვარიანტი, მეორესთვის — 14 და მესამესთვის — 13. პასუხია:  $15 \cdot 14 \cdot 13$ .

12. ეს არის  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$  (იხილეთ მე-3 ამოცანა).

13. წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს ოთხი ადგილი. პირველ ადგილზე არის რვა ვარიანტი. რადგან ციფრების გამეორება შეიძლება, ყველა დანარჩენ ადგილზეც იქნება რვა ვარიანტი, ე.ი.  $8^4$ .

## 2. გადასაცვლება, წყობა

ამოხსნები, მითითებები:

1.  $A_{20}^{11} = \frac{20!}{(20-11)!} = \frac{20!}{9!}$ .

2. ა)  $A_{33}^6 = \frac{33!}{(33-6)!} = \frac{33!}{27!}$ .

3.  $A_{25}^5 = \frac{25!}{(25-5)!} = \frac{25!}{20!}$ .

4.  $A_{15}^4 = \frac{15!}{11!}$ .

5.  $P_5 = 5! = 120$ .

6. ა)  $4 \cdot 5^4$ ;      ბ)  $5^5$ .

7. ა) გოგონების სკამებზე განლაგების რაოდენობაა  $P_5 = 5!$ , ბიჭების —  $P_5 = 5!$  რადგან პირველ ადგილზე შეიძლება აღმოჩნდეს როგორც გოგონა, ისევე ბიჭიც, ყველა შესაძლო ვარიანტი დაითვლება  $2 \cdot 5! \cdot 5!$

ბ) ამ შემთხვევაში პირველი ადგილი არ კონკრეტდება (წრეზე სხედან), ამიტომ პასუხია:  $P_5 \cdot P_5 = 5! \cdot 5!$

8. ციფრების რაოდენობაა 6, ე.ი. შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობაა  $A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$ .

9. დავთვალოთ 14 მგზავრის განთავსების ვარიანტების რაოდენობა და მიღებული პასუხი გავამრავლოთ 2-ზე (მძლოლების განაწილების რაოდენობაა 2). პასუხი:  $2 \cdot P_{14} = 2 \cdot 14!$

10. უნდა დავთვალოთ ვაჯების წყვილთა რაოდენობა (პირველი და ბოლო ადგილის დასაკავებლად). ეს რიცხვია:  $A_7^2 = \frac{7!}{5!} = 42$ . დარჩენილი 5 ბიჭი და 5 გოგო სულერთია როგორი თანმიმდევრობით გამოვლენ, ე.ი. უნდა ვნახოთ 10 ბავშვის გამოსვლის თანმიმდევრობა. ეს არის  $P_{10} = 10!$  საბოლოო პასუხი:  $42 \cdot 10!$

11. ბიჭების მერხებზე განაწილების რაოდენობაა  $P_{10} = 10!$  გოგოების —  $P_{10} = 10!$  პასუხი:  $P_{10} \cdot P_{10} = 10! \cdot 10! = (10!)^2$ .

12. ჯერ დავთვალოთ ის შემთხვევა, როცა მწკრივის თავსა და ბოლოში ორი გოგონაა.

$A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 8 \cdot 9 = 72$  შემთხვევა. დარჩენილი 16 ბავშვის გადანაცვლებათა რაოდენობაა  $P_{16} = 16!$  ე.ი. მივიღეთ:  $72 \cdot 16!$  ახლა დავთვალოთ რამდენი რამდენი დალაგებული წყვილი მიიღება 8 ბიჭისგან. ეს იქნება:  $A_8^2 = \frac{8!}{6!} = 7 \cdot 8 = 56$ . დარჩენილი 16 ბავშვის გადანაცვლების რაოდენობაა:  $P_{16} = 16!$  მივიღეთ:  $56 \cdot 16!$ .

13. თავსა და ბოლოში სამკუთხედებია —  $A_5^2 \cdot P_{12}$ ;

თავსა და ბოლოში წრეა —  $A_4^2 \cdot P_{12}$ ;

თავსა და ბოლოში ოთხკუთხედია —  $A_5^2 \cdot P_{12}$ .

სულ  $A_5^2 \cdot P_{12} + A_4^2 \cdot P_{12} + A_5^2 \cdot P_{12} = P_{12}(2A_5^2 + A_4^2) = 12! \left( 2 \cdot \frac{5!}{3!} + \frac{4!}{2!} \right) = 52 \cdot 12!$ .

### 3. ჯუჭითება

ამოხსნები, მითითებები:

2. ა)  $\frac{C_{100}^{97} \cdot P_4}{66 \cdot A_{50}^2} = \frac{100!}{3!97!} \cdot \frac{4!}{66 \cdot \frac{50!}{48!}} = \frac{98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot 4}{66 \cdot 49 \cdot 48} = 25$ ;    ბ)  $C_7^4 + C_7^3 - C_8^3 = 0$ ;

ბ)  $\frac{C_{16}^6}{C_{14}^5 + C_{14}^6 + C_{15}^5} = 1$ .

3. ა)  $C_x^3 + C_x^2 = 15(x^2 - 1) \Rightarrow \frac{x!}{3!(x-3)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} = 15(x^2 - 1) \Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \frac{x(x-1)}{2} = 15(x^2 - 1) \Rightarrow (x-1) \cdot \frac{x(x-2) + 3x}{6} = 15(x-1)(x+1) \Rightarrow x^2 - 2x + 3x = 90(x+1) \Rightarrow x^2 - 89x - 90 = 0$

$$\begin{pmatrix} x \neq 1 \\ x = 90 \\ x = -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x=90$$

ბ)  $C_x^1 + A_x^2 = 256 \Rightarrow \frac{x!}{(x-1)!} + \frac{x!}{(x-2)!} = 256 \Rightarrow x+(x-1)x=256 \Rightarrow x^2=256 \Rightarrow x=16$ ;

ბ)  $\frac{A_{x+2}^4}{A_{x+2}^2} = 42 \Rightarrow \frac{(x+2)! \cdot (x+2)!}{(x-2)! \cdot x!} = 42 \Rightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = 42 \Rightarrow x(x-1)=42 \Rightarrow x^2-x-42=0 \Rightarrow x=7$ ;

დ)  $3C_{2x}^{x-1} = 5C_{2x-1}^x \Rightarrow \frac{3 \cdot (2x)!}{(x-1)!(x+1)!} = \frac{5(2x-1)!}{x!(x-1)!} \Rightarrow 6x = 5x + 5 \Rightarrow x = 5$ .

4.  $(x+x^2)^7 = x^7(x+1)^7$ . ე.ი. გვინდა  $(x+1)^7$  — ეს გამლაში  $x^3$ -ის კოეფიციენტი ეს არის:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot 3} = 35.$$

5. თ)  $x^3$ -ს შეიცავს მესამე წევრი, ე.ი.  $C_5^2(2x)^3(-3)^2 = 720x^3$ . მაშასადამე, კოეფიციენტია 720.

6.  $x^2$ -ს შეიცავს მესამე წევრი. ეს არის  $C_6^2 \cdot 2^4(ax)^2 = \frac{6!}{2!4!} \cdot 2^4 a^2 x^2 = 15 \cdot 2^4 a^2 x^2$ , ე.ი.  $15 \cdot 16a^2 = 60 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$ .

7. რადგან ქვედა კაბასა და შარვალს ერთდროულად ვერ ჩაიცმევს, ამიტომ ეს იგივეა, რაც 8 ბლუზა და 15 ქვედაკაბა. თითო ბლუზასთან არის 15 ვარიანტი. ე.ი. პასუხია:  $15 \cdot 8 = 120$ .

8. რადგან შეიძლება, რომ ორივე ერთი და იგივე სახის სათამაშო იყოს, მაგალითად, ორივე იყოს მანქანა. ასარჩევია  $20+5+10=35$  სათამაშოდან 2 ეს არის  $C_{35}^2 = \frac{35!}{33!2!} = \frac{34 \cdot 35}{2} = 17 \cdot 35 = 595$ .

9. შესაძლო ხდომილობათა რაოდენობაა  $C_{50}^2 = \frac{50!}{48!2!} = 49 \cdot 50 = 49 \cdot 25 = 1225$ . ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვია  $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$ . ალბათობა იმისა, რომ ორივე წითელია, იქნება:  $\frac{3}{1225}$ .

10. შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია  $C_{24}^{10}$ . ხდომილობათა რაოდენობა 5 იქნება  $C_{14}^5 \cdot C_{10}^5$ . ალბათობა იქნება  $\frac{C_{14}^5 \cdot C_{10}^5}{C_{24}^{10}}$ .

11. ორი კამათლის გაგორებისას შესაძლოა მოვიდეს 36 განსხვავებული წყვილი. ამის საილუსტრაციოდ შეგვიძლია გამოვიყენოთ საკოორდინატო სიბრტყე.

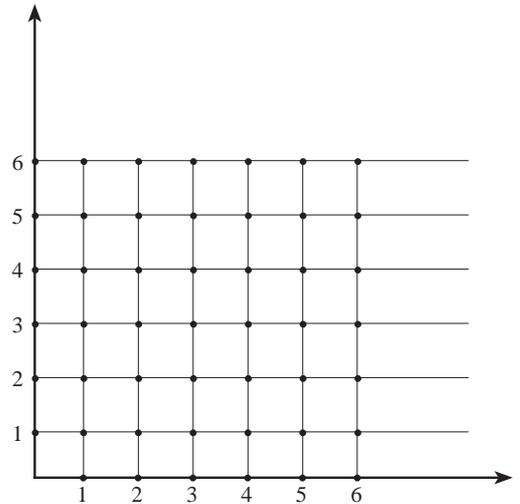
ა) ერთნაირი რიცხვების მოსვლის 6 შესაძლო შემთხვევაა, ამიტომ ალბათობა იქნება  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ;

ბ) განსხვავებული ციფრების მოსვლის ალბათობაა  $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ;

გ) ცხრილი მოგვეხმარება ასეთი წყვილების დათვლაში. (1;2); (1;5); (2;1); (2;4)...(6;3); (6;6). სულ 12.

ალბათობა იქნება  $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ .

დ) დავთვალოთ ისეთი წყვილების რაოდენობა, რომელთა ციფრების ჯამი ნაკლებია ან ტოლი 4-ის. ეს რაოდენობაა 4 (ცხრილში  $2 \times 2$  კვადრატია), ე.ი. ოთხზე მეტს გვაძლევს ჯამში  $36 - 4 = 32$  წყვილი. ალბათობაა  $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$ .



12. ეს რიცხვია  $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ .

13. ყოველი სამი წერტილი გვაძლევს ერთ წრენირს, ე.ი. წრენირების რაოდენობაა

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120.$$

14. ვთქვათ იყო  $x$  მონაწილე. მაშინ გათამაშებული პარტიების რაოდენობაა

$$C_x^2 = 210 \Rightarrow \frac{x!}{2!(x-2)!} = 210 \Rightarrow x^2 - x - 420 = 0. \quad x=21.$$

15. ეს იგივეა, რომ 15 მოსწავლიდან რამდენი ხერხით აირჩევა 4 მოსწავლე, ე.ი. პასუხია:

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{4!11!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 13 \cdot 15 = 1365.$$

#### 4. წყობა განმეორებით

ამოხსნები, მითითებები:

1. კენტი ადგილია 3, მათგან თითოეულისათვის 5-5 ვარიანტია. ლუწი ადგილია 2. მათთვისაც 5-5 ვარიანტია, ე.ი. პასუხია:  $5^5$ .

2. ბარათების რაოდენობაა 8. ციფრი 2 მეორდება ორჯერ. 5 — სამჯერ. შესაძლო რიცხვების რაოდენობაა  $\frac{8!}{2!3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot \cancel{6}} = 3360$ .

3. ბურთულების რაოდენობაა 12. გამეორებების რიცხვია 5, 3 და 4, ე.ი. შესაძლო ვარიანტების რაოდენობაა  $\frac{12!}{5!3!4!} = \frac{\cancel{6} \cdot 7 \cdot \cancel{8} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \cancel{12}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 4} = 27720$ .

4. ასოების რაოდენობაა 6. გამეორებების კი 4 და 2. ვარიანტების რაოდენობაა  $\frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

5. ასოების რაოდენობაა 8. „ა“ მეორდება 3-ჯერ.

6. 9 მგზავრი 2, 3 და 4 კაცისგან შემდგარ ჯგუფებად შეგვიძლია დავანყოთ  $\frac{9!}{2!3!4!}$  ხერხით. თითოეულ ჯგუფს შეუძლია გადმოვიდეს 10 სართულიდან ნებისმიერზე. ვთქვათ ერთ-ერთი ჯგუფი გადმოვიდა 10 სართულიდან ნებისმიერზე. ამის შემდეგ II-ს დარჩა 9 შესაძლებლობა, მესამეს კი 8. მივიღეთ:  $\frac{9!}{2!3!4!} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{4}$ .

7. ვარიანტების რაოდენობაა  $\frac{9!}{2!3!4!} = 1260$ .

8.  $\frac{16!}{5!7!4!}$ .

## 5. ამოხსნათ ამოცანები ალბათობათა თეორიიდან

**ამოხსნები, მითითებები:**

1. ყველა შესაძლო ოთხნიშნა რიცხვთა რაოდენობაა 9000. ხელშემწყობ ხდომილობათა რაოდენობაა (ანუ კენტი ციფრებით შედგენილ ოთხნიშნა რიცხვთა რაოდენობაა)  $5^4$ . ალბათობა იქნება  $\frac{54}{9000} = \frac{5}{72}$ .

2. ა) ოთხნიშნა რიცხვების რაოდენობაა  $9 \cdot 10^{11}$ , ხელშემწყობ ხდომილობათა რაოდენობა კი  $5^{12}$ . ალბათობა  $\frac{5^{12}}{9 \cdot 10^{11}} = \frac{5^{12}}{9 \cdot 5^{11} \cdot 2^{11}} = \frac{5}{9 \cdot 2^{11}}$ .

ბ)  $\frac{5^{18}}{9 \cdot 10^{17}} = \frac{5^{18}}{9 \cdot 5^{17} \cdot 2^{17}} = \frac{5}{9 \cdot 2^{17}}$ .

3. ორნიშნა რიცხვების რაოდენობაა 90. ახლა დავთვალოთ ორნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომლის ჩანაწერშიც არ შედის 2-იანი. გვაქვს ორი ადგილი. პირველ ადგილას ვერ იქნება 0 და 2, ე.ი. გვაქვს რვა ვარიანტი. მეორე ადგილას ვერ იქნება 2-იანი. ე.ი. გვაქვს 9 ვარიანტი. ე.ი.  $8 \cdot 9 = 72$  რიცხვის ჩანაწერში არ გვხვდება 2-იანი. ალბათობა იქნება  $\frac{8 \cdot 9}{90} = \frac{4}{5}$ .

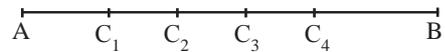
4. ყველა შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია  $9^2 = 81$ . ისეთი ნყვილების რაოდენობა, რომელთა ჯამი ლუნია, იქნება კენტი და კენტი —  $5^2 = 25$ . ლუნი და ლუნი —  $4^2 = 16$ , სულ 41. ალბათობა იქნება  $\frac{41}{81}$ .

5. 10 ასოდან (ასოები არ მეორდება) 5-ასოიანი სიტყვის შედგენის ვარიანტებია (შესაძლო ხდომილობათა რიცხვი)  $A_{10}^5 = \frac{10!}{5!}$ . ამ სიტყვებიდან გვჭირდება ერთი, ე.ი. ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვია 1. ალბათობა  $\frac{5!}{10!}$ .

6. შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია  $A_8^4$ . ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვი კი 1. ალბათობა იქნება:  $\frac{1}{A_8^4} = \frac{4!}{8!}$ .

7. გვაქვს 5 ადგილი. პირველ ადგილზე ასო „ე“-ს მოსვლის ალბათობაა  $\frac{1}{7}$ . დარჩა 6 ასო. II ადგილზე გვინდა „ა“. მისი მოსვლის ალბათობაა  $\frac{3}{6}$ . III ადგილზე „შ“-ს მოსვლის ალბათობაა  $\frac{1}{5}$ . IV-ზე „ლ“-ს მოსვლის ალბათობაა  $\frac{1}{4}$ , ხოლო V-ზე „ი“-ს მოსვლის ალბათობაა  $\frac{1}{3}$ . სიტყვა „ვაშლის“ მოსვლის ალბათობა იქნება ამ ალბათობათა ნამრავლი  $\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{840}$ .

8. ალბათობა იქნება ალბათობათა ნამრავლი (იხ. ამოცანა 7). ე.ი.  $\frac{1}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{1}{1890}$

9.  მონაკვეთების რაოდენობა  $5+4+3+2+1=15$ . ამასთან ისეთი მონაკვეთები, რომლის ბოლო წერტილია A იქნება 5, ე.ი. შესაძლო ხდომილობათა რაოდენობაა 15. ხელშემწყობ ხდომილობათა რაოდენობა იქნება 5. ალბათობა იქნება  $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ .

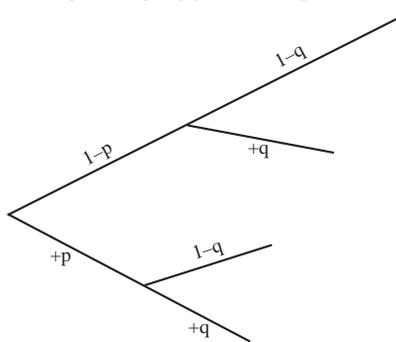
10. რადგან ერთ წყვილს აუცილებლად აიღებს. უნდა ამოიღოს დარჩენილი 27 ქვიდან 6. ეს არის  $C_{27}^6$  (შესაძლო ხდომილობათა სივრცე). ხელშემწყობ შემთხვევაში რიცხვია 1 (ექვსივე წყვილია). ალბათობა იქნება  $\frac{1}{C_{27}^6} = \frac{1!26!}{27!} = \frac{1}{27}$ .

11. თითოეული ამოღებისას გულის ამოღების ალბათობა არის  $\frac{13}{52}$  (13-ია გულის კარტი). ე.ი. ალბათობაა  $\left(\frac{13}{52}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ .

12. ამ რიცხვების გადანაცვლებათა რიცხვია  $P_6=6!$  ამათგან გეომეტრიული პროგრესიაა ორი  $(1; 3; 9; 27; 81; 243$  და  $243; 81; 27; 9; 3; 1)$ , ალბათობაა  $\frac{2}{6!}$ .

13. 20-ის 80%-ია 16, ე.ი. 16 წითელი და 4 ლურჯი. შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია  $C_{20}^8$ . ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვი  $C_{16}^5 \cdot C_4^3$ . ალბათობაა  $\frac{C_{16}^5 \cdot C_4^3}{C_{20}^8} = \frac{16!4!8!12!}{5!11!3!1!20!}$

14. გიორგი ვერ მიიღებს 10-იანს — ალბათობაა  $1-p$ . დათო ვერ მიიღებს 10-იანს — ალბათობაა  $1-q$ . გიორგი ვერ მიიღებს და დათო მიიღებს, ალბათობაა  $q(1-p)$ . დათო ვერ მიიღებს და გიორგი მიიღებს, ალბათობაა  $p(1-q)$ . მხოლოდ ერთი მიიღებს, ალბათობა იქნება  $q(1-p)+p(1-q)=q-pq+p-qp=p+q-2pq$ . ამ ამოცანის საილუსტრაციოდ გამოგვადგება მოცემული სქემა:



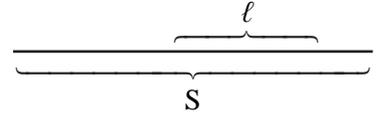
15. შესაძლო ხდომილობათა რიცხვი  $C_{15}^5$ . ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვი კი  $C_6^3 \cdot C_9^2$ . ალბათობაა  $\frac{C_6^3 \cdot C_9^2}{C_{15}^5} \approx 0,24$ .

16. მესამე და მეოთხე ტომი ჩავთვალოთ ერთ წიგნად. ამ შემთხვევაში ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვია  $2 \cdot P_{14} = 14! \cdot 2$ . შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია  $P_{15} = 15!$  ალბათობაა  $\frac{14! \cdot 2}{15!} = \frac{2}{15}$ .

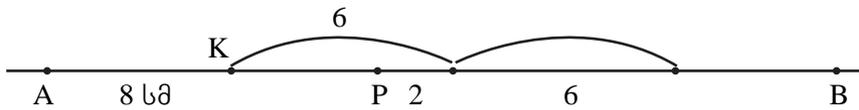
## 6. გეომეტრიული ალბათობა

ამოხსნები, მითითებები:

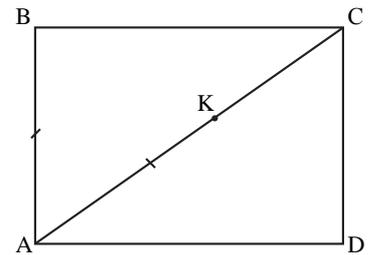
1. ალბათობა იმისა, რომ  $S$  სიგრძის მონაკვეთზე შემთხვევით არჩეული წერტილი  $\ell$  სიგრძის მონაკვეთზე აღმოჩნდება, არის  $\frac{\ell}{S}$ . ჩვენს შემთხვევაში  $S=500\text{მ}$ .  $\ell=200\text{მ}-120\text{მ}=80\text{მ}$ . ალბათობა იქნება  $\frac{80}{500} = \frac{4}{25}$ .



2. ამოცანის ამოსახსნელად დავადგინოთ იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც ამოცანის პირობებს აკმაყოფილებს, ასეთია:  $KP=4$ . ალბათობაა  $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ .



3. AC-ზე გადავზომოთ  $AK=a$  მონაკვეთი. წინადადება, წრეწირის გადაკვეთს AB და AD გვერდებს, ტოლფასია წინადადების წრეწირი გადაკვეთს AK მონაკვეთს. ალბათობა იმისა, რომ წრეწირმა გადაკვეთოს AK მონაკვეთი, ტოლია  $\frac{AK}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

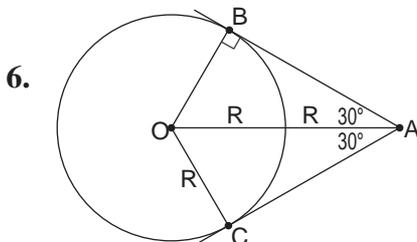
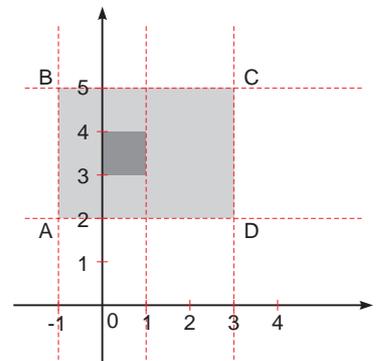


4. წესიერ ექვსკუთხედში  $a=R$  წრის ფართობია  $S_{\text{წრ}} = \frac{\pi a^2 3}{4}$ , ექვსკუთხედის კი  $6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ ,

ალბათობა იქნება  $\frac{S_{\text{წრ}}}{S_{\text{ექვს}}} = \frac{\pi a^2 3}{4 \cdot 6 \sqrt{3} \cdot a^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ .

5. (1) სისტემის შესაბამისი წერტილებია ABCD მართკუთხედი გვერდებით 3 და 4  $S_{ABCD}=12$ .

(2) სისტემის შესაბამისი წერტილებია. ნახატზე გამუქებული კვადრეტი ფართობით 1. ალბათობა იქნება  $\frac{1}{12}$ .



განვ.  $\Delta AOC$   
 $OC=R$   
 $AC=2R$   
 $\angle C=90^\circ$

$\Rightarrow \angle OAC=30^\circ \Rightarrow \angle BAC=60^\circ$ .

A წერტილზე შემთხვევით გავლებულმა წრფემ რომ გადაკვეთოს წრეწირი, იგი უნდა გადიოდეს  $\angle BAC$ -ის გვერდებს შორის, ე.ი. ალბათობაა  $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ .

7.  $S_{\text{ფ}} = 25\pi$ .  $S_{\text{ბ}} = 100$ .

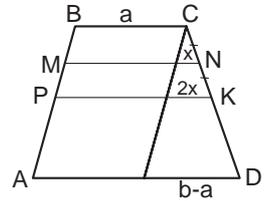
ა)  $\frac{2S_{\text{ფ}}}{2S_{\text{ფ}} + S_{\text{ბ}}} = \frac{50\pi}{50\pi + 100} = \frac{\pi}{\pi + 2}$ ; ბ)  $\frac{100}{50\pi + 100} = \frac{2}{\pi + 2}$ ; გ)  $\frac{25\pi}{50\pi + 100} = \frac{\pi}{2\pi + 4}$ .

8. MBCN; PMNK და APKD ტრაპეციებს ტოლი სიმაღლეები აქვთ. ამას-

თან ადვილად დავრწმუნდებით, რომ  $MN = \frac{2a+b}{3}$ .  
 $PK = \frac{2b+a}{3}$ .  $S_{\text{PMNK}} = \frac{MN + PK}{2} \cdot h = \frac{3a + 3b}{6} \cdot h = \frac{a+b}{2}h$ .

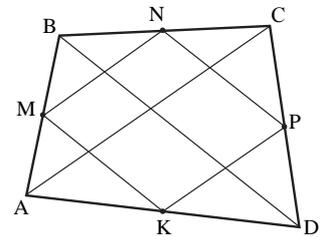
$S_{\text{ABCD}} = \frac{a+b}{2} \cdot 3h$ .

ალბათობა იქნება:  $\frac{S_{\text{PMNK}}}{S_{\text{ABCD}}} = \frac{a+b}{2} \cdot h : \frac{a+b}{2} \cdot 3h = \frac{1}{3}$ .



9. მითითება: განიხილეთ მსგავსი სამკუთხედები.

$\frac{S_{\text{MNPK}}}{S_{\text{ABCD}}} = \frac{3}{5}$ , ე.ი. ალბათობაა  $\frac{3}{5}$ .



10.  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$        $r = \frac{a+b-c}{2} = 1$        $S_{\text{წრ}} = \pi$ . ალბათობაა  $\frac{S_{\text{წრ}}}{S_{\Delta}} = \frac{\pi}{6}$ .

### 7. დაბროვილი სიხშირე. რანგი

ამოხსნები, მითითებები:

1.	ვარიანტი	1	3	7	12	18
	სიხშირე	5	2	2	3	4
	ფარდობითი სიხშირე	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$
	დაგროვილი სიხშირე	5	7	9	12	16
	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{12}{16}$	1

2. ა) 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 4; 7; 8; 9; 9 — ვარიაციული მწკრივი. 0-ის რანგია  $\frac{1+2+3}{3} = 2$ ; 1-ის რანგია

$\frac{4+5+6+7}{4} = 5,5$ ; 4-ის რანგია — 8; 7-ის რანგია — 9; 8-ის რანგია — 10; 9-ის რანგია

$\frac{11+12}{2} = 11,5$ . მოსწავლეებს დაავალეთ, რომ ცხრილის საბოლოო ვარიანტი შეკვეცილი წილადების სახით წარმოადგინონ.

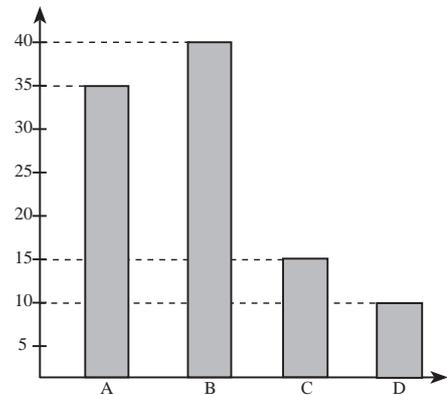
ვარიანტი	0	1	4	7	8	9
სიხშირე	3	4	1	1	1	2
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$
დაგროვილი სიხშირე	3	7	8	12	10	12
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე	$\frac{3}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{12}{12}$

3.

ნიშანი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
სიხშირე	0	0	0	0	3	7	4	3	6	5
დაგროვილი სიხშირე	0	0	0	0	3	10	14	17	23	28
ფარდობითი სიხშირე	0	0	0	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$
ფარდობითი სიხშირე	0	0	0	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{14}{28}$	$\frac{17}{28}$	$\frac{23}{28}$	$\frac{28}{28}$
რანგი	-	-	-	-	2	7	12,5	3	20,5	26

4. ქორწინებაში მყოფი (A) — 35 ადამიანი  
 ახალდაქორწინებული (B) — 40 ადამიანი  
 განქორწინებული (C) — 15 ადამიანი  
 ქვრივი (D) — 10 ადამიანი.

A	35	$\frac{35}{100}$	35
B	40	$\frac{40}{100}$	75
C	15	$\frac{15}{100}$	90
D	10	$\frac{10}{100}$	100



5. ბ) 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4

0-ის რანგია  $\frac{1+2}{2} = 1,5$ ;

2-ის რანგია  $\frac{7+8+9+10+11}{5} = 9$ ;

1-ის რანგია  $\frac{3+4+5+6}{4} = 4,5$ ;

3-ის რანგია  $\frac{12+13+14}{3} = 13$ ;

4-ის რანგია 15. მოდა არის 2. საშუალო =  $\frac{4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4}{15} = \frac{27}{15} = 1,8$ .

7.

ვარიანტი	3	5	7	15	21
სიხშირე	3	1	8	1	5
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$
დაგროვილი სიხშირე	3	4	12	13	18
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{18}{18}$

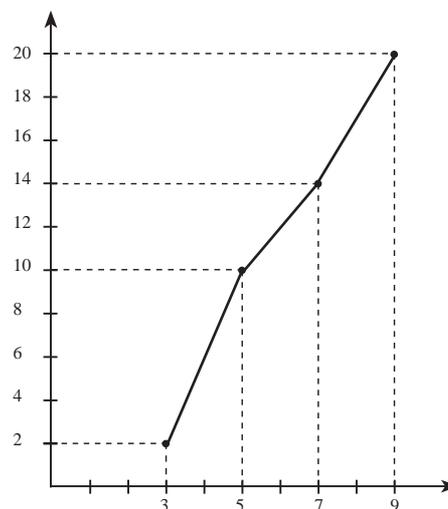
## 8. ოზიზა

ამოხსნები, მითითებები:

2.

ინტერვალი	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე	დაგროვილი სიხშირე	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე
[1-3)	2	$\frac{2}{20}$	2	$\frac{2}{20}$
[3-5)	7	$\frac{7}{20}$	9	$\frac{9}{20}$
[5-7)	5	$\frac{5}{20}$	14	$\frac{14}{20}$
[7-9]	6	$\frac{6}{20}$	20	$\frac{20}{20} = 1$

ოგივას ასაგებად ვიღებთ წერტილებს (ინტერვალის ზედა საზღვარი; შესაბამისი დაგროვილი სიხშირე). ასეთი წერტილებია: (3;3); (5;9); (7;14); (9;20).



ამოცანები **3, 4, 5** (იხილეთ ამოცანა 2).

## 9. ცენტრალური ტენდენციის საზომები

ამოსხნები, მითითებები:

1.  $c=d=11$ ;  $d-a=8 \Rightarrow a=3$ ;  $a+b+c=16 \Rightarrow a=2$ .

2.  $b=11 \quad \begin{cases} c - a = 10 \\ a + c + 11 = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c - a = 10 \\ c + a = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 13 \\ a = 3 \end{cases}$

პასუხი:  $a=3$ .

ინტერვალი	შუანერტილი ( $x_i$ )	სიხშირე $n_i$	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
[2;5)	3,5	8	28	98
[5;8)	6,5	6	39	253,5
[8;11)	9,5	4	38	361
[11;14]	12,5	2	25	312,5
ჯამი		20	130	102,5

4.  $\bar{x} = \frac{130}{20} = 6,5$ .

5.  $S^2 = \frac{1}{19}(1025 - 20 \cdot 6,5^2) \approx 9,474$ .

6. სტანდარტული გადახრაა  $\sqrt{S^2} = \sqrt{9,474} \approx 3$ .

### VII თავის დამატებითი საპრობლემები

2. ა)  $A_x^2 \cdot C_x^{x-2} = 72 \Rightarrow \frac{x!}{(x-2)!} \cdot \frac{x!}{2!(x-2)!} = 72 \Rightarrow \left(\frac{x!}{(x-2)!}\right)^2 = 144 \Rightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = 12 \Rightarrow x(x-1) = 12 \Rightarrow x=4$ .

ბ)  $C_{x+1}^{x-2} + 2 \cdot C_x^3 = 7(x-1) \Rightarrow \frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} + 2 \frac{(x-1)!}{(x-4)!3!} = 7(x-1) \Rightarrow x(x+1)+2(x-3)(x-2)=42 \Rightarrow x^2-3x-10=0 \Rightarrow x=5$ .

გ)  $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x \Rightarrow \frac{x!}{(x-3)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} = 14x \Rightarrow (x-2)(x-1) + \frac{x-1}{2} = 14 \Rightarrow 2x^2-5x-15=0 \Rightarrow x=5$ .

დ)  $\frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336 \Rightarrow \frac{x!}{(x-5)!} = 336 \cdot \frac{(x-2)!}{3!(x-5)!} \Rightarrow (x-2)!(x-1)! \cdot x = 56 \cdot (x-2)! \Rightarrow x^2-x-56=0 \Rightarrow x=3$ .

3)  $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2 = \frac{(n+k)!}{(n+k-2)!2!} + \frac{(n+k+1)!}{(n+k-1)!2!} = \frac{(n+k)!}{2} \cdot \left(\frac{1}{(n+k-2)!} + \frac{n+k+1}{(n+k-1)!}\right) = \frac{(n+k)!}{2} \cdot \frac{n+k-1+n+k+1}{(n+k-1)!} = \frac{(n+k)!}{2} \cdot \frac{2(n+k)}{(n+k-1)! \cdot (n+k)} = \frac{(n+k)!(n+k)^2}{(n+k)!} = (n+k)^2$ .

4.  $\begin{cases} C_{16}^3 15^3 (2x)^3 < C_{16}^4 \cdot 5^{12} (2x)^4 \\ C_{16}^3 15^3 (2x)^3 < C_{16}^2 \cdot 5^{14} (2x)^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{16!}{3!13!} \cdot 15 > 2x \frac{16!}{12!4!} \\ \frac{16!}{3!13!} \cdot 2x > \frac{16!}{14!2!} 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{30}{13} \\ x > \frac{45}{28} \end{cases} \quad x \in \left(\frac{15}{28}, \frac{30}{13}\right)$

5. მეოთხე წევრია  $C_n^4(\sqrt[3]{x})^{n-4} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4$ , ე.ი.  $(x^{\frac{1}{3}})^{n-4} \cdot x^{-4} = x^{\frac{n-4}{3}-4}$ , 3-ის ხარისხი 0-ია.

$$\frac{n-4-12}{3} = 0, n = 15. A_{16}^2 = \frac{16!}{14!} = 15 \cdot 16 = 230.$$

6.  $C_{10}^3 + C_{10}^4 + \dots + C_{10}^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \dots + C_{10}^{10} - C_{10}^0 - C_{10}^1 - C_{10}^2 = 2^{10} - 1 - \frac{10!}{8!2!} = 2^{10} - 1 - 10 - 45 = 2^{10} - 56.$

7. ქულათა ჯამს — 18 გვაძლევს წყვილი  $9+9=18$ . ე.ი. გვაქვს 1-დან 9-მდე რიცხვებისათვის ჩათვლით. ორელემენტისანი ქვესიმრავლეების რაოდენობა  $C_9^2 = \frac{9!}{2!7!} = 36.$

9. ოთხნიშნა რიცხვის ბოლო ციფრი უნდა იყოს 5 ან 0. უნდა განვიხილოთ ცალ-ცალკე ა) ბოლოში 0-ია; ბ) ბოლოში 5-ია. თუ ბოლოში არის 0, მაშინ პირველ ადგილზე გვაქვს 5 ვარიანტი; მეორეზე — 4; მესამეზე — 3, ე.ი. ასეთი რიცხვებს რაოდენობაა  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ . თუ ბოლოში არის 5, მაშინ პირველ ადგილზე 0-იც ვერ იქნება და მივიღებთ:  $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ . სულ 108.

პასუხი: 108.

10. ყველა შესაძლო განლაგებათა რიცხვია  $p_{30} = 30!$ . ახლა ვნახოთ, რამდენი განლაგებაა, როცა პირველი და მეორე ტომი ერთადაა. წარმოვიდგინოთ პირველი და მეორე ტომი ერთ წიგნად. მივიღებთ:  $2 \cdot p_{29}$  (ორზე მრავლდება იმიტომ, რომ სხვადასხვაა შეერთება I, II და II, I) საბოლოო პასუხია:  $p_{30} - 2p_{29} = 30! - 2 \cdot 29! = 29! \cdot 28.$

11.  $2 \cdot p_9 = 2 \cdot 9!$  (იხილეთ ამოცანა 10).

12. ორი ფიქსირებული ავტორი წერს 3-3 თავს. აქ არის ვარიანტების რაოდენობა  $A_{10}^3$ , დარჩა 10 თავი. 4 ფიქსირებული ავტორი წერს 2-2 თავს. თავების დაჯგუფების ვარიანტებია  $A_{10}^2$  მაგრამ ეს რაოდენობა უნდა განაწილდეს 4 ავტორზე. აქ გადანაცვლებათა რაოდენობაა  $A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 90$ , დარჩა 2 თავი. 2 კაცზე აქ 2 ვარიანტია.

სულ  $A_{16}^3 + 90(89 + 88 + 87) + 2 \cdot \frac{16!}{13!} = 14 \cdot 15(6+90 \cdot 3 \cdot 88+2).$

13. ერთსიმბოლოთი შედგენილი ასო იქნება 2. ორი სიმბოლოთი შედგენილი იქნება  $2^2$ , სამი სიმბოლოთი —  $2^3$ . სულ 14.

14.  $\frac{18!}{3!5!10!}.$

15. ყველა შესაძლო წყვილთა რაოდენობაა  $C_{10}^2$ , 1-დან 10-მდე არის 5 ლუნი და 5 კენტი რიცხვი. გვინდა ორივე ლუნი.  $\left. \begin{array}{l} \text{ორივე ლუნია } C_5^2 \\ \text{ორივე კენტია } C_5^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ჯამი ლუნია } 2 \cdot C_5^2.$

ალბათობა იქნება  $\frac{2 \cdot C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2 \cdot 5!8!2!}{3!2!10!} = \frac{2 \cdot 3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8!}{3!8! \cdot 9 \cdot 10} = \frac{4}{9}.$

16. შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვია  $\frac{10!}{2!3!}$ . ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვია  $\frac{6!}{10!}$ . ალბათობა იქნება  $\frac{6!}{10!} \cdot \frac{2!3!}{10!} = \frac{72}{(10!)^2}.$

17. არც ერთი არ არის „გულის ქალი“. ალბათობა იქნება  $\frac{51}{52} \cdot \frac{51}{52}$ . ალბათობა იმისა, რომ ერთი მაინც არის „გულის ქალი“, იქნება  $1 - \frac{51}{52^2} = \frac{103}{52^2}.$

18. ა)  $\frac{25}{81}$ ; ბ)  $\frac{16}{81}$ ; გ)  $1 - \left(\frac{25}{81} + \frac{16}{81}\right) = \frac{40}{81}.$

19. 50-ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რიცხვია  $C_{200}^{50}$ . მათ შორის ისეთი, რომელშიც არც ერთი არ არის მომგებიანი იქნება  $C_{180}^{50}$ . ალბათობა იმისა, რომ არც ერთი არ არის მომგებიანი, იქნება  $\frac{C_{180}^{50}}{C_{200}^{50}}$ . ერთი მაინც მომგებიანია, ალბათობა  $1 - \frac{C_{180}^{50}}{C_{200}^{50}}$ .

20. ვთქვათ ამ წევრის ნომერია  $n$ . მაშინ ეს წევრი იანება  $C_{20}^{n-1} (\sqrt{x})^{20-(n-1)} (4\sqrt{x})^{n-1}$ , საიდანაც მივიღებთ, რომ  $x^{\frac{21-n}{2}} \cdot x^{\frac{n-1}{4}} = x^7 \Rightarrow 41-n=28 \Rightarrow n=13$ .

21.  $C_{44}^{19} \cdot 4\sqrt{x}^{19} = C_{44}^{20} \cdot 4\sqrt{x}^{20}$ .  $\frac{44!}{19!25!} = \frac{44!}{20!24!} 4\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{1}{20} 4\sqrt{x} \Rightarrow 4\sqrt{x} = \frac{4}{5} \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^4$ .

22. პირობის თანახმად,  $C_{3n}^0 + C_{3n}^1 + \dots + C_{3n}^{3n} = 64 = 2^4 \Rightarrow n = 5$ , ე.ი.

$(10-x)^{16-k} \cdot \left(\frac{1}{10x^2}\right)^{k-1} = 10^{16-k-k+1} \cdot x^{16-k} (x^{-2})^{k-1} = 10^{17-2k} \cdot x^{16-k-2k+2}$ , საიდანაც მივიღებთ  $18-3k=0$  ( $x$ -ის კოეფიციენტი უნდა იყოს 0).  $k=6$ .

23. ა) ბოლო ციფრის ამორჩევის 2 ვარიანტია. ე.ი. პირველისთვის დარჩა 4 და ა.შ. პასუხია; 48.  
ბ) პასუხია:  $2 \cdot 5^3$ .

24. ვთქვათ ბოლო ციფრია 0, მაშინ (რიცხვი რომ იყოფოდეს 4-ზე, ბოლო ციფრით შედგენილი რიცხვი უნდა იყოფოდეს 4-ზე) ბოლო ორ ადგილზე შეიძლება იყოს 2 ან 4. სულ 2 ვარიანტი. რადგან ბოლო ციფრი ფიქსირებულია, დარჩენილი სამი ადგილისთვის გვექნება:

ა)  $\begin{matrix} 4 & 3 & 2 & \textcircled{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$       ბ)  $\begin{matrix} 5 & 6 & 2 & \textcircled{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$ .

ა) რადგან ციფრები არ შეიძლება მოცემული 6 ციფრიდან (2 უკვე ჩავწერეთ), დარჩა 4, ანუ პირველ ადგილზე გვაქვს 4, მეორე თუ 3 შემთხვევა ვარიანტების რაოდენობაა 24. ბ) პირველ ადგილზე ვერ იქნება 0. ე.ი. იქ გვაქვს 5 ვარიანტი, მეორეზე 6. სულ 60 ვარიანტი. ვთქვათ ბოლოში 2-ია, მაშინ წინა ციფრი კენტია, ე.ი. გვაქვს 3 შემთხვევა. ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

ა)  $\begin{matrix} 3 & 3 & 3 & \textcircled{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$       ბ)  $\begin{matrix} 5 & 6 & 3 & \textcircled{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$ .

ა)  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ ;      ბ)  $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ .

თუ ბოლოში 4-ია, ბოლოს წინა ციფრისთვის გვაქვს ორი შემთხვევა. . . 041 ან ..2411.

I. ა)  $\begin{matrix} 4 & 3 & \textcircled{0} & \textcircled{4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$  შემთხვევების რაოდენობაა 12.

ბ)  $\begin{matrix} 6 & 6 & \textcircled{2} & \textcircled{4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$  36 შემთხვევა.

II. ა)  $\begin{matrix} 3 & 3 & \textcircled{2} & \textcircled{4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$  9 შემთხვევა.      ბ)  $\begin{matrix} 5 & 6 & \textcircled{2} & \textcircled{4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$  30 შემთხვევა.

ა)  $24+27+12+9=72$ ; ბ)  $60+90+66+30=244$ .

დამხმარე ლიტერატურა:

1. ა. ბენდუქიძე - მათემატიკა, ხეროიზული და ხახალიხო "ნაკადული", თბილისი, 1988 წ.
2. ა. ბენდუქიძე - მათემატიკური ნარკვევები, "ლეჯი", 1995 წ.
4. ჯ. კაკნაძე - აზრის უაჭვია. "ინტელექტი". თბილისში, 2001 წ.
5. მ. კობალეიშვილი - მოგზაურობა რიცხვთა სამყაროში. ტანათლება. 1989 წ.
6. თ. ებანთიძე - ნერილება. ქართულ მათემატიკოსებზე. "მეცნიერება". 1981 წ.
7. Энциклопедия-математический словарь одного математика, Издательство "Педагогика", 1985 г.
8. М. Герднер. Математическая досуги.
9. С.В. Фомин. Системы счисления.
10. <http://google.com> - golden section; [www.solarviews.com](http://www.solarviews.com); [www.project.ox.ac.uk](http://www.project.ox.ac.uk); <http://primes.utm.edu>; <http://olympiads.win.tue.nl>; [www.problems.ru](http://www.problems.ru); [www.olympiads.ru](http://www.olympiads.ru); [www.znba.ru](http://www.znba.ru); [www.mathmedias.ru](http://www.mathmedias.ru)