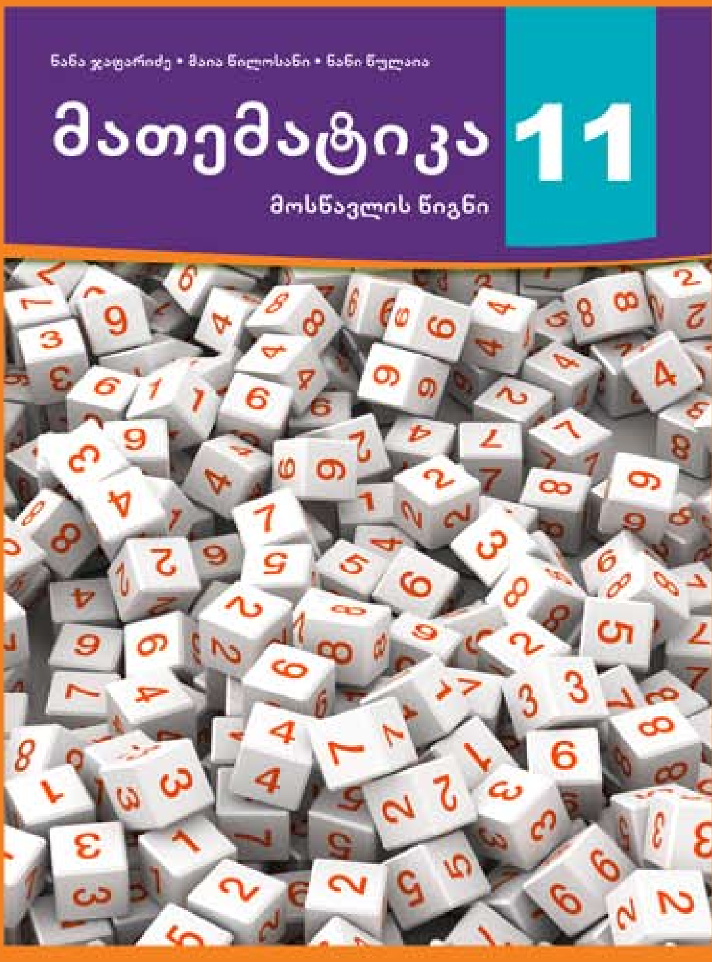
ნანა ჯაფარიძე • მაია წილოსანი • ნანი წულაია

მასწავლებლის წიგნი



ნანა ჯაფარიძე • მაია წილოსანი • ნანი წულაია

მათემატიკა 11

მასწავლებლის წიგნი

ბაკურ სულაკაურის
გამომცემლობა

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

XI კლასში მათემატიკის საგნის სწავლების ძირითადი მიზანია მოზარდში კვლევის ჩვევის, აგრეთვე ანალიტიკური, ლოგიკური, სისტემური და სიმბოლური აზროვნების გამომუშავება. მათემატიკის სწავლამ მოსწავლეს უნდა შესძინოს ის უნარ-ჩვევები, რომელიც მას დაეხმარება ცხოვრებისეული, პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრაში.

ეროვნული სასწავლო გეგმის დანიშნულებაა დაეხმაროს სასკოლო განათლების პროცესის მონაწილეებს ამ პროცესის დაგეგმვასა და წარმართვაში.

ეროვნულ სასწავლო გეგმაში აღწერილია ის სავალდებულო მოთხოვნები, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ყველა მოსწავლე სასწავლო წლის დასრულების მერე. ეს მოთხოვნები თითოეული მიმართულებისათვის შედეგებისა და მათი ინდიკატორების ენაზეა ჩამოყალიბებული.

შედეგი არის დებულება იმის შესახებ, თუ რა უნდა შესძლოს მოსწავლემ სწავლის მოცემული საფეხურის დასრულების შემდეგ.

ინდიკატორი არის დებულება იმ ცოდნისა და უნარ-ჩვევების დემონსტრირების შესახებ, რომელიც ჩამოყალიბებულია შესაბამის შედეგში. ინდიკატორის ძირითადი დანიშნულებაა იმის წარმოჩენა, მიღწეულია თუ არა შედეგი. ინდიკატორი ორიენტირებულია უნარ-ჩვევებზე და ჩამოყალიბებულია აქტივობის ენაზე.

XI კლასის წარმოდგენილი სახელმძღვანელოს დანიშნულებაა ხელი შეუწყოს ეროვნული სასწავლო გეგმით გათვალისწინებული უნარ-ჩვევების გამომუშავებას.

სახელმძღვანელო ფარავს სტანდარტის ყველა შედეგს.

მასალის მიწოდების ძირითადი მეთოდური ორიენტირია პრობლემური თხრობა. მოსწავლე არის გაკვეთილის ახსნის აქტიური მონაწილე.

გაგაცნობთ წიგნის სტრუქტურას.

თითქმის ყველა პარაგრაფი იწყება სიტუაციური ამოცანით, მაპროვოცირებელი შეკითხვით ან ისეთი ამოცანით, რომელიც მოსწავლისაგან კვლევას მოითხოვს და რომელიც იძლევა ვარაუდის გამოთქმის საშუალებას. გაკვეთილის ეტაპები გამოყოფილია აქტივობებით, რითაც ხდება ახალი მასალის ათვისების შემოწმება და გაღრმავება. ვარსკვლავით მონიშნულია ამოცანები მაღალი შეფასებისათვის.

მასწავლებლის სარეკომენდაციო წიგნში მოცემულია რამოდენიმე გაკვეთილის სცენარი, აქტივობების მიზანი, დანიშნულება, სავარაუდო და სწორი პასუხები, საკონტროლოს ნიმუშები. მოცემულია შეფასების ძირითადი მდგენელები, დამხმარე ლიტერატურა მასწავლებლისათვის.

აგრეთვე გთავაზობთ სავარაუდო საათობრივ განაწილებას. სარეზერვო საათები გვაძლევს საშუალებას, რომ ზოგიერთ გაკვეთილს მასწავლებელმა მეტი დრო დაუთმოს, გამოიყენოს თავის შეხედულებისამებრ.

ეროვნული სასწავლო გეგმა

წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები მიმართულებების მიხედვით:

რიცხვები და მოქმედებები	კანონზომიერებები და ალგებრა	გეომეტრია და სივრცის აღქმა	მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა
XI.1. მოსწავლეს შეუძლია რიცხვთა პოზიციური სისტემების/ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების ერთმანეთთან დაკავშირება. **XI.2**.მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება. **XI.3.** მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხების გამოყენება **XI.4.** მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა.	**XI.5.** მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება რეალური ვითარების მოდელირებისას. **XI.6.** მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად. **XI.7.** მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ცნებებისა და აპარატის გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.	**XI.8.** მოსწავლეს შეუძლია ვექტორებზე ოპერაციების შესრულება და მათი გამოყენება გეომეტრიული და საბუნებისმეტყველო პრობლემების გადაჭრისას. **XI.9.** მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად. **XI.10.** მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას. **XI.11.** მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად.	**XI.12.** მოსწავლეს შეუძლია დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო მონაცემების მოპოვება. **XI.13.** მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია. **XI.14.** მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა. **XI.15.** მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.

წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები

მიმართულება: რიცხვები და მოქმედებები

XI.1. მოსწავლეს შეუძლია რიცხვთა პოზიციური სისტემების/ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების ერთმანეთთან დაკავშირება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- მოყავს ინფორმაციის ციფრული კოდირების/ტექნოლოგიების მაგალითები; აკავშირებს რიცხვის სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში ჩაწერას ერთმანეთთან (მაგალითად, *ორობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილ რიცხვს წერს ათობით პოზიციურ სისტემაში*);
- ახდენს ირაციონალური რიცხვის რაციონალური რიცხვების მიმდევრობით მიახლოების დემონსტრირებას პრაქტიკულ ამოცანებთან დაკავშირებული გამოთვლების კონტექსტში;
- მსჯელობს რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს შორის განსხვავებაზე მათი პოზიციური სისტემის გამოყენებით ჩაწერისას.

XI.2. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება.

- შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე: ამარტივებს ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების (მათ შორის ხარისხისა და ლოგარითმის) შემცველ გამოსახულებას ან პოულობს მის მნიშვნელობას მოქმედებათა თვისებების, თანმიმდევრობისა და მათ შორის კავშირის გამოყენებით;
- პოულობს არითმეტიკული მოქმედების შედეგს დასახელებული სიზუსტით; მსჯელობს შედეგის ცვლილებაზე და ცდომილებაზე, რომელიც გამოწვეულია გამოსახულების წევრების დამრგვალებით;
- იყენებს შეფასების სხვადასხვა ხერხს ნამდვილ რიცხვებზე შესრულებული გამოთვლების (მათ შორის ფესვი და ლოგარითმი მარტივ შემთხვევებში) შედეგის ადეკვატურობის შესამოწმებლად;
- ახდენს უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე სიდიდეების, მათზე მოქმედებებისა და მოქმედებათა შედეგის ინტერპრეტაციას, მიმდევრობის ან რომელიმე პროცესის ამსახველი ფუნქციის კონტექსტში.

XI.3. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხების გამოყენება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდს ამოცანების ამოხსნისას ან რიცხვების შესახებ მარტივი დებულებების დამტკიცებისას (მაგალითად, *საწინააღმდეგოს დაშვებით ამტკიცებს რომელიმე რიცხვის ირაციონალურობას*);
- აყალიბებს და გამოსახავს რიცხვების თვისებების ან რიცხვითი კანონზომიერებების შესახებ გამონათქვამებს შორის კერძო/ზოგადი ტიპის მიმართებებს, იყენებს გამოსახვის ხერხს გამოთქმული მოსაზრების მართებულობის შემოწმებისას/დასაბუთებისას;
- რაოდენობებთან და სიდიდეებთან დაკავშირებული მსჯელობის ნიმუშზე ახდენს მსჯელობის ხაზის და დასკვნითი ნაწილის ანალიზს, აღნიშნავს მის სუსტ და ძლიერ მხარეებს.

XI.4. მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა.
შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს რიცხვის ხარისხსა და ლოგარითმს, ხარისხისა და ლოგარითმის თვისებებს პრაქტიკული საქმიანობიდან ან მეცნიერების სხვადასხვა დარგებიდან მომდირე ამოცანების ამოხსნისას (მაგალითად, *ენტროპია ბიოლოგიასა და ფიზიკაში, რადიოაქტიული დაშლა და დათარიღების მეთოდები*);
- განსაზღვრავს და იყენებს შესაფერის ერთეულებს სიდიდის ცვლილების სიჩქარის აღსაწერად; ადგენს სხვადასხვა ერთეულებს შორის თანაფარდობას.

მიმართულება: კანონზომიერებები და ალგებრა

XI.5 მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება რეალური ვითარების მოდელირებისას.
შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს (ტრიგონომეტრიულ, უბან-უბან წრფივ, საფეხურებრივ, მაჩვენებლიან, ლოგარითმულ) ფუნქციებს და მათ თვისებებს რეალური პროცესების მოდელირებისას;
- ახდენს ფუნქციის ნულების, ფუნქციის მაქსიმუმის/მინიმუმის ინტერპრეტირებას იმ რეალური პროცესის/ვითარების კონტექსტში, რომელიც ამ ფუნქციით აღიწერება;
- იყენებს სიბრტყეზე წრფივი ოპტიმიზაციის მეთოდებს რეალურ ვითარებასთან დაკავშირებულ ამოცანებში (მაგალითად, *შეზღუდული რესურსების ეფექტიანად გამოყენების ამოცანებში*) წრფივის ფუნქციის მაქსიმუმის/მინიმუმის მოძებნისას.

XI.6 მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს ფუნქციის გრაფიკის გეომეტრიულ ნიშნებს (მაგალითად, *საკოორდინატო ღერძის პარალელური წრფის მიმართ სიმეტრიულობა, კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრულად სიმეტრიულობა, პარალელური გადატანის მიმართ ინვარიანტულობა*) ფუნქციის თვისებების დასადგენად;
- იყენებს შესაფერის გრაფიკულ, ალგებრულ მეთოდებს ან ტექნოლოგიებს (ტრიგონომეტრიული, უბან-უბან წრფივი, საფეხურებრივი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული) ფუნქციის ისეთი თვისებების დასადგენად, როგორიცაა: ზრდადობა/კლებადობა, ნიშანმუდმივობა, პერიოდულობა/პერიოდი, ფესვები, ექსტრემუმები;
- აღწერს თუ რა გავლენას ახდენს ფუნქციის პარამეტრების ცვლილება ფუნქციის გრაფიკზე.

XI.7 მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ცნებებისა და აპარატის გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.
შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ასახელებს ისეთ სტრუქტურებს (მაგალითად, *მიმდევრობებს, ასახვებს; მათ შორის რეალურ ვითარებაში*), რომელთა აღწერისას შესაძლებელია რეკურენტული წესის გამოყენება; იყენებს რეკურენტულ წესს ასეთი სტრუქტურის აღსაწერად;
- დებულებების დამტკიცებისას, შესაბამის შემთხვევებში, იყენებს მათემატიკურ ინდუქციას (მათ შორის არითმეტიკულ/გეომეტრიულ პროგრესიასთან დაკავშირებული ზოგიერთი ფორმულის მისაღებად);
- იყენებს ხისებრ დიაგრამებს და გრაფებს ვარიანტების დასათვლელად, გეგმის/განრიგის შესადგენად, ოპტიმიზაციის დისკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად.

მიმართულება: გეომეტრია და სივრცის აღქმა

XI.8 მოსწავლეს შეუძლია ვექტორებზე ოპერაციების შესრულება და მათი გამოყენება გეომეტრიული და საბუნებისმეტყველო პრობლემების გადაჭრისას.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ახდენს ვექტორის სიგრძისა და მიმართულების, ვექტორებზე მოქმედებების (შეკრება, სკალარზე გამრავლება, სკალარული ნამრავლი) და მათი თვისებების გეომეტრიულ და ფიზიკურ ინტერპრეტაციას;
- იყენებს ვექტორებს გეომეტრიული დებულებების დასამტკიცებლად და ზომების დასადგენად სიბრტყეზე;
- იყენებს კოორდინატებს ვექტორებისა და ვექტორებზე ოპერაციების გამოსახვისას.

XI.9 მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- პოულობს ლოგიკურ კავშირებს (მაგალითად, *გამომდინარეობა*) მოცემულ გეომეტრიულ დებულებებს შორის; იყენებს დედუქციურ და ინდუქციურ მსჯელობას;
- განაზოგადებს ცალკეულ გეომეტრიულ დებულებებს; აყალიბებს ჰიპოთეზას და ასაბუთებს/უარყოფს მას (მათ შორის მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით; *მაგალითად, ეილერის ფორმულა სიბრტყეზე და სივრცეში*);
- მსჯელობს ევკლიდური გეომეტრიის აქსიომატიკის არაწინააღმდეგობრიობის შესახებ;
- იყენებს ალგებრულ გარდაქმნებს გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.

XI.10 მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ასახელებს გეომეტრიული ფიგურის იმ მახასიათებლებს, რომლებიც არ იცვლება მოცემული გეომეტრიული გარდაქმნისას (გარდაქმნის ინვარიანტებს);
- ფიგურების შესახებ სხვადასხვა მონაცემების (მაგალითად, *ფიგურათა ზომები, ფიგურათა წვეროების კოორდინატები, ფიგურათა ელემენტებს შორის ალგებრული თანაფარდობები*) გამოყენებით ასაბუთებს ან უარყოფს ორი გეომეტრიული ფიგურის ეკვივალენტობას მოცემული გარდაქმნის ან გარდაქმნის ტიპის მიმართ.

XI.11 მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- მსჯელობს სივრცული ფიგურის კვეთის შესაძლო ფორმაზე და აგებს სივრცული ფიგურის მითითებულ კვეთას;
- პოულობს ფიგურის გეგმილს მითითებული პარალელური დაგეგმილებისას;
- მსჯელობს სივრცული ფიგურის შესაძლო ფორმაზე მისი კვეთის/კვეთების მიხედვით;
- მსჯელობს ფიგურის შესაძლო ფორმაზე მისი ანასახის მიხედვით პარალელური დაგეგმილებისას.

მიმართულება: მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა

XI.12 მოსწავლეს შეუძლია დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო მონაცემების მოპოვება.
შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ირჩევს და იყენებს მონაცემთა შეგროვების შესაფერის საშუალებას (დაკვირვება, გაზომვა, მითითებულ რესპონდენტთა ჯგუფის გამოკითხვა მზა ანკეტით/კითხვარით, მონაცემთა მოპოვება მონაცემთა სხვადასხვა წყაროებიდან), ასაბუთებს თავის არჩევანს;
- განსაზღვრავს რესპონდენტებს, ირჩევს კითხვების დასმის შესაფერის ფორმას (ღია კითხვები, დახურული კითხვები, უჯრედის მონიშვნა, შკალაზე მონიშვნა), ქმნის მარტივ კითხვარს და იყენებს მას მონაცემთა შესაგროვებლად;
- წარმოადგენს საკითხის შესასწავლად შესაფერისი ექსპერიმენტის გეგმას, ატარებს ექსპერიმენტს და აგროვებს მონაცემებს.

XI.13 მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია.
შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ირჩევს მონაცემთა წარმოდგენის შესაფერის გრაფიკულ ფორმებს, ასაბუთებს თავის არჩევანს, აგებს და განმარტავს ცხრილებს/დიაგრამებს (მათ შორის ინტერვალთა კლასებად დაჯგუფებული მონაცემებისათვის);
- ადგენს სიხშირეთა განაწილებას, წარმოადგენს მას გრაფიკული ფორმით და აღწერს მას სიმეტრიულობის, მოდების რაოდენობის, გაშლილობის ან სხვა ნიშნების საშუალებით;
- ერთი გრაფიკული ფორმით წარმოდგენილ მონაცემებს წარმოადგენს განსხვავებული გრაფიკული ფორმით და წარმოაჩენს თითოეული ფორმის ხელსაყრელ და არახელსაყრელ მხარეებს;
- ამოიცნობს დიაგრამის მცდარ ინტერპრეტაციებს ან არაკორექტულად აგებულ/გაფორმებულ დიაგრამებს, განმარტავს და ასწორებს ნაკლს.

XI.14 მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა.
შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- აღწერს შემთხვევითი ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს, ითვლის დამოუკიდებელ ხდომილობათა ალბათობებს (მათ შორის ჯამის ალბათობის ფორმულების გამოყენებით);
- ითვლის რთულ ხდომილობათა ალბათობებს კომბინატორული ანალიზის გამოყენებით;
- შემთხვევითი ექსპერიმენტის ჩასატარებლად ერთ მოწყობილობას ცვლის მისი ეკვივალენტური სხვა მოწყობილობით და ასაბუთებს არჩევანს.

XI.15 მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.
შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ითვლის და იყენებს შემაჯამებელ რიცხვით მახასიათებლებს დაუჯგუფებელ მონაცემთა ერთობლიობების დასახასიათებლად/შესადარებლად და მოსაზრებათა/არგუმენტების შესაფასებლად;
- განსაზღვრავს მოდალურ კლასს და აფასებს საშუალოს, მედიანას და დიაპაზონს დაჯგუფებულ მონაცემთა სიმრავლისთვის, ითვალისწინებს მათ რეალურ ვითარებაში გადაწყვეტილების მიღებისას;
- გამოთქვამს ვარაუდს ხდომილობის მოსალოდნელობის შესახებ მონაცემთა საფუძველზე (მაგალითად, *ფარდობითი სიხშირის მიხედვით*) და ასაბუთებს ვარაუდის მართლზომიერებას.

შინაარსისა და მიზნების რუკა

შინაარსი	თემის კავშირი მიზნებთან და შედეგებთან	სავარაუდო ხანგრძლივობა
1	2	3
I თავი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები. დამოკიდებულება ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივება და იგივეობათა დამტკიცება. ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. დაყვანის ფორმულები. ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება. $y = a\sin(bx+c)$ ფუნქცია.	მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება რეალური ვითარების მოდელირებისას. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება. მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად.	34 სთ
საკონტროლო წერა №1		1 სთ
II თავი წრფეთა პარალელურობის ნიშანი. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა. სიბრტყეთა პარალელურობა. მოცანები კვეთების აგებაზე.	მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად. მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად. მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა.	16 სთ
საკონტროლო წერა №2		1 სთ

1	2	3
III თავი ხარისხი ირაციონალური მაჩვენე-ბლით. მაჩვენებლიანი ფუნქცია. ლოგარითმი. ლოგარითმის თვისებები. შექცეული ფუნქცია. ლოგარითმული ფუნქცია.6 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები. მაჩვენებლიანი განტოლება. ლოგარითმული განტოლება. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები. ნახევრადლოგორითმული ბადე.	მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება რეალური ვითარების მოდელირებისას. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება. მოსწავლეს შეუძლია რიცხვთა პოზიციური სისტემების/ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების ერთმანეთთან დაკავშირება. მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად.	32 სთ
საკონტროლო წერა №3		1 სთ
IV თავი ფიგურათა პარალელური დაგეგ-მილება. კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა მართობულობა. წრფისა და სიბრტყის მართობუ-ლობა. წრფისა და სიბრტყის მართობულო-ბის ნიშანი. პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილი. სამი მართობის თეორემა. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. ორწახნაგა კუთხე. მართობული სიბრტყეები. სიბრტყე-თა მართობულობის ნიშანი.	მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას. მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად.	26 სთ
საკონტროლო წერა №4		1 სთ

1	2	3
V თავი მიმდევრობა. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი. მიმდევრობის ზღვარი. ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ. უსასრულოდ კლებადი გეომე-ტრიულიპროგრესია.	მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხების გამოყენება მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება სხვადასხვა ხერხით და ამ მოქმედებათა შედეგის შეფასება. მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ცნებებისა და აპარატის გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.	20 სთ
საკონტროლო წერა №5		1 სთ
VI თავი ვექტორის კოორდინატები. ვექტორების შეკრება–გამოკლე-ბა. ვექტორის გამრავლება რიცხვზე, კოლინეარული ვექტორები. ორი ვექტორის სკალარული ნამ-რავლი. ბრუნვითი სხეულები, ცილინდრი. კონუსი. სფერო, ბირთვი.	მოსწავლეს შეუძლია ვექტორებზე ოპერაციების შესრულება და მათი გამოყენება გეომეტრიული და საბუნებისმეტყველო პრობლემების გადაჭრისას. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას. მოსწავლეს შეუძლია სივრცული ფიგურის კვეთებისა და გეგმილების გამოყენება სივრცული ფიგურის შესასწავლად. მოსწავლეს შეუძლია გრაფიკული, ალგებრული მეთოდებისა და ტექნოლოგიების გამოყენება ფუნქციის/ფუნქციათა ოჯახის თვისებების შესასწავლად.	14 სთ
საკონტროლო წერა №6		1 სთ
VII თავი კომბინატორული ამოცანები. გადანაცვლება, წყობა. ჯუფთება. წყობა განმეორებით. ამოვხსნათ ამოცანები ალბათო-ბათა თეორიიდან. გეომეტრიული ალბათობა. დაგროვილი სიხშირე. რანგი. ოგივა. ცენტრალური ტენდენციის საზომები.	მოსწავლეს შეუძლია დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო მონაცემების მოპოვება. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია. მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება. მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ცნებებისა და აპარატის გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.	21 სთ
საკონტროლო წერა №7		

მოსწავლის შეფასების სისტემა

მოსწავლის შეფასების მიზანი, პრინციპები და მიდგომები

1. მოსწავლის შეფასების მიზანია სწავლა-სწავლების ხარისხის მართვა, რაც გულისხმობს სწავლის ხარისხის გაუმჯობესებაზე ზრუნვასა და კონტროლს.
2. მოსწავლის აკადემიური მიღწევის შეფასება უნდა იყოს ხშირი და მრავალმხრივი; მან ხელი უნდა შეუწყოს: მოსწავლეთა მრავალმხრივ განვითარებას, მათი შესაძლებლობების გამოვლენას, სხვადასხვა პოტენციალის მქონე მოსწავლეთათვის თანაბარი პირობების შექმნას.
3. მოსწავლე უნდა შეფასდეს სხვადასხვა ფორმებით (ესსე, პროექტის მომზადება, ზეპირი გამოსვლა, ექსპერიმენტის ჩატარება, ცდის ჩატარება, წარმოდგენა, წერითი, ფერწერული ან სხვა ტიპის ნამუშევარი, არგუმენტირებული მსჯელობა და სხვ.).

განმსაზღვრელი და განმავითარებელი შეფასება

1. სკოლაში გამოიყენება ორი ტიპის შეფასება: განმსაზღვრელი და განმავითარებელი.
2. განმსაზღვრელი შეფასება აკონტროლებს სწავლის ხარისხს, ადგენს მოსწავლის მიღწევის დონეს ეროვნული სასწავლო გეგმით განსაზღვრულ მიზნებთან მიმართებაში. განმსაზღვრელ შეფასებაში იწერება ქულა.
3. განმავითარებელი შეფასება აკონტროლებს თითოეული მოსწავლის განვითარების დინამიკას და ხელს უწყობს სწავლის ხარისხის გაუმჯობესებას. განმავითარებელი შეფასებისას გამოიყენება ისეთი საშუალებები, როგორიცაა სიტყვიერი კომენტარი, რჩევა-დარიგება, დაკვირვების ფურცელი, თვითშეფასებისა და ურთიერთშეფასების სქემა და სხვ.
4. განმავითარებელი და განმსაზღვრელი შეფასებების აღწერილობა

	განმავითარებელი	**განმსაზღვრელი**
მიზანი	სწავლის ხარისხის გაუმჯობესება; მოსწავლის განვითარების ხელშეწყობა	სწავლის ხარისხის გაკონტროლება; მოსწავლის მიღწევის დონის დადგენა ეროვნული სასწავლო გეგმით განსაზღვრულ მიზნებთან მიმართებაში; აკადემიური მოსწრების დონის განსაზღვრა
შეფასების საგანი	სწავლის პროცესი	სწავლის შედეგი
შეფასების შედეგად მიღებული გადაწყვეტილება	წინსვლის ხელშესაწყობად განსხვავებული აქტივობის შერჩევა, სწავლების სტრატეგიის შეცვლა, რჩევა-დარიგების მიცემა და სხვ.	მომდევნო ეტაპზე (კლასში/საფეხურზე) დაშვება/არდაშვება
წარმატების კრიტერიუმების განსაზღვრა	კონკრეტული მოსწავლის წინსვლის საფუძველზე (საკუთარ მიღწევებთან მიმართებით - რა დონეს ფლობდა, რა დონეს ფლობს)	იმის საფუძველზე, თუ რამდენად მიაღწია სტანდარტით განსაზღვრულ შედეგებს (ყველასათვის საერთო, სტანდარტით დადგენილ ნორმასთან მიმართებაში)
შეფასების საშუალებები	თვით/ურთიერთშეფასების რუბრიკა; კითხვარი; სიტყვიერი (ზეპირი/წერილობითი) კომენტარი; უნარის განვითარების დონის აღწერა.	ქულა

მოსწავლეთა აკადემიური მიღწევები ფასდება ათქულიანი სისტემით

ქულები	შეფასების დონეები
10	მაღალი
9	
8	საშუალოზე მაღალი
7	
6	საშუალო
5	
4	საშუალოზე დაბალი
3	
2	დაბალი
1	

საგნის სემესტრული ქულის შემადგენელი კომპონენტები

1. სემესტრის მანძილზე მოსწავლეები ფასდებიან შემდეგი სამი კომპონენტის მიხედვით:

   ა) საშინაო დავალება;

   ბ) საკლასო დავალება;

   გ) შემაჯამებელი დავალება.

2. შეფასების სამივე კომპონენტს ერთნაირი წონა აქვს.
3. საშინაო და საკლასო დავალებათა კომპონენტებში გამოიყენება როგორც განმსაზღვრელი, ასევე განმავითარებელი შეფასება.
4. შემაჯამებელი დავალების კომპონენტში აუცილებელია განმსაზღვრელი შეფასების გამოყენება.
5. ეროვნული სასწავლო გეგმა თითოეული საგნისათვის განსაზღვრავს სემესტრის განმავლობაში ჩასატარებელი შემაჯამებელი დავალებების სავალდებულო მინიმალურ რაოდენობას. ამ კომპონენტით შეფასებისას:

   ა) სტანდარტის მოთხოვნათა დასაკმაყოფილებლად, აუცილებელია შემაჯამებელი დავალების მრავალგვარი ფორმის გამოყენება (თხზულება, მოხსენება, რეფერატი, პროექტი, საველე-გასვლითი სამუშაო, ლაბორატორიული კვლევა, სახვითი და გამოყენებითი ხელოვნების ნიმუში და სხვ.);

   ბ) მოსწავლე ვალდებულია შეასრულოს კლასში ჩატარებული ყველა შემაჯამებელი დავალება (ეროვნული სასწავლო გეგმით დადგენილი სავალდებულო მინიმუმი და სკოლის მიერ დამატებით დადგენილი, ამ უკანასკნელის არსებობის შემთხვევაში);

   გ) თუ მოსწავლე არ შეასრულებს რომელიმე შემაჯამებელ სამუშაოს გაცდენის გამო, სკოლა ვალდებულია, მისცეს მას გაცდენილი შემაჯამებელი დავალებების აღდგენის საშუალება. შემაჯამებელი აღდგენითი სამუშაოს ვადები და მისი ჩატარების ფორმა განისაზღვრება სასკოლო სასწავლო გეგმით.

განმსაზღვრელი შეფასების ქულათა სახეობები

ზოგადსაგანმანათლებლო სისტემაში გამოიყენება განმსაზღვრელი შეფასების შემდეგი სახეობები:

ა) საგნის მიმდინარე და შემაჯამებელი ქულები – საშინაო, საკლასო და შემაჯამებელი კომპონენტის ქულები, რომლებსაც მოსწავლე იღებს სემესტრის განმავლობაში;

ბ) საგნის სემესტრული ქულა – საგანში მიღებული შეფასება თითოეულ სემესტრში (სემესტრული გამოცდის ჩაბარების შემთხვევაში, გამოითვლება მისი გათვალისწინებით);

გ) საგნის წლიური ქულა – სემესტრული ქულებიდან გამომდინარე შეფასება საგანში. წლიურ ქულაში შეიძლება წლიური გამოცდის ქულაც აისახოს, თუ ასეთი გამოცდა გათვალისწინებულია სასკოლო სასწავლო გეგმით და სკოლის მიერ განსაზღვრულია, რომ მას გავლენა ექნება საგნის წლიურ ქულაზე;
დ) საერთო წლიური ქულა – საგნების წლიური ქულებიდან გამომდინარე შეფასება;
ე) საფეხურის საერთო ქულა – ზოგადი განათლების რომელიმე საფეხურის (დაწყებითი, საბაზო, საშუალო) საერთო შეფასება.

ქულების გამოანგარიშების წესი

1. საგნის სემესტრული ქულის გამოანგარიშების წესი:
ა) მოსწავლის მიერ სემესტრის განმავლობაში სამივე კომპონენტში (საშინაო, საკლასო და შემაჯამებელი) მიღებული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს მიღებული ქულების რაოდენობაზე;
ბ) მიღებული ქულა უნდა დამრგვალდეს მთელის სიზუსტით (მაგ., 6.15 მრგვალდება 6-მდე, 7.49 მრგვალდება 7-მდე, 8.5 მრგვალდება 9-მდე);
გ) იმ შემთხვევაში, თუ მოსწავლეს არა აქვს შესრულებული ყველა შემაჯამებელი დავალება, მისი სემესტრული ქულის გამოსაანგარიშებლად სამივე კომპონენტში მიღებული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს მიღებული ქულებისა და შეუსრულებელი შემაჯამებელი დავალებების რაოდენობის ჯამზე.
2. საგნის წლიური ქულის გამოანგარიშების წესი:
ა) საგნის წლიური ქულის გამოსაანგარიშებლად საგნის სემესტრული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს ორზე;
ბ) საგნის წლიური ქულა მრგვალდება მთელის სიზუსტით (მაგ., 7.25 მრგვალდება 7-მდე, 4.49 მრგვალდება 4-მდე, 9.5 მრგვალდება 10-მდე);
გ) თუ სასკოლო სასწავლო გეგმა ითვალისწინებს წლიური გამოცდის ჩატარებას და განსაზღვრულია, რომ ამ გამოცდის ქულაც აისახება წლიურ ქულაზე, მაშინ საგნის წლიური ქულა სამი (ორი - საგნის სემესტრული და ერთი - გამოცდის) ქულის საშუალო არითმეტიკულია (დამრგვალებული მთელის სიზუსტით).
3. საერთო წლიური ქულის გამოანგარიშების წესი:
ა) საერთო წლიური ქულის გამოსაანგარიშებლად უნდა შეიკრიბოს ეროვნული სასწავლო გეგმით კონკრეტული კლასისთვის გათვალისწინებული ყველა სავალდებულო საგნის წლიური ქულა (საშუალო საფეხურზე, აგრეთვე, სასკოლო სასწავლო გეგმით განსაზღვრული არჩევითი საგნების ქულები სავალდებულო საგნების წლიურ ქულებთან ერთად) და ჯამი გაიყოს ქულების რაოდენობაზე;
ბ) საერთო წლიური ქულა მრგვალდება მეათედის სიზუსტით (მაგ., 7.14 მრგვალდება 7.1-მდე, 8.15 მრგვალდება 8.2-მდე).
4. საფეხურის საერთო ქულის გამოანგარიშების წესი:
ა) საფეხურის საერთო ქულა გამოითვლება იმავე პრინციპით, რომლითაც ითვლება საერთო წლიური ქულა: ჯამდება საფეხურის მანძილზე ნასწავლი ყველა საგნის წლიური ქულა (მაგ. მათემატიკა მე-10 კლასი, მათემატიკა მე-11 კლასი, მათემატიკა მე-12 კლასი, ქართული მე-10 კლასი, ქართული მე-11 კლასი, ქართული მე-12 კლასი და ა.შ.) და ჯამი იყოფა ქულების საერთო რაოდენობაზე;
ბ) საფეხურის საერთო ქულა მრგვალდება მეათედის სიზუსტით (მაგ., 6.43 მრგვალდება 6.4-მდე, 7.58 მრგვალდება 7.6-მდე).

გთავაზობთ რამდენიმე გაკვეთილის სანიმუშო სცენარს

I თავი.
6. დაყვანის ფორმულები

რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან დაყვანის ფორმულებს.

აქტივობის მიზანი:
მოსწავლეები ეცნობიან დაყვანის ფორმულებს სხვადასხვა ტრიგონონეტრიული ფუნქციებისათვის, უმუშავდებათ ამ ფორმულების გამოყენების უნარ-ჩვევები.
მოსწავლეები შეძლებენ ტრიგონომეტრიული წრეწირის დახმარებით თავად გამოიყვანონ ეს ფორმულები.
შესწავლილი მასალის საფუძველზე შეძლებენ მოცემული ტრიგონომეტრიული ფორმულები დაიყვანონ 0°-დან 90°-მდე კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებამდე და რიგ შემთხვევაში გამოითვალონ მათი მნიშვნელობები.

სავარაუდო ხანგრძლივობა - 1 სთ.

აქტივობის აღწერა:
1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც იწყებენ ფიქრს პარაგრაფის დასაწყისში, წყვილებისათვის განკუთვნილ დავალებაზე (10 წთ).
2) შემდეგ წყვილების მიერ ხდება მათი ნააზრევის პრეზენტაცია. მოსწავლეებისთვის თვალსაჩინოა ერთეულოვან წრეწირზე მიღებული სამკუთხედების ტოლობა, რის შედეგადაც ადვილად დაინახავენ, რომ $\sin 240°=-\sin 60°$ (5 წთ).
3) მასწავლებელი განმარტავს, თუ რას ეწოდება დაყვანის ფორმულები და კითხვა-პასუხის რეჟიმში, წიგნში მოცემული თვალსაჩინოების გამოყენებით, მოსწავლეებთან ერთად ამტკიცებს $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ და $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ ფორმულებს (10 წთ).
4) მეცადინეობა გრძელდება წყვილების, ან მცირერიცხოვანი ჯგუფების მუშაობით, მოსწავლეებს გამოყავთ სინუს და კოსინუს ფუნქციებისთვის დაყვანის ფორმულები, 5) აქტოვობის გაფართოება-გაღრმავების მიზნით ვიხილავთ პარაგრაფში გარჩეულ მაგალითებს (5 წთ);
5) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

II თავი.
3. სიბრტყეთა მართობულობა

რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან სიბრტყეთა პარალელობას, სიბრტყეთა პარალელობის ნიშანს, პარალელური სიბრტყეების მესამე სიბრტყით კვეთისას მიღებული წრფეებისა და მონაკვეთების თვისებებს.

აქტივობის მიზანი:
მოსწავლეები ეცნობიან პარალელური სიბრტყეების თვისებებს და ნიშნებს, იძენენ მიღებული ცოდნის გამოყენების უნარ-ჩვევებს.
მოსწავლეები შეძლებენ, ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით, ამოიცნონ პარალელური სიბრტყეები, ამოარჩიონ ამ სიბრტყეების მესამე სიბრტყით კვეთისას მიღებული პარალელური წრფეები და ტოლი მონაკვეთები;

სავარაუდო ხანგრძლივობა -1 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:
1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც მასწავლებელი განმარტავს პარალელურ სიბრტყეებს, და თხოვს მოსწავლეებს დაასახელონ პარალელურ სიბრტყეთა წყვილები: საკლასო ოთახის მაგალითზე, მათ გარშემო მდე ბარე საგნების მაგალითზე (5 წთ)
2) შემდეგ მასწავლებელიკითხვა-პასუხის რეჟიმში ახსენებს მოსწავლეებს რას წარმოადგენს რაიმე ფაქტის ნიშანი, საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი და ამტკიცებს სიბრტყეთა პარალელობის ნიშანს (10 წთ);
3) შემდეგ წყვილები მუშაობენ პარაგრაფში მათთვის განკუთვნილ დავალებაზე და ახდენენ ნამუშევრის პრეზენტაციას (5 წთ);
4) მასწავლებელი აყალიბებს პარალელური სიბრტყეების მესამე სიბრტყით კვეთისას მიღებული წრფეების და მონაკვეთების თვისებებს და ამტკიცებს მათ მოსწავლეებთან აქტიური თანამშრომლობის რეჟიმში (10 წთ).
5) გაკვეთილი გრძელდება წყვილებში ან მცირერიცხოვან ჯგუებში მუშაობით. მოსწავლეები ასრულებენ წიგნში წყვილებისთვის განკუთვნილ მეორე დავალებას და ახდენენ ნამუშევრის პრეზენტაციას (10წთ).
6) აქტივობის გაფართოება- გაღრმავების მიზნით ვიხილავთ პარაგრაფში გარჩეულ ამოცანას, მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

III თავი.
6. ლოგარითმული ფუნქცია

რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან ლოგარითმულ ფუნქციას, მის გრაფიკს, ფუნქციის თვისებებს.

აქტივობის მიზანი:
მოსწავლეები ეცნობიან ლოგარითმულ ფუნქციას, ფუნქციის თვისებებს, დაეუფლებიან ამ თვისებების გამოყენების უნარ-ჩვევებს პრობლემის გადასაჭრელად.
მოსწავლეები შეძლებენ ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით გამოიყენონ ლოგარითმული ფუნქციის ესა თუ ის თვისება.
შესწავლილი მასალის საფუძველზე შეძლებენ დაადგინონ $\log_a b-1$ -ის ნიშანი, შეადარონ ერთმანეთს ტოლფუძიანი ლოგარითმები.

სავარაუდო ხანგრძლივობა - 1სთ;

აქტოვობის აღწერა:
1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით,რის შემდეგაც მასწავლებელი ახსენებს, რომ $y=a^x$, $a>0$ და $a\neq 1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $y=\log_a x$ (10წთ).
2) შემდეგ ხაზავენ $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკებს ($a>1$ და $a\in(0;1)$ შემთხვევებისთვის) და $y=x$ წრფის მიმართ სიმეტრიით თითოეული შემთხვევისთვის აგებენ $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკებს (10 წთ);
3) შემდეგ კითხვა-პასუხის რეჟიმში აყალიბებენ ლოგარითმული ფუნქციის თვისებებს (10 წთ).
4) აქტოვობის გაფართოება-გაღრმავების მიზნით მასწავლებელი ავლებს მოსწავლეებს იფიირონ წიგნში მოცემულ, წყვილებისთვის განკუთვნილ დავალებებზე,რის შემდეგ ხდება ამ ნამუშევრების პრეზენტაცია (10 წთ);
5) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

IV თავი.
2. კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა მართობულობა

რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან სივრცეში მდებარე წრფეებს (მკვეთი, პარალელური, მკვეთი) შორის კუთხის ცნებას, მართობული წრფეების განმარტებას.

აქტივობის მიზანი:
მოსწავლეები ეცნობიან ორ წრფეს შორის კუთხის ცნებას, ამ კუთხის გამოთვლის წესის დაუფლებას, გამოიმუშავებენ კუთხის პოვნის წესის გამოყენების უნარ-ჩვევას.
მოსწავლეები შეძლებენ, ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით,შეარჩიონ შესაბამისი გზა და შეასრულონ შესაბამისი ნახაზი ორ წრფეს შორის კუთხის გამოსათვლელად.
შესწავლილი მასალის საფუძველზე, შეძლებენ ტოლი კუთხეების ამორჩევას და მათ შორის მეტ-ნაკლებობის დადგენას.

სავარაუდო ხანგრძლივობა -1 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:
1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც ვთხოვთ დაასახელონ პარალელური, თანამკვეთი და აცდენილი წრფეები (საკლასო ოთახის მაგალითზე) (5 წთ).
2) შემდეგ განვმარტავთ კუთხეს აცდენილ წრფეებს შორის და ვაყალიბებთ ამ კუთხის პოვნის წესს, რის შემდეგაც უკვე შესაძლებელია განიმარტოს ნებისმიერ ორ წრფეს შორის კუთხე და წრფეთა მართობულობა სივრცეში (10 წთ).
3) მასწავლებელი ავალებს მოსწავლეებს წყვილებში შეასრულონ წიგნში მოცემული, წყვილებისათვის განკუთვნილი ამოცანა, რის შემდეგაც რომელიმე წყვილი ახდენს ნამუშევრის პრეზენტაციას (10 წთ).
4) მასწავლებელიკითხვა-პასუხის რეჟიმში იხილავს პარაგრაფში გარჩეულ ორ ამოცანას (10 წთ).
5) აქტივობის გაფართოვება-გაღრმავების მიზნით, შესაძლოა დისკუსიის ფორმაც,იხილავენ პარაგრაფში მოცემულ ინდივიდიალურ შეკითხვებს (5 წთ).
6) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

V თავი.
3. მიმდევრობის ზღვარი

რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან მიმდევრობის ზღვრის განმარტებას, მიმდევრობის ზღვრის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას.

აქტივობის მიზანი:
მოსწავლეები ეცნობიან მიმდევრობის ზღვრის განმარტებას, ზღვრის განმარტების გამოყენების უნარ-ჩვევას.
მოსწავლეები შეძლებენ აჩვენონ, რომ მოცემული მიმდევრობის ზღვარი მოცემული რიცხვია, ან რიგ შემთხვევებში თავად იპოვონ მიმდევრობის ზღვარი.

სავარაუდო ხანგრძლივობა -1 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:
1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც იხილება პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული ინდივიდუალური დავალებები, დაადგენენ მოცემულ მიმდევრობებს

შორის რომელია მონოტონური, ამოარჩევენ მათ შორის ისეთ მიმდევრობებს, რომელთა არცერთი წევრი არ აღემატება წინასწარ მოცემულ რიცხვს. (10 წთ).
2) გაკვეთილი გრძელდება წიგნში მოცემული, ინდივიდუალური დავალებით, რის შედეგადაც ნასწავლებელს უკვე აქვს შესაძლებლობა, განმარტოს მოცემული რიცხვის ε მიდამო (5 წთ).
3) კითხვა-პასუხის რეჟიმში იხილავენ პარაგრაფში მოცემულ დავალებას, რის შემდეგაც მასწავლებელი განმარტავს მიმდევრობის ზღვარს (10 წთ).
4) განმარტების უკეთ გასააზრებლად მასწავლებელი ახდენს მიმდევრობის ზღვრის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციის პრეზენტაციას (5 წთ).
5) აქტივობის გაფართოვება-გაღრმავების მიზნით, იხილავენ პარაგრაფში გარჩეულ მაგალითებს (10 წთ).
6) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

VI თავი.
4. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან ვექტორების სკალარული ნამრავლის განმარტებას და გამოთვლის წესს.

აქტივობის მიზანი:
მოსწავლეები ეცნობიან ვექტორების სკალარულ ნამრავლის განმარტებას და ეუფლებიან ამ ნამრავლის გამოთვლის წესს. შეიმუშავებენ ამ წესის გამოყენების უნარ-ჩვევებს.
მოსწავლეები შეძლებენ ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით გამოიყენონ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ამა თუ იმ პრობლემის გადასაწყვეტად.
შესწავლილი მასალის საუძველზე შეძლებენ ვექტორის სიგრძის გამოთვლას, მვექტორებს შორის კუთხის სიდიდის პოვნას.

სავარაუდო ხანგრძლივობა - 1სთ.

აქტივობის აღწერა:
1) გაკვეთილი იწყება სშინაო დავალების ანალიზით,რის შემდეგაც მასწავლებელი აძლევს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განმარტებას (5 წთ).
შემდეგ კითხვა-პასუხის რეჟიმშიმასწავლებელი ამტკიცებს, რომვექტორის სკალარული კვადრატი ამ ვექტორის სიგრძის კვადრატის ტოლია და ავალებს მოსწავლეებს, იფიქრონ პარაგრაფში მოცემულ წყვილებისთვის განკუთვნილ ამოცანაზე (10 წთ).
2) წყვილები ახდენენ თავიანთი ნამუშევრის პრეზენტაციას (5 წთ).
3) ამის შემდეგ მასწავლებელი ამტკიცებს, რომ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, სადაც α $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეა (10 წთ).
4) აქტივობის გაფართოვება-გაღრმავების მიზნით, გაირჩევა წიგნში ამოხსნილი სამი ამოცანა (10 წთ).
5) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

VII თავი.
3. ჯუფთება

რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან ნ ელემენტიდან მ ელემენტიანი ჯუფთების გამოსათვლელ ფორმულას, ნიუტონის ბინომს.

აქტივობის მიზანი:
მოსწავლეები ეცნობიან ჯუფთების გამოსათვლელ ფორმულას, ეუფლებიან მისი გამოთვლის წესს და შეიმუშავებენ ამ წესის გამოყენების უნარ-ჩვევებს.
შეარჩიონ ამოცანის ამოხსნის გზა და შეარჩიონ შესაბამისი ფორმულა (წყობა, გადანაცვლება, ჯუფთება).
შესწავლილი მასალის საფუძველზე შეძლებენ გაამარტივონ ჯუფთების, წყობის, გადანაცვლების შემცველი გამოსახულებები, დათვალონ ამა თუ იმ ხდომილობის ალბათობა, იპოვონ ბინომის დაშლის ამა თუ იმ წევრის კოეფიციენტი.

სავარაუდო ხანგრძლივობა -1 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:
1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც მასწავლებელი მოსწავლეებთან აქტიური თანამშრომლობით იხილავს პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულ ამოცანას, რის შემდეგაც განმარტავს n ელემენტიდან m ელემენტიან ჯუფთებას (10 წთ).
2) შემდეგ კითხვა-პასუხის რეჟიმში ამტკიცებენ ფორმულას $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$ (5 წთ);
3) შემდეგ მოსწავლეები, მასწავლებლის დახმარებით, იხილავენ მათთვის განკუთვნილ ინდივიდუალურ დავალებას, რის შემდეგაც უკვე ხსნიან პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულ ამოცანას (10 წთ);
4) შემდეგ მასწავლებელი ამტკიცებს $C_n^m = C_n^{n-m}$ და $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ ფორმულებს და პასკალის სამკუთხედის განხილვის შემდეგ წერს ნიუტონის ბინომს (10 წთ);
5) აქტივობის გაფართოვება-გაღრმავების მიზნით ვიხილავთ პარაგრაფში გარჩეულ ამოცანებს (5 წთ);
6) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).

I თავი

1. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები

რეზიუმე:

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებსა და თვისებებს მოსწავლეები X კლასში გაეცნენ. მათ იციან ტრიგონომეტრიული წრეწირი, მასზე ნებისმიერი წერტილის შესაბამისი კუთხის გრადუსული და რადიანული ზომის განსაზღვრა წერტილის კოორდინატების მიხედვით და პირიქით კოორდინატებით კუთხის პოვნა, იციან ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობები. შევეცადოთ კითხვებითა და გარკვეული მითითებებით გავიხსენოთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებები, გრაფიკები.

ამოხსნები, მითითებები:

7. წრფეზე ერთი მიმართულებით მოძრაობის დროს მათ შორის მანძილი იფარება სიჩქარეების სხვაობით. თუ გავითვალისწინებთ, რომ A და B წერტილებს შორის მანძილი 90°-ია, ეს მანძილი უნდა დაიფაროს სიჩქარით (60–42)°/სთ-ში სიჩქარით, ე.ი. პირველი შეხვედრა მოხდება $\frac{90}{18}=5$ წთ-ში, მეორე შეხვედრა $\frac{360+90}{18}=25$წთ-ში. k-ური შეხვედრა $\frac{360(k-1)+90}{18}=2k-15$ წთ-ში.

8. წრეზე საწინააღმდეგო მოძრაობის დროს მათ შორის მანძილი იფარება სიჩქარეევის ჯამით, ე.ი. ა) პირველი შეხვედრა მოხდება $\frac{90}{20+25}=2$ წთ-ში, ბ) მეორე შეხვედრა $\frac{450}{45}=10$წთ-ში. გ) k-ური შეხვედრა $\frac{360(k-1)+90}{45}=(8k-6)$ წთ-ში.

9. ვაჩვენოთ სამკუთხედის უტოლობით.

10. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$\begin{cases}(x-1)^2=0\\(y-1)^2=1\end{cases}$ ან $\begin{cases}(x-1)^2=1\\(y-1)^2=0\end{cases}$

(1;2) (1;0) (2;1) (0;1)

11. $f(x)=x^2-5x-6$ $g(x)=x^2$

$f(g(x))=(x^2)^2-5x^2-6$

$x^4-5x^2-6=0$

$x^2\neq-1$ $x^2=6$, ე.ი. $x=\pm\sqrt{6}$.

13. პირველი განტოლებიდან [x]=2 {y}=0,3. მეორედან [y]=1; {x}=0,2, თუ გავითვალისწინებთ, რომ [x]+{x}=x. მივიღებთ: x=2,2; y=1,3.

14. პერიოდულია, თუ მუდმივია, ე.ი. a+3=0.

2. ᲓᲐᲛᲝᲙᲘᲓᲔᲑᲣᲚᲔᲑᲐ ᲔᲠᲗᲘ ᲓᲐ ᲘᲛᲐᲕᲔ ᲐᲠᲒᲣᲛᲔᲜᲢᲘᲡ ᲢᲠᲘᲒᲝᲜᲝᲛᲔᲢᲠᲘᲣᲚ ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲔᲑᲡ ᲨᲝᲠᲘᲡ

რეზიუმე:

ფორმულათა ცხრილში მოცემული პირველი მე-6 და მე-7 იგივეობები მოსწავლეთათვის ცნობილია X კლასის კურსიდან. დანარჩენების გამოყვანა ისევ მათ დავავალოთ. ყურადღება გავამახვილოთ ± ნიშანზე. წრეწირზეც დავანახოთ, თუ როგორ შეესაბამება სინუსის და კოსინუსის თითოეულ მნიშვნელობას, კოფუნქციის ორი მნიშვნელობა. ჩამოაყალიბონ, თუ როგორ უნდა შეირჩეს შესაბამისი ნიშანი.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ $\quad\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ I მეოთხედი, ე.ი. $\quad\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$.

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$. $\mathrm{ctg}=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{4}{3}$.

3. $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{1}{3}$ $\quad\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)$ $\quad$ II მეოთხედი. $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=-3$.

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, საიდანაც $\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$. $\quad\sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

2. ა) $\frac{2\sin x-5\cos x}{4\cos x+3\sin x}=$ გავყოთ cosx-ზე.

$\frac{2\mathrm{tg}x-5}{4+3\mathrm{tg}x}=\frac{1}{13}$.

ბ) $\frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin^2 x+2\sin x\cos x}=\frac{\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x+2\sin x\cos x}=\frac{\mathrm{tg}^2 x-2\mathrm{tg}x+1}{\mathrm{tg}^2 x+2\mathrm{tg}x}=\frac{4}{15}$.

გ) $\frac{7\cos x+3\sin^2 x\cos x+3\cos^3 x}{4\sin x+3\cos x}=\frac{7\cos x+3\cos x}{4\sin x+3\cos x}=\frac{10}{4\mathrm{tg}x+3}=\frac{2}{3}$.

5. $6\mathrm{tg}^2\alpha-11\mathrm{tg}\alpha+3$ $\quad\mathrm{tg}\alpha=y$

$6y^2-11y+3=0$

$y=\frac{3}{2}$, $\quad y=\frac{1}{3}$, მაგრამ $\alpha\in(225°;\ 270°)$. $\mathrm{tg}225°=1$. ტანგენსი ზრდადია მოცემულ შუალედში, ე.ი. $\mathrm{tg}\alpha>\mathrm{tg}225°$. მივიღეთ $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{2}\Rightarrow\mathrm{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$. $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}$.

7. tgα დადებითია და I მეოთხედში არ არის, ე.ი. III მეოთხედშია.

$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{3}$. $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\quad\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

8. ა) $\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}}{\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+1}=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\mathrm{tg}^3\alpha+1}=\frac{\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{tg}^2\alpha+1)}{\mathrm{tg}^3\alpha+1}=\frac{10}{9}$.

ბ) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)((\sin\alpha+\cos\alpha)^2-3\sin\alpha\cos\alpha)$. გავითვალისწინოთ, რომ

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$, ე.ი. $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{8}$.

პასუხი: $-\frac{11}{16}$.

გ) ბ)-ს გათვალისწინებით $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{3}{8}$. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{23}{32}$.

11. შევადგინოთ d-ს მიმართ კვადრატული გამოსახულება. $2d^2+5d+2$. რომელიც უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა $d=-\frac{5}{4}$.

9. $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+2-2\sin^2\alpha=2-\sin^2\alpha$
$-1\le-\sin^2\alpha\le0 \qquad 1\le2-\sin^2\alpha\le2$

3. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივება, იგივეობათა დამტკიცება

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა შორის დამოკიდებულებების გამოყენება. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივების და იგივეობის დამტკიცების დროს.

ამოხსნები, მითითებები:

3. ა) $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}5$
$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4} \qquad \sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$

5. გ) $\dfrac{1+\mathrm{tg}+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha}=\dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}}=\mathrm{tg}^2\alpha.$

6. ა) $\dfrac{2\sin\alpha-5\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\cos^2\alpha}=\dfrac{2-5\mathrm{ctg}\alpha}{(1+\mathrm{ctg}\alpha)\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2+1}}=-\dfrac{10}{3}.$

7. $\sin\alpha+\cos\alpha=m$
$1+2\sin\alpha\cos\alpha=m^2 \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha=m^2-1$
$|\sin\alpha-\cos\alpha|=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{2-m^2}.$

გ) $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{m^2}.$

8. ა) $\sin^2\alpha\left(1+\dfrac{1}{\sin\alpha}+\mathrm{ctg}\alpha\right)\left(1-\dfrac{1}{\sin\alpha}+\mathrm{ctg}\alpha\right)=\sin^2\alpha\left((1+\mathrm{ctg}\alpha)^2-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)=$

$=\sin^2\alpha\left(1+2\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)=2\sin\alpha\cos\alpha$

10. $\begin{cases} n^2-x=100 \\ m^2-x=168 \end{cases}$

$m^2-n^2=68$
$(m-n)(m+n)=68$, მაგრამ $x=n^2-100$ და $x=m^2-168$, ე.ი. $m>12$ და $n>10$, ე.ი. $m+n>22$.

მივიღეთ: $\begin{cases} m+n=34 \\ m-n=2 \end{cases}$, სადაც $m=18$ და $x=156$.

4. ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

რეზიუმე:

cos(α–β)-ს ფორმულა მასწავლებელმა თავად უნდა დაამტკიცოს. აქ მოსწავლეებს დამოუკიდებლად მუშაობა აშკარად გაუჭირდებათ, მაგრამ დანარჩენი ფორმულების დამტკიცება cos(α+β), sin(α±β) და tg(α±β) უკვე შესაძლებელია მივანდოთ მათ.

ამოხსნები, მითითებები:

2. ა) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

ვ) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$

4. ა) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ე.ი. $\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-3}{6}$.

10. გ) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \cos x = -1$.

$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) - \cos x = -1$.

$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

12. ა) $\sin(\alpha-\beta) - 2\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\cdot\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. ჩასმით ვღებულობთ, რომ c; a–b+c და 4a–2b+c მთელი რიცხვებია, ე.ი. მთელებია a–b, 2a, 2b და a+b რიცხვებიც. ამის შემდეგ განვიხილოთ x-ის ლუწი, n-კენტი მნიშვნელობები.

14. $\sin\alpha = \frac{1}{2} \to \alpha = 30°$ ან $\alpha = 150°$.

$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \beta = 45°$ ან $\beta = 135°$.

მაგრამ α=150° არ გვაწყობს (150°+45°>180). ე.ი. α=30°. თუ β=45°, მაშინ მესამე კუთხე 105°-ია. ე.ი. უდიდესი შეიძლება იყოს 135°.

5. ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

რეზიუმე:

ჯამის ფორმულების გამოყენებით დავამტკიცებინოთ მოსწავლეებს ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ვაჩვენოთ მათ ნახევარი კუთხის ფორმულები და ნახევარი კუთხის ტანგენსით ფუნქციათა შეცვლის ფორმულები.

ამოხსნები, მითითებები:

7. ა) $\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = 2$

8. ა) $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ I მეოთხედი

$\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{5\pi}{4}$ III მეოთხედი

$\cos\alpha = 0,8$

$\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{0,1}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{0,9}$ $\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$

10. ა) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 + \sin\alpha$

ე) $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha - 2\mathrm{tg}2\alpha - 4\mathrm{tg}4\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} - \mathrm{tg}\alpha - 2\mathrm{tg}2\alpha - 4\mathrm{yh}4\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - 2\mathrm{tg}2\alpha - 4\mathrm{tg}4\alpha =$

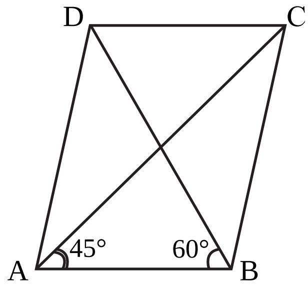
$= 2\mathrm{ctg}2\alpha - 2\mathrm{tg}2\alpha - 4\mathrm{tg}4\alpha = 4\mathrm{tg}4\alpha - 4\mathrm{tg}4\alpha = 8\mathrm{ctg}8\alpha$

12. ა) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha - 1$

გ) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha\cos 2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha + \cos\alpha + 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha(2\cos^2\alpha - 1)} =$

$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1} = \mathrm{ctg}\alpha$

13. გ) $\sin 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{-\frac{2}{7}}{1+\frac{1}{49}} = -\frac{7}{25}$



14. დავწეროთ სინუსების თეორემა AOD სამკუთხედში, ნიდილებთ AO=6.

15. ΔABC-ში AC=5, ე.ი. BM=AM=2,5. $\frac{BK}{KM} = \frac{AB}{AM}$, საიდანაც $BK = \frac{15}{11}$.

6. დაყვანის ფორმულები

რეზიუმე:

დაყვანის ფორმულების ნაწილს $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; $(\pi - \alpha)$ მოსწავლეები იცნობენ სამკუთხედების კუთხეებისთვის. გავაცნოთ მათ დანარჩენი და დავამტკიცებინოთ პარაგრაფში განხილული ნიმუშების მიხედვით. აღვნიშნოთ, რომ $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ეს არის კუთხე, რომელიც ნიშნის შეუცვლელად ცვლის ოთხივე ფუნქციას კოფუნქციით. აღვნიშნოთ, რომ ზოგიერთი ფორმულა შეიძლება პერიოდულობისა და ლუწ-კენტობის გათვალისწინებითაც მივიღოთ. მაგ. tg(180°–α)=tg(–α)=–tgα. ხაზი გავუსვათ, რომ საჭიროა არა ფორმულების დაზეპირება, არამედ კუთხის დაყვანის წესის დამახსოვრება.

ამოხსნები, მითითებები:

3. ა) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

7. დ) $\sin\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos(2x + 4\pi) - \sin(5x + \pi)\sin^2 x = 0$

8. ა) $\cos(\alpha+\beta-\gamma) = \cos(180^\circ - 2\gamma) = -\cos 2\alpha$

11. ა) $tg\alpha = k_1$; $tg\beta = k_2$.
ნახაზის მიხედვით $\beta=\alpha+\gamma$, ე.ი. $tg\gamma = tg(\beta-\alpha) = \frac{k_2-k_1}{1+K_1K_2}$, რადგან ორ წრფეს შორის კუთხე არ აღემატება 90°-ს. $tg\gamma = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.
ბ) მართობული წრფეებისთვის $\gamma=90°$, ე.ი. $tg\gamma$ არ არის განსაზღვრული ანუ $k_1k_2+1=0$, ე.ი. $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

14. რადგან $\frac{1}{\sqrt{x-2a}}$ უნდა იყოს მთელი და $\sqrt{x-2a}$ -ც მთელია, ცხადია, $x-2a=1$, $x=2a+1$. ჩავსვათ მარჯვენა მხარეში $2a+1-2a^3-3a^2=1$, სადაც $a=0$ ან $a=-2$.

7. ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება

რეზიუმე:

უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებები თავისი ფორმულებით განხილული იყო X კლასში. ახლა უკვე გავეცნოთ შედარებით რთული ტიპის განტოლებებს და მათ ამოხსნებს. მოსწავლეს უნდა შეეძლოს მიღებული ცოდნის გამოყენებით განტოლების უმარტივეს სახემდე ($\sin x=a$; $\cos x=a$; $tg x=a$) მიყვანა.

ამოხსნები, მითითებები:

5. ვ) $\cos^2 x + (3-\sqrt{3})\cos x - 3\sqrt{3} = 0$

$y^2 - (3-\sqrt{3})y - 3\sqrt{3} = 0$

$$y = \frac{(3-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(3-\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3}}}{2} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$\varnothing$

6. ე) $\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x = \frac{1}{4}$

$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x + \sin x = \frac{1}{4}$

$\sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$

საიდანაც $\sin x = -\frac{1}{2}$

7. ვ) $1+\cos x+\cos 2x=0$

$2\cos^2 x+\cos x=0$

$\cos x(2\cos x+1)$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

8. გ) $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$

$2\sin x\cos x = \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)$

$2\sin x\cos x - \cos x = 0$

$\cos x=0$ $\sin x=\frac{1}{2}$

9. გ) $8\sin^2 x-3\cos^2 x=4$
$16\sin x\cos x-3\cos^2 x=4$ $\quad :\cos^2 x$
$16\mathrm{tg}x-3=4+4\mathrm{tg}^2 x$

$4\mathrm{tg}^2 x-16\mathrm{tg}x+7=0$

$\mathrm{tg}x=\frac{1}{2}$ ან $\mathrm{tg}x=\frac{7}{2}$

10. ბ) $3\mathrm{tg}^2 x+4\mathrm{tg}x+4\mathrm{ctg}x+3x\mathrm{tg}^2 x+2=0$
$3(\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x)+4(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)+2=0$
$\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x\equiv y$

$3(y^2-2)+4y+2=0$
$4y^2+4y-4=0$
$\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x=-2$

$\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x=\frac{2}{3}$

გ) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^2 x-0{,}5$

$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\sin 2x-0{,}5$

$\sin^2 2x+2\sin 2x-3=0$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k$

11. გ) $11\mathrm{ctg}x-5\mathrm{tg}x=\frac{16}{\sin x}$

$11\cos^2 x-5\sin^2 x=16\cos x$

$\cos x=\frac{1}{4}$

$x=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi k$

უმცირესი დადებითი — $\pi-\arccos\frac{1}{4}$

უდიდესი უარყოფითი — $\pi+\arccos\frac{1}{4}$

დ) $2\sin^2 x+\cos^2 x+2+\cos 2x=0$ $\quad :\cos^2 x$
$4\sin x\cos x+\cos^2 x+2+\cos^2 x-\sin^2 x=0$
მივიღებთ: $(\mathrm{tg}x+2)^2=0$ $\mathrm{tg}x=-2$.
$x=\mathrm{arctg})-2)+\pi k$
უმცირესი დადებითი — $\pi+\mathrm{arctg}(-2)$
უდიდესი უარყოფითი — $\mathrm{arctg}(-2)$

12. ბ) $4(1+\cos x)=9+\sin^4 x-\cos^4 x$ $\quad (-\pi;\pi)$
$4+4\cos x=9+\sin^2 x-\cos^2 x$
$\cos x=y$
$y^2+2y-3=0$
$y=-3$ $y=1$
$\cos x=1$ $x=2\pi n$
პასუხი: 0.
გ) $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x-\cos^2 x=-2$ $\quad :\cos^2 x$

$3tg^2x-2\sqrt{3}\,tgx+1=0$

$\sqrt{3}\,tgx-1=0$

$tgx=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x=\frac{\pi}{6}+\pi k.$

(0;4) შუალედში მოხვდება $\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}$.

13. მოცემული განტოლება ტოლფასია სისტემის

ა) $\begin{cases}\sin 2x = 1\\ \cos x = 1\end{cases}$, რომელსაც ცხადია ამონახსნი არ აქვს.

ბ) $x^2 - x + \frac{3}{2}$ გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა მეტია 1-ზე.

14. ა) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ გავყოთ 2-ზე.

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x + \frac{\pi}{6} = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k \qquad k\in Z$

დ) $\sin x+\cos x=\frac{5}{4}$ ავიყვანოთ კვადრატში

$a+\sin^2x=\frac{25}{16}$

$\sin 2x=\frac{9}{16}$

$x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{9}{16} + \frac{\pi}{2}k \qquad k\in Z$

15. $AO=\frac{2}{3}AN=10$; $CO=\frac{2}{3}CM=6$ ე.ი. $\sqrt{136} = 2\sqrt{34}$

I თავის დამატებითი სავარჯიშოები

4. $y = \cos^2\frac{x}{2} + \sqrt{-\sin^2 2x}$ გამოსახულებას აზრი რომ ჰქონდეს, $-\sin^2x\geq 0$ ე.ი. $\sin 2x=0$, $2x=\pi k$, $k\in Z$. $x = \frac{\pi k}{2}$ $k\in Z$.

ვიპოვოთ $y = \cos^2\frac{x}{2}$, როცა $x = \frac{\pi k}{2}$ შესაძლებელია ორი შემთხვევა $k=2n$, $n\in Z$ და $k=2n+1$, $n\in Z$.

1. $y = \cos^2\left(\frac{2n}{4}\pi\right) = \cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ გამოსახულება ტოლია 0-ის ან 1-ის.

2. $y = \cos^2\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right) = \cos^2\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ე.ი. გამოსახულების მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

7. $tg\alpha-ctg\alpha=b$

ა) $tg^2\alpha+ctg^2\alpha=(tg\alpha-ctg\alpha)^2+2tg\alpha\cdot ctg\alpha=b^2+2$.

ბ) $tg^3\alpha-ctg^3\alpha=(tg\alpha-ctg\alpha)((tg\alpha-ctg\alpha)^2+3tg\alpha\cdot ctg\alpha)=b(b^2+3)$.

9. ა) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ ავიღოთ $(x_2>x_1) \Rightarrow (\sin x_2>\sin x_1) \Rightarrow \cos(\sin x_2)>\cos(\sin x_1)$ IV მეოთხედში sinx და cosx ფუნქციები ზრდადია, ე.ი. $(x_2>x_1) \Rightarrow \cos(\sin x_2)>\cos(\sin x_1)$, ე.ი. ფუნქცია ზრდადია.

12. ა) $\sin\frac{2\pi}{13}+\sin^2\frac{11\pi}{26}=\sin^2\frac{2\pi}{13}+\cos^2\frac{\pi}{13}=1$

გ) $\sin10°\cdot\sin30°\sin50°\sin70°=\cos80°\cdot\cos60°\cdot\cos40°\cos20°=\frac{2\sin20°\cos20°\cdot\cos40°\cos80°}{4\sin20°}=$

$=\frac{\sin40°\cos40°\cos80°}{4\sin20°}=\frac{\sin80°\cos80°}{8\sin20°}=\frac{\sin160°}{16\sin20°}=\frac{1}{16}.$

14. ბ) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{2}$

$\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ $\quad x=\frac{\pi}{2}k$

17. ა) $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$

$1-\sin2\alpha=\frac{1}{4}$

$\sin2\alpha=\frac{3}{4}$

$\cos4\alpha=1-2\sin^2 2\alpha=1-\frac{9}{8}=-\frac{1}{8}.$

24. $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$

$(1+\mathrm{tg}\alpha)\left(1+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=(1+\mathrm{tg}\alpha)\left(1+\frac{1-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}\right)=2$

25. $1-\sin^2x+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{4}-1=0$

$\sin^2x-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$ $\quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ოთხი ამონახსნი: $\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}$

II თავი

1. წრფეთა პარალელურობის ნიშანი

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს პარალელურ წრფეთა განმარტება, სივრცეში, მრავალწახნაგებზე იმის დადგენა, თუ რომელი ერფეებია პარალელური და ამ ფაქტის დასახელება.

ამოხსნები, მითითებები:

1. AD და DC წრფეები კვეთს α სიბრტყეს ლემის თანახმად.

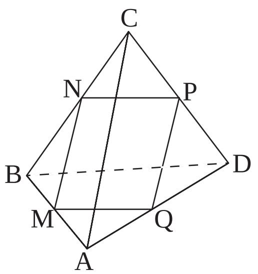
2. ტრაპეციის შუახაზი ფუძეების პარალელურია, ამიტომ თუ α სიბრტყეს კვეთს ტრაპეციის ფუძეების შემცველი წრფეები, მაშინ შუახაზის შემცველი წრფეც უნდა კვეთდეს მას, მაგრამ ამოცანის პირობით შუახაზი მდებარეობს α სიბრტყეში. ე.ი. მოცემული ტრაპეცია ან მდებარეობს α სიბრტყეში, ან მისი ფუძეების შემცველი წრფეები α სიბრტყეს არ კვეთს.

3. DC წრფის პარალელური წრფე სამკუთხედებს სიბრტყეებს კვეთს ლემის თანახმად.

4. a და b წრფეების პარალელური წრფე რომ არსებობდეს, მაშინ a და b წრფეები პარალელური იქნება და მათზე გაივლება სიბრტყე.

5. ორივე წრფე პარალელურია AC წრფის.

6.



MN – ΔABC-ს შუახაზია,
PQ – ΔACD-ს შუახაზი.

$$\left.\begin{array}{ll} MN \parallel AC & MN = \dfrac{AC}{2} \\ PQ \parallel AC & PQ = \dfrac{AC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel PQ \text{ და } MN = PQ,$$

ე.ი. MNPQ – პარალელოგრამია.

14. ფუძის დიაგონალი 25x, ე.ი. 25xh=50, xh=2. $S_{\text{გვ}}=62xh=124$.

2. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა

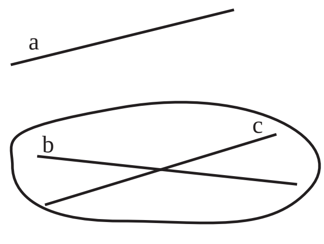
ამოხსნები, მითითებები:

1. MN მონაკვეთი ABC სამკუთხედის შუახაზია. ე.ი. MN||AB და ამიტომ MN||α, $MN = \frac{3}{2}$ სმ.

2. CD||AB, ე.ი. CD||(ABM).

4. $NC = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12$; $AM = \frac{3}{5}AB = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$.

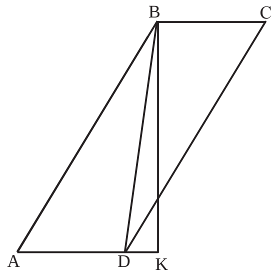
$MN = \frac{2}{5}AC = \frac{2}{5} \cdot 30 = 12$.



5. ვთქვათ a და b აცდენილი წრფეებია. b წრფის ნებისმიერ წერტილზე გავატაროთ a წრფის პარალელური c წრფე (b;c) სიბრტყე პარალელურია a წრფის.

6. $\left.\begin{array}{ll} C_1D_1 \parallel AB; & C_1D_1 = AB \\ CD \parallel AB; & CD = AB \end{array}\right) \Rightarrow C_1D_1 \parallel DC;\ C_1D_1 = DC$.

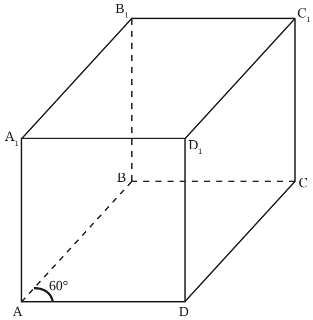
ე.ი. C_1CDD_1 – პარალელოგრამია. P=2(7,2+5,8)=26.



9. ამოვხაზოთ ფუძე BK=4, AD=2, AB=5. მივიღეთ DK=1. ვიპოვოთ BD დიაგონალი BD=$\sqrt{17}$.

$AC^2+17=2(25+4)$; $AC^2=41$. დიაგონალი $\sqrt{17+8} = \sqrt{25} = 5$.

11.

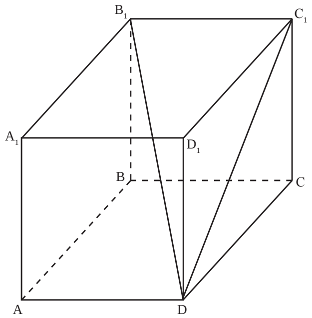


BD=$\sqrt{1+4-2\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

AC=$\sqrt{7}$

$B_1D=2\sqrt{3}$; $AC_1=4$.

12.



საძიებელი მანძილი არის B_1C_1D მართკუთხა სამკუთხედის სიმაღლე და ტოლია $\dfrac{5\cdot5\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = 5\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

3. სიბრტყეთა პარალელურობა

რეზიუმე:

პარალელურ სიბრტყეთა განმარტების საფუძველზე მოსწავლეებს უნდა შეეძლოთ კონკრეტულ მაგალითებზე პარალელურ სიბრტყეთა წყვილების დასახელება და ა.შ. ფაქტის დასაბუთება.

ამოხსნები, მითითებები:

1. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. ე.ი. $A_1B_1=AB=10$.

3. $\Delta ACB \sim \Delta A_1C_1B_1$ მსგავსების კოეფიციენტით $\frac{4}{9}$.

5. MNP და ACD სამკუთხედები მსგავსია. მსგავსების კოეფიციენტი $\frac{1}{2}$-ია.

ე.ი. $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{ACD} = \frac{1}{4}\cdot92 = 23$.

6. მითითება: $\Delta A_1AB_1 \sim \Delta A_2AB_2$.

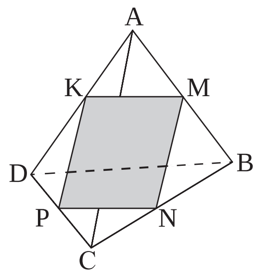
12. ფუძის დიაგონალია 205:5=41, ე.ი.

$$\begin{cases} a^2+b^2=1681 \\ ab=360 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a=40 \\ b=9 \end{array}$$

13. გვერდითი წიბო — 5 სმ; ფუძის გვერდი — $6\sqrt{2}$. $S_{სრ}=2\cdot72+120\sqrt{2}$.

4. ამოცანები კვეთების აგებაზე

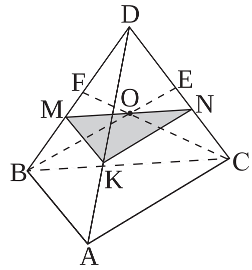
ამოხსნები, მითითებები:



3. კვეთის სიბრტყე გადის PN წრფეზე, რომელიც ABD სიბრტყის პარალელურია. ე.ი. წრფე კვეთს სიბრტყის ABD სიბრტყესთან კვეთის წრფე PN წრფის, ამავე დროს DB წრფის პარალელურია. MK||DB.

$$MK = PN = \frac{BD}{2} = 18;\ MN = KP = \frac{AC}{2} = 15.$$

გავამახვილოთ ყურადღება იმაზე, რომ KMNP ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

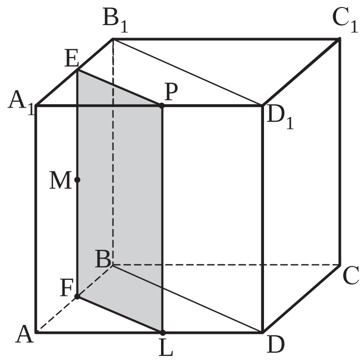


4. O წერტილზე გავავლოთ MN||BC. NK||AC; (MNK)||(ABC). $\Delta OEN \sim \Delta BEC$.

$$\frac{ON}{BC} = \frac{OE}{BE} = \frac{1}{3};\ ON = \frac{1}{3}BC;\ MN = \frac{2}{3}BC.$$

$$\frac{S_{MNK}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

5. $\Delta OEF \sim \Delta ALK$. $S_{OEF} = \frac{1}{4}S_{ALK} = 6$ სმ^2.

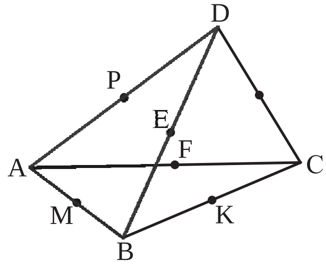


6. გ) გავავლოთ M წერტილზე BB_1-ის პარალელური EF მონაკვეთი. F წერტილზე FL||BD. E წერტილზე $EP \parallel B_1D_1$.
EPLF საძიებელი კვეთაა.

II თავის დამატებითი სავარჯიშოები

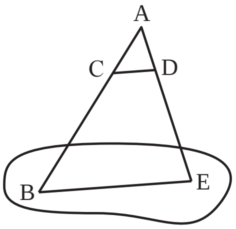
1. დავუშვათ საწინააღმდეგო: AC და BD წრფეები არ არიან აცდენილი, ე.ი. მათზე გაივლება სიბრტყე, რომელშიც, ცხადია, მოხვდება AB და CD წრფეები, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

2. თუ არსებობს წრფე, რომელიც a და b წრფეების პარალელურია, მაშინ და წრფეებიც პარალელურია და მათზე გაივლება სიბრტყე.



3. MPNK პარალელოგრამია, ამიტომ MN და PK დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი მათი შუაწერტილია.
ანალოგიურად, MENF ოთხკუთხედიც პარალელოგრამია, რომლის დიაგონალებია MN და EF-ია.

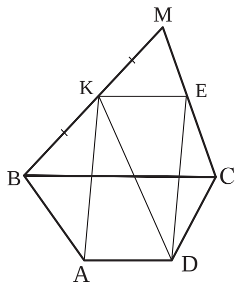
4. $(AD \parallel BC) \Rightarrow AD \parallel (BMC)$.

5. 

$\Delta ACD \sim \Delta ABE$.

$$\left(\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3}\right)\Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{1}{4}.$$

$$\frac{CD}{BE}=\frac{AC}{AB} \qquad BE=48\text{სმ}.$$

7. 

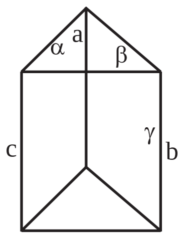
$(BC\parallel AD)\Rightarrow BC\parallel(ADK)$, ე.ი. $(ADK)\cap(AMC)=KE$

ამასთან, KE||BC; BK=KM, ამიტომ ME=EC,

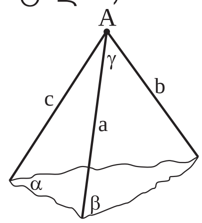
ე.ი. $KE=\frac{BC}{2}=9$სმ.

8. $(AB\parallel\alpha)\Rightarrow ABCD$ ტრაპეციის სიბრტყის და α სიბრტყის თანაკვეთა იქნება წრფე, რომელიც AB-ს პარალელურია, ამავე დროს ის C წერტილზე გადის, ე.ი. $(ABCD)\cap\alpha=(DC)$.

9. $\alpha\cap\beta\equiv a;\ \alpha\cap\gamma\equiv c;\ \beta\cap\gamma\equiv b$. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა: ა) a||c; ბ) $a\cap c=\{A\}$.

ა) 

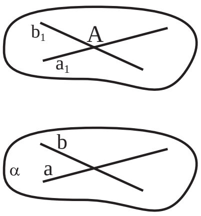
თუ დავუშვებთ, რომ a და b წრფეები იკვეთება რაიმე A წერტილში, მაშინ A∈α და A∈γ, ე.ი. A წერტილი c წრფეზე მდებარეობს, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება.



ბ) მსჯელობა ანალოგიურია.

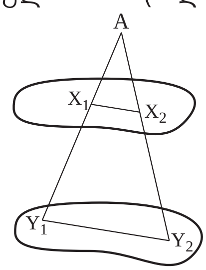
10. ვთქვათ a წრფე კვეთს α სიბრტყეს A წერტილში β||α. ავილოთ β სიბრტყეზე ნებისმიერი B წერტილი და გავავლოთ სიბრტყე a წრფესა და B წერტილზე.

11. ამ ორი წრფიდან ერთი მაინც აცდენილია a წრფესთან. შეიძლება იყოს: ერთი პარალელური, ერთი აცდენილი, ან ორივე აცდენილი a წრფესთან.

16. 

α სიბრტყეში ავილოთ a და b მკვეთი წრფეები. A წერტილზე $a_1\|a$; $b_1\|b$. $(a_1b_1)\|\alpha$; ერთადერთობა საწინააღმდეგოს დაშვებით დავამტკიცოთ.

17. დავუშვათ საწინააღმდეგო: α და β სიბრტყეებს აქვთ საერთო წერტილი, რომელზეც გავლებულია ორი (α და β) სიბრტყე, რომლებიც პარალელურია γ სიბრტყის, რაც შეუძლებელია.

18. 

$\Delta AX_1X_2 \sim \Delta AY_1Y_2$.

III თავი

1. ხარისხი ირაციონალური მაჩვენებლით

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს ირაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხებზე მოქმედებების შესრულება; თვისებების გამოყენებით გამოსახულებების გამარტივება.

ამოხსნები, მითითებები:

3. დავალაგოთ ზრდის მიხედვით რიცხვები (ხარისხის მაჩვენებლები).
$3;\ 2\sqrt{2};\ 2\sqrt{3};\ 2,5.$

6. დ) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\sin 45^\circ=\left(\frac{5}{2}-\sqrt{5}-\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}-1=1-1=0.$

7. დ) $\dfrac{\sqrt[3]{a+\sqrt{1-a^2}}\cdot\sqrt[6]{1-2a\sqrt{1-a^2}}}{\sqrt[3]{1-2a^2}}=\dfrac{\sqrt[6]{(a^2+2a\sqrt{1-a^2}+1-a^2)(1-2a\sqrt{1-a^2})}}{\sqrt[3]{1-2a^2}}=$

$=\dfrac{\sqrt[6]{1-4a^2(1-a^2)}}{\sqrt[3]{1-2a^2}}=\dfrac{\sqrt[6]{1-4a^2+4a^4}}{\sqrt[3]{1-2a^2}}=1.$

8. $x^{\frac{1}{3}}\equiv m$ $\quad y^{\frac{1}{3}}\equiv n$, მაშინ $a=\sqrt{m^6+m^4n^2}+\sqrt{n^6+m^2n^4}$

$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{m^6+m^4n^2+n^6+m^2n^4+2\sqrt{2n^6n^6+m^8n^4+m^4n^8}}=\sqrt[3]{m^6+m^4n^2+n^6+m^2n^4+2(m^4n^6+n^2m^4)}=$
$=\sqrt[3]{(m^2+n^2)^3}=m^2+n^2$

12. $(x+2)^2+y^2=100$ და $x=y$ ან $x=-y$.
(–8;–8) (6;6)
(–8;8) (6;–6)

13. (x;0) (9;12)
$(x-9)^2+12^2=x^2$ $\quad x=12,5.$

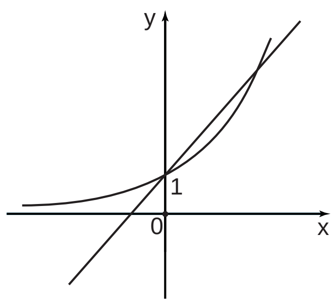
2. მაჩვენებლიანი ფუნქცია

რეზიუმე:

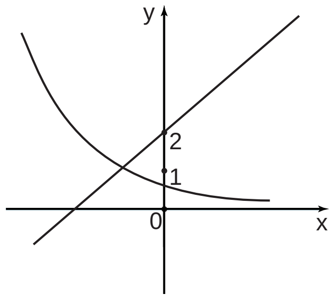
მოსწავლემ უნდა იცოდეს მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრა. უნდა იცოდეს მისი თვისებები და შეეძლოს გრაფიკის აგება. გრაფიკულად უნდა შეეძლოს იმის დადგენა, რამდენი ამონახსნი აქვს $a^x=kx+b$ სახის განტოლებას პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

ამოხსნები, მითითებები:

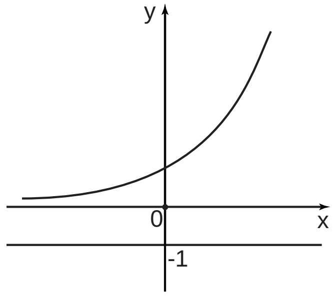
19. ა) 2 ამონახსნი



ბ) 1 ამონახსნი



გ)



არც ერთი ამონახსნი

20. გ) $y = \frac{1}{2^{-x-2}} = 2^{x+2} = 8 \cdot 2^{x-1}$=$2^{x+2}$=$8 \cdot 2^{x-1}$.

23. $\begin{cases} 24 = b \cdot a^{-1} \\ 0,75 = b \cdot a^{1,5} \end{cases}\Bigg)$ გავყოთ

$a^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{32}$ $\quad a = \frac{1}{4}$ b=6

3. ლოგარითმი

რეზიუმე:

მ

ამოხსნები, მითითებები:

11. $2^{2+4+...+2k}=2^{56}$.

$\frac{2 + 2k}{2} \cdot k = 56$

$k^2+k-56=0$ $\quad$ k=7

13. ა) $D=a^2-100=0$

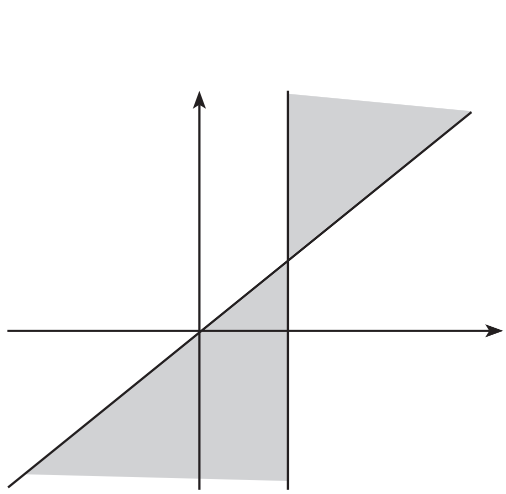
$a=\pm 10$.

14. ა) $x^2-x<y-xy$

x(x–1)–y(x01)<0

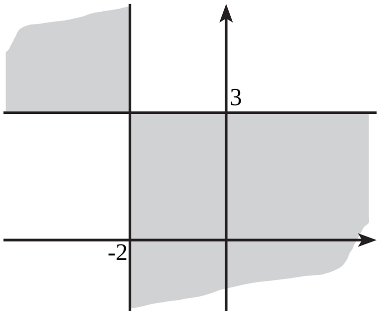
(x–1)(x–y)<0

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ y > x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ y < x \end{cases} \end{array}\right.$

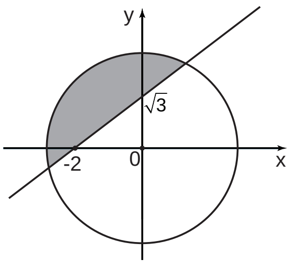


ბ) $(x+2)(y-3)>0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > -2 \\ y > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ y < 3 \end{cases}\end{array}\right.$$



15. ბ)



4. ლოგარითმის თვისებები

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა იცოდეს ლოგარითმის თვისებები, მათი გამოყენება მაგალითების ამოხსნის დროს.

ამოხსნები, მითითებები:

6. ბ) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3(\cos 30°) - \log_3(\sin 30°)\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\frac{\sqrt{3}}{2} - \log_3\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\log_2\sqrt{3} = 1$

7. ა) $\log_2 14 = b$ $\qquad \log_2 7 = b$

$$\log_{49}32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 49} = \frac{5}{2\log_2 7} = \frac{5}{2(b-1)}$$

ბ) $\log_7 9 = a$ $\qquad \log_7 5 = b$

$$\log_{15}49 = \frac{\log_7 49}{\log_7 15} = \frac{2}{\log_7 3 + \log_7 5} = \frac{2}{\frac{a}{2} + b} = \frac{4}{a+2b}$$

გ) $\log_{12}16 = a \Rightarrow \dfrac{4}{2+\log_2 3} = a$, საიდანაც $\log_2 3 = \dfrac{4-2a}{a}$

დ) $\log_3 25 = a$ $\qquad \log_3 10 = b$

$$\log_{50}2x = \frac{\log_3 27}{\log_3 50} = \frac{3}{\log_3 5 + \log_3 10} = \frac{3}{\frac{a}{2} + b} = \frac{6}{a+2b}$$

8. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots\ldots \log_{14}15 \cdot \log_{15}16 = \dfrac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\dfrac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\dfrac{\lg 5}{\lg 4}\ldots\dfrac{\lg 15}{\lg 14}\cdot\dfrac{\lg 16}{\lg 15} = \dfrac{\lg 16}{\lg 2} = \lg_2 16 = 4.$

11. $x_1; x_2 \ldots x_n \ldots$ გეომეტრიული პროგრესიაა. განვიხილოთ $\lg x_1; \lg x_2 \ldots\ldots \lg x_n \ldots\ldots$ მიმდევრობა და $\lg x_{n-1} + \lg x_{n+1} = \lg(x_{n-1}\cdot x_{n+1}) = \lg x_n^{\,2} = 2\lg x_n$. რ.დ.გ.

12. ა) $\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16$ ე.ი. მთელი ნაწილი 3.

14. ვთქვათ რაციონალურია, ე.ი. $\log_2 3 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 3 = 2^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow 3^n = 2^m$, რაც შეუძლებელია.

15. $y=2ax+1 \quad y=(a-6)x^2-2$

$2ax+1=(a-6)x^2-2$

$(a-6)x^2-2ax-3=0$

$\frac{D}{4}\ a^2+3a-18<0$

$a\in(-6;3)$

16. $x^2-\frac{15}{4}x+a^2=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{15}{4} \\ x_1x_2=a^2 \\ x_1=x_2^2 \end{cases}$$

$x_2^2+x_2-\frac{15}{4}=0$

საიდანაც $x_2=-\frac{5}{2} \qquad x_2=\frac{3}{2}$

$x_1=\frac{25}{4} \qquad x_1=\frac{9}{4}$

მაგრამ $a^2\neq-\frac{5}{2}\cdot\frac{25}{4}$ ე.ი. $a^2=\frac{27}{8} \qquad a=\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

17. ჩავთვალოთ, რომ განტოლებას ამონახსნები გააჩნია, მაშინ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$

პითაგორას თეორემით $4R^2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-8c}{4a^2}$

$S=\pi R^2=\frac{b^2-8c}{16a^2}\pi.$

19. $(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+.......+(x^2+20x+99)=400$

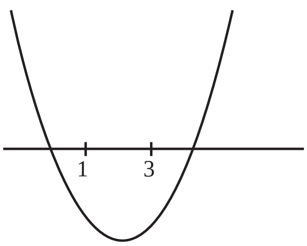
$20x^2+(x+2x+3x+....+20x)+(1+3+....+39)=400$

$20x^2+\frac{x+20x}{2}\cdot20+\frac{1+39}{2}\cdot20=400$

$20x^2+210x=0$

$x=0$ ან $x=-10,5$

20.



ე.ი. $f(x)=(x-3a)(x-a-3)$

$\begin{cases} f(1)<0 \\ f(3)<0 \end{cases}$ მივიღებთ $a\in(0;3)$.

5. შექცეული ფუნქცია

რეზიუმე:

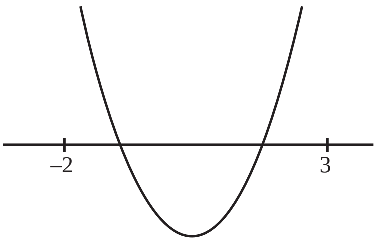
გავახსენოთ მოსწავლეებს შექცეული ფუნქციის ცნება, დავაწერინოთ რამოდენიმე ფუნქცია და მისი შექცეული ფუნქცია; გაიხსენონ ფაქტიმ რომელ ფუნქციებს აქვთ შექცეული ფუნქციები და რომელს არა.

ამოხსნები, მითითებები:

6. $x^2–xy–6y^2=11$

$(x–3y)(x+2y)=11$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-3y=1 \\ x+2y=11 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y=11 \\ x+2y=1 \end{cases}\end{array}\right. \qquad (7;2)$$

7. 

$x^2–4x–a^2+2a+3=0$ $\qquad x_1;x_2\in(–2;3)$

ამოცანის პირობის შესასრულებლად შევადგინოთ სისტემა:

$$\begin{cases} f(x_0)<0 \\ f(-2)>0 \\ f(3)>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4-8-a^2+2a+3<0 \\ 4+8-a^2+2a+3>0 \\ 9-12-a^2+2a+3>0 \end{cases} \qquad a\in(0;2)$$

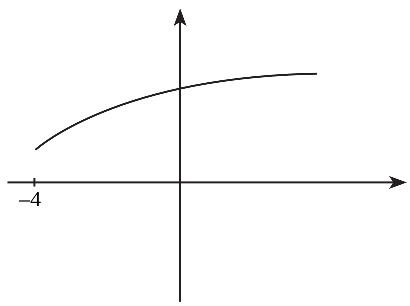
9. ა) ამოვხსნათ განტოლება:

$\sqrt{x+2}=2x-11$

$x+2=4x^2–44x+121$

$x=\dfrac{17}{4}$(არ აკმაყოფილებს x=7; y=3.

12. $\sqrt{ax+8}+b$ უმცირეს მნიშვნელობას იღებს, როცა $\sqrt{ax+8}=0$, ე.ი. b=1 ზრდადობის შუალედია [–4;∞), ე.ი. $\sqrt{-4a+8}+1=1$, საიდანაც a=2.



6. ლოგარითმული ფუნქცია

ამოხსნები, მითითებები:

1. $\left(1+\frac{5,5}{100}\right)^n=\frac{19}{7}$ n=$\log_{\frac{211}{200}}\frac{19}{7}=\frac{\lg 19-\lg 7}{\lg 211-\lg 200}\approx 18$

2. $1<\lg 11<2$ ე.ი. $[\lg 11]=1$

12. რადგან $f(x)$ კენტია და როცა $x>0$ განსაზღვრულია, ე.ი. ის განსაზღვრულია მაშინაც, როცა $x<0$ და ნებისმიერი $x\in D(f)$ სრულდება ტოლობა $f(-x)=-f(x)$. თუ $x<0$, მაშინ $x=-|x|$. მაშინ $f(-|x|)=-f(|x|)$, ე.ი. როცა $x<0$ $f(x)=\log_3\left(-\frac{x}{3}\right)$.

როცა $x>0$ $\log\frac{x}{3}=4$, საიდანაც $x=243$.

თუ $x<0$ $-\log_3\left(-\frac{x}{3}\right)=4$, საიდანაც $x=-\frac{1}{27}$.

13. $m=-\log_3 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot=-\log_3 6\cdot\log_6 8=-\log_3 8>-2$.

14. ვიპოვოთ ერთ-ერთი მედიანა, მაგალითად, CK.

$k\left(\frac{3+5}{2};\frac{-2+2}{2}\right)$ ე.ი. $k=(4;0)$.

$CK=\sqrt{(-1-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{41}$

15. გ) $g(g(x))=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$.

19. $n^2+39=(n+1)^2$ $n=19$.

7. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა იცოდეს ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ელემენტარული განტოლებების ამოხსნა. მაჩვენებლიანი განტოლების ფესვების დაწერა ლოგარითმით და ამ ლოგარითმის მნიშვნელობის პოვნა.

1. მაჩვენებლიანი განტოლებები

ამოხსნები, მითითებები:

8. ე) $2^{2x+5}-3\cdot 2^{x+2}+1=0$

$2\cdot 2^{2(x+2)}-3\cdot 2^{x+2}+1=0$ $2^{x+2}\equiv y$

$2t^2-3t+1=0$

$t=\frac{1}{2}$ ან $t=1$

$x=-3$ $x=-2$.

9. ა) $3^{x+5}-20\cdot 3^{x+2}=63$

$3^{x+2}(27-20)=63$

$3^{x+2}=9 \quad x=0$

ვ) $7^{3-x}-7^{2-x}=2^{5-x}-2^{3-x}$

$7^{2-x}(7-1)=2^{2-x}(8-2)$

$\left(\frac{7}{2}\right)^{2-x}=1 \qquad x=2.$

11. განტოლებას ექნება 1 ამონახსენი x-ის მიმართ, თუ $pt^2-5t+1=0$ განტოლებას აქვს ერთი დადებითი ამონახსნი (D=0) ან ორი სხვადასხვანიშნიანი ამონახსნი, ან როცა p=0, $p=\frac{25}{4}$ ან $p\leq 0$.

12. $x(x+1)+(x+1)(x+2)+...+(x+9)(x+10)=1\cdot 2+2\cdot 3+....+9\cdot 10$

$x^2+x+x^2+3x+1\cdot 2+x^2+5x+2\cdot 3+...+x^2+19x+9\cdot 10=1\cdot 2+2\cdot 3+...+9\cdot 10$

$10x^2+x+3x+...+19x=0$

$10x^2+\frac{x+19x}{2}\cdot 10=0$

$10x^2+100x=0$

$x=0 \qquad x=-10.$

13. $(k-1)x^2+(k+4)x+(k+7)=0$

$0=0 \qquad k=-\frac{22}{3};2$

14.

k	k^3	5k	k^3+5k
0	0	0	0
1	1	2	0
2	2	1	0

15. ბოლო ციფრი შეიძლება იყოს მხოლოდ 5, ე.ი. 0; 3; 4; 6; 9 ციფრები უნდა განთავსდეს პირველ ორ ციფრად ისე, რომ მათი ჯამი 9-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლეოდეს 4-ს 405; 495; 945.

16. $x^2+(k-10)x+9=0$

ორი განსხვავებული დადებითი ამონახსნი, ე.ი.

$\begin{cases} D>0 \\ k-10<0 \end{cases} \qquad \left.\begin{cases} (k-10)^2-36>0 \\ k<10 \end{cases}\right) \Rightarrow k<4$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-10)^2-18=k^2-20k+82$

$y=k^2-20k+82$

$k_0=10$, ე.ი. $k<4$-სთვის გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა იქნება k=3-სთვის 9–60+82=31.

2. ლოგარითმული განტოლება

რეზიუმე:

ხაზი გავუსვათ იმ ფაქტს, რომ ლოგარითმულ განტოლებას, ისევე, როგორც ირაციონალურს, აუცილებლად სჭირდება შემოწმება.

ამოხსნები, მითითებები:

3. ბ) $\lg x=2\lg x+\lg(x+1)$

$\lg x+\lg(x+1)=0$

$x(x+1)=1$

$x^2+x-1=0 \qquad x>0$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

ე) $\lg\lg x=\lg\lg 64-\lg\lg 2$

$\lg\lg x=\lg\dfrac{\lg 64}{\lg 2}$

$\lg x=\log_2 64$

$\lg x=6 \quad x=10^6.$

ვ) $\log_4(17-2^x)=\dfrac{1}{2}(4-x)$

$17-2^x=4^{2-\frac{x}{2}}$

$17-2^x=\dfrac{1}{2^x}$

$2^x=1 \qquad 2^x=16$

$x=0 \qquad x=4$

თ) $\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^{2-8x}}}\right)=0$

$\sqrt[3]{3^{x^{2-8x}}}=3^{-4}$

$\dfrac{x^{2-8x}}{3}=-4 \qquad x=2;\ 6.$

5. ა) $\lg(x^3+8)-0{,}5\lg(x+2)^2=\lg 7$

$x^2-2x+4=7 \qquad x>-2$

$x=3;\ x=-1.$

ე) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14-\lg\dfrac{1}{x}$

$(2+\lg x)^2+(1+\lg x)^2=14-\lg x$

$$\left[\begin{array}{l}\lg x=1\\ \lg x=-\dfrac{9}{2}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=\sqrt{10^{-9}}\end{array}\right.$$

6. $y=2^{x^2}$ (1) $\qquad z=2^{y^2}$ (2)

$x^2\geq 0 \Rightarrow y\geq 1 \Rightarrow y^2\geq 1 \Rightarrow 2^{y^2}\ z\geq 2 \qquad$ (1)-დან $x^2=\log_2 y \qquad$ (2)-დან $y^2=\log_2 z$

$x=\pm\sqrt{\log_2 y}$ რადგან $\log_2 z \geq 2$, ე.ი. $y=\sqrt{\log_2 z}$

მივიღეთ $x=\pm\sqrt{\log_2 y}=\pm\sqrt{0,5\log_2\log_2 z}$

8. გ) $\begin{cases} 2\log_2 x-3^y=15 \\ 3^y\log_2 x-2\log_2 x=3^{y+1} \end{cases}$

$\log_2 x=a$ $3^y\equiv b$

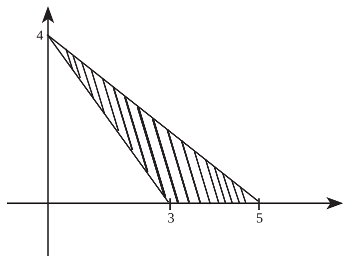
$\begin{cases} 2a-b=15 \\ 3ab-2a=3b \end{cases}$, საიდანაც $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=p \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=-10 \end{cases} \end{array}\right.$ $(2^9;1)$

10. ა) $y=\log_2(2^x+3)$ და $y=x+2$

$\log_2(2^x+3)=x+2$

$2^x+3=2^{x+2}$ $x=0$

11.



ა) $y=\log_2(x^2-8x+16)$

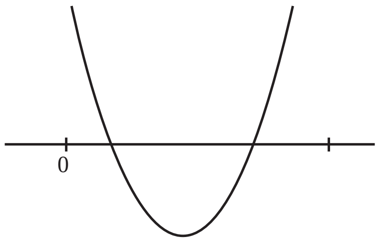
O_y: $x=0$ $\log_2 16=4$ $(0;4)$

O_x $y=0$ $\log_2(x^2-8x+16)=0$

$x^2-8x+16=1$ $(3;0)$; $(5;0)$

$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4.$

12.



$(p-3)x^2-2px+5p=0$

$x^2-\frac{2p}{p-3}x+\frac{5p}{p-3}=0$

$\begin{cases} D\geq 0 \\ f(0)>0 \\ x_0>0 \end{cases}$ $\left(3;\frac{15}{4}\right)$

8. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს მაჩვენებლიანი ან ლოგარითმული გამოსახულებებისთვის შესაბამისი აღნიშვნის შემოღება; მოცემული უტოლობის ამოხსნა და ფუძის გათვალისწინებით სწორი პასუხის დაწერა.

ამოხსნები, მითითებები:

I მაჩვენებლიანი უტოლობა

5. ბ) $4^x-2\cdot 5^{2x}-10^x>0$ გავყოთ $5^{2x}>0$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{5}\right)^{x} - 2 > 0$

$$\left[\begin{array}{ll}\left(\frac{2}{5}\right)^{x} < -1 & \varnothing \\ \left(\frac{2}{5}\right)^{x} > 2 & x < \log_{\frac{2}{5}} 2\end{array}\right.$$

6. $a^2-2\cdot4^{x+1}-a\cdot2^{x+1}>0$
$8\cdot4^x+2a\cdot2^x-a^2<0$
ცხადია $D>0$ და თუ $a\neq0$ სამწევრის ფესვები სხვადასხვანიშნიანია, რაც იმას ნიშნავს, რომ უტოლობას ამონახსნი ექნება.

7. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} - (5a-6)x + 4a^2 \leq 1$

$x^2-(5a-6)x+4a^2\geq0$

$(5a-6)^2-16a^2\leq0$

$a\in\left[\frac{2}{3};6\right]$.

II ლოგარითმული უტოლობა

2. ზ) $\log_5(x^2+x-1)>1$

$$\left.\begin{cases}x^2+x-1>0\\ x^2+x-1>5\end{cases}\right) \Rightarrow x^2+x-6>0$$

$x<-3$ ან $x>2$

თ) $\lg(x^2-6x+18)<1$

$$\begin{cases}x^2-6x+18>0\\ x^2-6x+18<10\end{cases} \quad (2;4)$$

ლ) $\log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3) \leq 0$

$$\begin{cases}\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)>0\\ \log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\geq1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-4x+3<1\\ x^2-4x+3\geq\frac{9}{16}\end{cases} \qquad \left(2-\sqrt{2};\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{13}{4};2+\sqrt{2}\right)$$

3. ე) $\log_{0,7}3\cdot\lg(2x-1)>0$ $\qquad \log_{0,7}3<0$

$\lg(2x-1)<0 \qquad x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$

ზ) $(x+5)\lg(x^2+1)>0 \qquad \lg(x^2+1)>0$
ე.ი. $x+5>0 \qquad x>-5$.

5. $\log_a(x^2-x-2)>\log_a(-x^2+2x+3)$

მივიღეთ $\log_a\frac{13}{16}>\log_a\frac{3}{16}$, ე.ი. $a>1$

$\begin{cases} x^2-x-2>-x^2+2x+3 \\ -x^2+2x+3>0 \end{cases}$ $x\in\left(\frac{5}{3};3\right)$

6. ბ) $\log_a(x^2+2x+2)<0$

თუ $a>1$ $x^2+2x+2<1$ $x\in\varnothing$.

ე.ი. $0<a<1$.

7. ა) $\log_a(x^2+2)>1$

თუ $0<a<1$ $x^2+2<a$ $x\in\varnothing$

თუ $a>1$ $x^2+2>a$

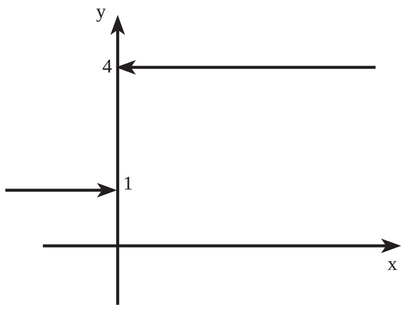
$x^2>a-2$

უტოლობა რომ შესრულდეს $x\in R$-სთვის $a-2<0$; $a<2$ ე.ი. $a\in(1;2)$.

9. ნახევრადლოგარითმული ბადე

ამოხსნები, მითითებები:

6. გ) $y=2^{\frac{|x|+x}{x}}=\left[\begin{array}{l} 4, \text{ თუ } x>0 \\ 1, \text{ თუ } x<0 \end{array}\right.$



9. $\begin{cases} 10a+b=a^2+b^2+12 \\ 10a+b=2ab+16 \end{cases}$ $(a-b)^2=4$ $\left[\begin{array}{l} a-b=2 \\ a-b=2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2+b \\ b=4 \end{cases} \\ a=b-2 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 64 \\ \varnothing \end{array}$

12. წრფეა. ა) x=lgx მივიღეთ y=x წრფის განტოლება.

x=lgx	10=lg10	100=lg100
y=x	1	1

ბ)

x=lgx	y=2x+0,5
1	y=2lg1+0,5=0,5
2	y=2lg2+0,5
3	y=2lg3+0,5
-	-
-	-
-	-
10	y=2·1+0,5=2,5

ტესტი

1. ა; 2. ბ; 3. გ; 4. დ; 5. გ; 6. გ; 7. გ; 8. ე; 9. ბ; 10. ბ.

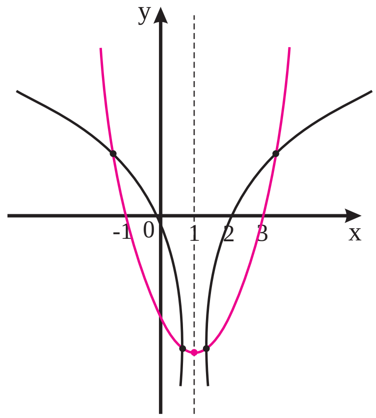
III თავის დამატებითი სავარჯიშოები

11. $x^2-2x-\log_2|1-x|=3$

$\log_2|1-x|=x^2-2x-3$

ავაგოთ $y=\log_2|1-x|$ და $y=x^2-2x-3$

ოთხი კვეთის წერტილი



12. $y=\left(3,6^{1+\log_{3,6}(10+x)}\right)^{\log_6(5-1)}$

O_y $x=0$ $y=2,5.$

14. ე) $3\cdot2^x+2\cdot3^x=2^{x+3}-2\cdot3^{x-2}$

$3^{x-2}(18+2)=2^{x-2}(32-12)$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}=1$ $x=2$

თ) $9^{x-1}+3^x=2\cdot3^{1,5-x}$ გავყოთ $3^x\neq0$

$\frac{1}{9}\cdot3^x+1=2\cdot3^{0,5x}$ $3^{0,5x}\equiv y$

$y^2-18y+9=0$

$y=3$ $x=2$

15. ბ) $\lg\sqrt{1-x}+3\lg\sqrt{1+x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2$

$$\lg\frac{1}{\sqrt{1+x}}+3\lg\sqrt{1+x}=2$$

$2\lg\sqrt{1+x} = 2, \qquad \sqrt{1+x} = 10$

არ აკმაყოფილებს, ე.ი. $x \in \varnothing$.

16. ა) $10x^{\lg x}+10x^{-\lg x}=101$

$10x^{\lg x}+\frac{10}{x^{\lg x}}=101 \qquad x^{\lg x}\equiv y$

$10y^2-101y+10=0$

$y_1=10 \quad y_2=\frac{1}{10}$

1) $x^{\lg x}=10$ ავილოთ ორივე მხარეს lg
$\lg x^{\lg x}=1;$

$\lg^2 x=1$

$\lg x=\pm 1$

$x=\frac{1}{10};10$

2) $x^{\lg x}=\frac{1}{10}$
$\lg^2 x=-1 \qquad \varnothing$

გ) $3\cdot x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64 \qquad a^{\log_c b} + b^{\log_c a}$

$4.\ 2^{\log_5 x} = 64$

$\log_5 x = 4 \qquad x=5^4.$

26. ა) $\begin{cases} x^2 - 2x - 2 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \le 0 \end{cases} \qquad x\in[-1;1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3};3]$

27. $8^{x+\frac{1}{3}} - 9\cdot 4^x + 4\cdot 2^x \ge 0$ შევკვეცოთ 2^x-ზე.

$2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4\ge 0$

$\left[\begin{array}{l} 2^x < \frac{1}{2} \\ 2^x > 4 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -1 \end{array}\right.$

IV თავი

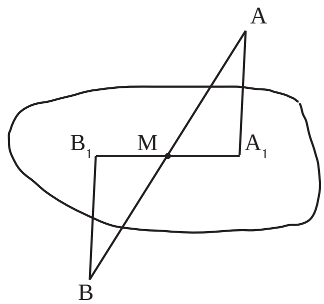
1. ფიგურათა პარალელური დაგეგმილება

ამოხსნები, მითითებები:

1. ერთი — თუ სამივე წერტილი მდებარეობს ისეთ წრფეზე, რომელიც დასაგეგმილებელი l წრფის პარალელურია, ორი — თუ წერტილი მდებარეობს l წრფის პარალელურ წრფეზე, სამი — თუ არც ერთი წყვილი ამ წერტილებისა არ მდებარეობს l წრფის პარალელურ წრფეზე.

2. ა) სიბრტყე, წრფე; ბ) ნახევარსიბრტყე, წრფე; გ) კუთხე, სხივი.

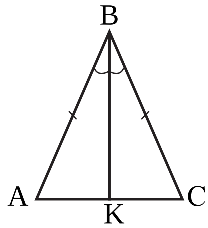
3. პარალელურია.



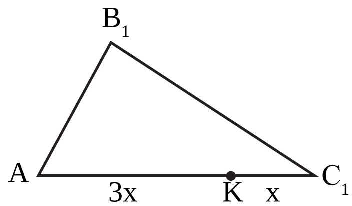
4. $MB \equiv x$; $AA_1 \| B_1B \Rightarrow \Delta AA_1M \sim \Delta BB_1M \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_1M}{B_1M} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{AM+MB}{MB} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow \frac{m}{MB} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow MB = \frac{mb}{a+b};$$

$AM = \dfrac{am}{a+b}$.

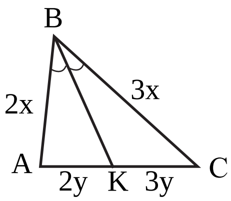


6. ა) ამოხსნა: ცხადია, AK=KC,
ე.ი. გამოსახულებაში $A_1K_1=K_1C_1$.

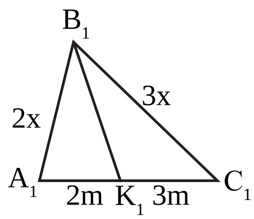


ბ) ეს მართობი AC გვერდს ყოფს შეფარდებით 3:1. აგება: გამოსახულებაზე. ვიღებთ ისეთ K წერტილს, რომ $A_1K_1:K_1C_1=3:1$.

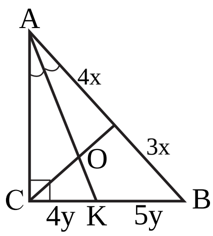
7.



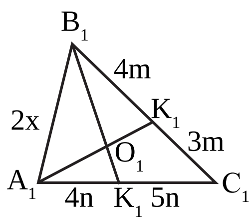
აგება: ABC სამკუთხედის გამოსახულებაზე A_1C_1 გვერდზე ვაგებთ ისეთ წერტილს, რომ $A_1K_1:K_1C_1=2:3$.

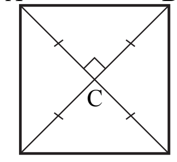


8.



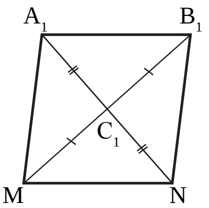
რადგან ჩახაზული წრეწირის ცენტრიც ბისექტრისების კვეთის წერტილია, ამიტომ ბისექტრისის თვისების თანახმად,
AK:KB=4:3 და CP:PB=4:5.
აგება: ვაგებთ K_1 და P_1 წერტილებს ისე, რომ $A_1K_1:K_1P_1=4:3$ და $C_1P_1:P_1B_1=4:5$. A_1P_1 და C_1K_1 წრფეების კვეთის წერტილი იქნება O წერტილის სახე (O_1 წერტილი).



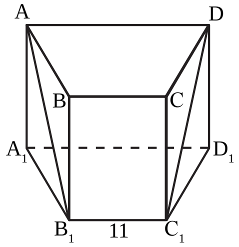


9. ა) გამოსახულებას შევავსებთ პარალელოგრამამდე (კათეტების გამოსახულების პარალელური წრფეებით).

აგება: გამოსახულებაში B_1C_1 სხივზე გადავდებთ $C_1M=C_1B_1$, ხოლო A_1C_1 სხივზე კი $C_1N=A_1C_1$ მონაკვეთებს. A_1B_1NM იქნება კვადრატის გამოსახულება.



10.

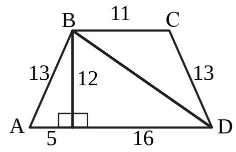


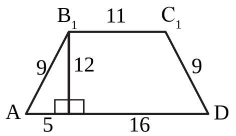
ამოვხაზოთ ფუძე.

$AK=\frac{21-11}{2}=5 \Rightarrow KD=16.$

$\Delta BKD \Rightarrow BD=20.$

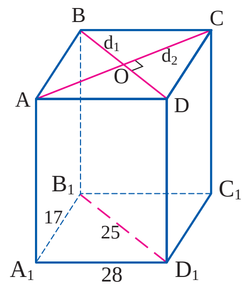
$S_{\text{კვ}}=180 \Rightarrow DD_1\cdot BD=180 \Rightarrow 20\cdot DD_1=180 \Rightarrow DD_1=9.$





ამოვხაზოთ A, B_1, C_1, D ტრაპეცია. $B_1P=2\sqrt{13}$. $S_{AB_1C_1D}=\frac{27}{2}\cdot 2\sqrt{13}=27\sqrt{13}$

პასუხი: $27\sqrt{13}$.



11. ამოხსნა: ABCD პარალელოგრამია, ე.ი. $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2) \Rightarrow d=39$.
ვიპოვოთ ფუძის ფართობი $S=2\sqrt{35\cdot 10\cdot 7\cdot 18}=420$.

$\frac{64H}{420}=\frac{16}{15}$, $H=7$. $S_1=d_1H=39\cdot7=273$სმ^2. $S_2=d_2H=25\cdot7=175$სმ^2.

12. SO იყოს პირამიდის სიმაღლე. SC კი პირამიდის გვერდითი წიბოა. ამოვხაზოთ SOC სამკუთხედი.

ა) სამკუთხა პირამიდისთვის OC არის $\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. $SO=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$.

ბ) ოთხკუთხა პირამიდისთვის OC არის დიაგონალის ნახევარი, ე.ი. $OC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $S_O=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
$SO=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$.

გ) ექვსკუთხა პირამიდისთვის OC არის ფუძის გვერდის ტოლი $OC=a$, ე.ი. $SO=\sqrt{b^2-a^2}$.

13. იხილეთ ამოცანა 12-ის ნახაზი. $SO=7$. $OC=\frac{9\sqrt{2}}{2}$. $SC=\sqrt{7^2+\frac{81}{2}}=\sqrt{89,5}$.

2. კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა მართობულობა

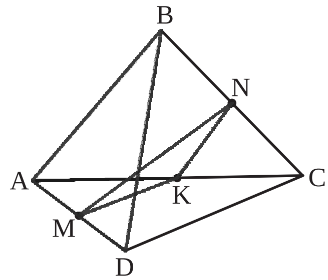
ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) $(\widehat{OA;CD})=50°$; ბ) $(\widehat{OA;CD})=20°$; გ) $(\widehat{OA;CD})=90°$.

3. ა) თუ დავუშვებთ, რომ $a\|AC$, და გავითვალისწინებთ, რომ პირობის თანახმად $a\|BD$, მივიღებთ, რომ $AC\|BD$, რაც შეუძლებელია. კუთხე a წრფესა და AC წრფეს შორის ტოლია კუთხის BD და AC წრფეებს შორის. ე.ი. 90°-ის.
ბ) a და AD წრფეების აცდენილობა ა) შემთხვევის ანალოგიურია, კუთხე a და AD წრფეებს შორის ტოლია AD და BD-ს შორის კუთხის, ე.ი. $\frac{\angle ABC}{2}=57°30'$.

4. $BN=NC$; $AM=MD$.
N წერტილზე ABC სიბრტყეში გავატაროთ $NK\|AB$ $\angle MNK$ ტოლია MN და AB წრფეებს შორის

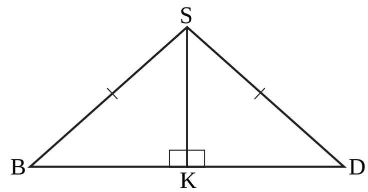
კუთხისა. რადგან BN=NC და NK||AB. ე.ი. AK=KC და NK ABC სამკუთხედის შუახაზია. გავავლოთ ADC სიბრტყეში M წერტილზე DC-ს პარალელური წრფე. რადგან AM=MD, ეს წრფე AC-ს შუაწერტილზე, ე.ი. K წერტილზე გაივლის. MK ADC სამკუთხედის შუახაზია. $MK=\frac{DC}{2}$; $KN=\frac{AB}{2}$, მაგრამ AB=DC ე.ი. MKN სამკუთხედი ტოლფერდაა და ∠MNK=∠NMK, რ.დ.გ.



5. ა) მოცემულობის თანახმად ABCD მართკუთხედია, ე.ი. $DC\perp BC$, ამავე დროს $BC\parallel B_1C_1$, ე.ი. $DC\perp B_1C_1$. ანალოგიურად, $AB\perp A_1D_1$.

6. ტოლი წიბოებია AS=SC და SB=SD. ABCD პარალელოგრამიდან $\Rightarrow d_1^2+d_2^2=2(7^2+3^2) \Rightarrow$ $BD^2+36=2(49+9) \Rightarrow BD^2=80$.
$\Delta SOC \Rightarrow SC^2=SO^2+OC^2 \Rightarrow SC^2=16+9 \Rightarrow SC=5$.
$\Delta SOD \Rightarrow SD^2=16+((2\sqrt{5})^2 \Rightarrow 16+20 \Rightarrow SD=6$.
SO — პირამიდის სიმაღლეა, SK — აპოთემა. მაშინ
ა) სამკუთხა პირამიდისთვის $OK=\frac{1}{3}h=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SK=\sqrt{h^2-\frac{a^2}{6}}$;
ბ) ოთხკუთხა პირამიდისთვის $OK=\frac{1}{2}a \Rightarrow SK=\sqrt{h^2-\frac{a^2}{4}}$;
გ) ექვსკუთხა პირამიდისთვის OK არის a გვერდის მქონე ექვსკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი, ე.ი. $OK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SK=\sqrt{h^2-\frac{3a^2}{4}}$.

8. ამოვხაზოთ დიაგონალური კვეთა. BD ფუძის დიაგონალი, ე.ი. $BD=14\sqrt{2}$. BS=SD=10. $SK=\sqrt{100-98}=\sqrt{2}$.
$S=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 14\sqrt{2}=14$.



9. $S_{კვ}:Q=1:4 \Rightarrow S_{კვ}=\frac{Q}{4}$.

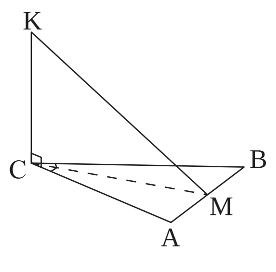
3. წრფისა და სიბრტყის მართობულობა

ამოხსნები, მითითებები:

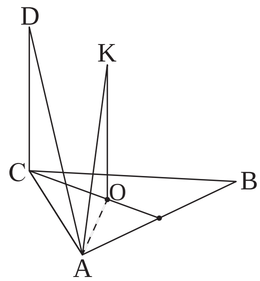
2. ა) OB AD მონაკვეთის შუამართობია;
ბ) ΔAOB=ΔAOC (AO საერთოა; OB=OC; ∠AOB=∠AOC=90°).

3. ცხადია, ΔAOK=ΔBOK=ΔCOK=ΔDOK, ე.ი. $KA=KB=KC=KD=\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+b^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}$.

4. $(AC=6; BC=8) \Rightarrow AB=10$. AM=MB. ე.ი $CM=\frac{AB}{2}=5$.
ΔCKM-ში∠C მართია CK=12 CM=5 პითაგორის თეორემით KM=13.



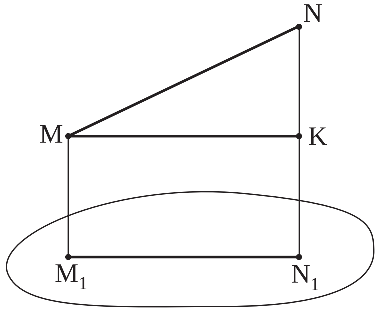
5. ABC სამკუთხედის ტოლგვერდობის გამო DA=DB და KA=KB.



განვ. ΔDAC $\angle DCA=90°$; $DC=16$; $AC=16\sqrt{3}$, ე.ი. $AD=\sqrt{16^2+(16\sqrt{3})^2}=32$.
AOK-ში $\angle AOK=90°$ ($DC \| OK$).

$$AO=\frac{AC\sqrt{3}}{3}=\frac{16\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3}=16;\ OK=12.\ \text{ე.ი.}\ AK=\sqrt{16^2+12^2}=20.$$

6. ΔMNK-ში $\angle K=90°$;

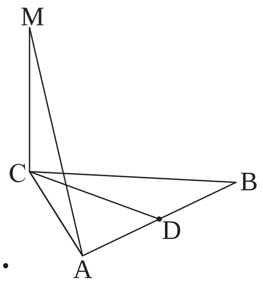


$MN=30$
$NK=NN_1-MM_1=24$.
ე.ი. $M_1N_1=MK=\sqrt{MN^2-NK^2}=$
$=\sqrt{30^2-24^2}=18$.

4. წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი

ამოხსნები, მითითებები:

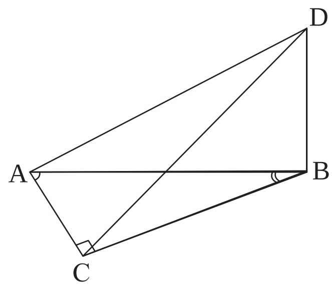
2. $AC=BC=10$; $AB=12$; $AD=DB=6$.



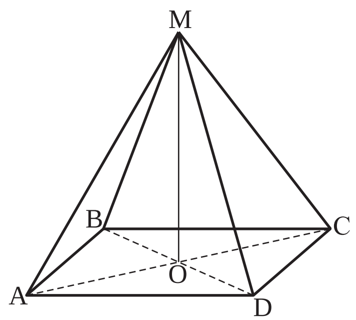
ΔACD-დან
$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=8$. $(MC\perp AC;\ MC\perp CB)\Rightarrow MC\perp(ABC)\Rightarrow$
$\Rightarrow MC\perp CD$.
ე.ი. ΔMCD-ში $MD=\sqrt{MC^2+CD^2}=\sqrt{225+64}=17$.

3. ΔABC-ში $\angle A+\angle B=90°$. ე.ი. $\angle C=90°$.
$DB\perp(ABC)$.
ე.ი. DB მართობია ABC სიბრტყის ნებისმიერი წრფის. მივიღეთ, რომ

$$\left.\begin{matrix}AC\perp DB\\ AC\perp BC\end{matrix}\right\}\Rightarrow AC\perp(BCD)\Rightarrow AC\perp DC.$$ რ.დ.გ.



4.



$$\left.\begin{matrix}\Delta AMC\text{–ში}\ \left.\begin{matrix}AM=MC\\ AO=OC\end{matrix}\right\}\Rightarrow MO\perp AC\\ \text{ანალოგიურად}\ \Delta MBD\text{–ში}\ MO\perp BD\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

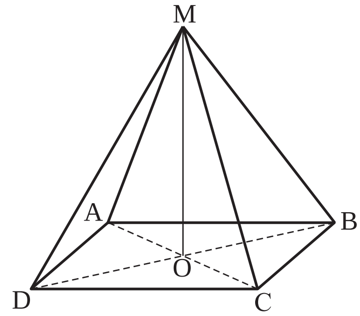
$\Rightarrow MO\perp(ABCD)$.

5. $(\angle MAB=\angle MAD=90°)\Rightarrow MA\perp(ABCD)$

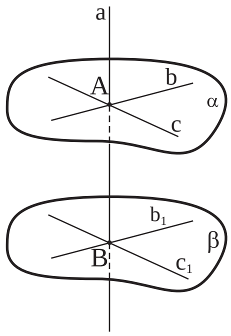
ა) ΔMAD-დან $MD=\sqrt{MA^2+AD^2}=\sqrt{25+72}=\sqrt{97}$.

$AC=AD\sqrt{2}=12$. ΔMAC-დან $MC=\sqrt{AM^2+AC^2}=\sqrt{25+144}=13$.

ბ) ΔAMO-დან $MO=\sqrt{MA^2+AO^2}=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}$.

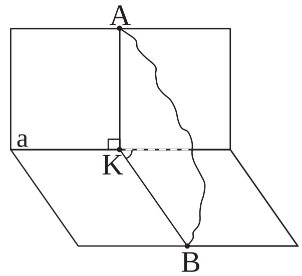


6.



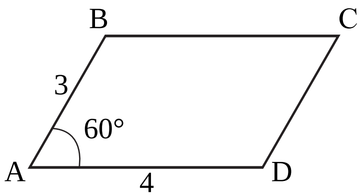
α||β; a⊥α. უ.დ. a⊥β. $(a\perp\alpha)\Rightarrow a\perp b;\ a\perp c$.
გავავლოთ α და β-ს გადაკვეთის B წერტილზე $b_1||b$ და $c_1||c$.

ცხადია, $a\perp b_1$ და $a\perp c_1$. ე.ი. a⊥β.



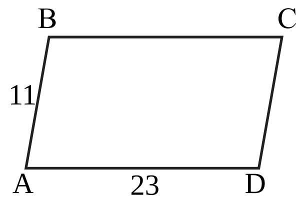
7. A წერტილზე და a წრფეზე გავავლოთ სიბრტყე. ამ სიბრტყეში დავუშვათ AK⊥a. K წერტილზე გავავლოთ a წრფის პერპენდიკულარული ნებისმიერი წრფე, რომელიც (a;A) სიბრტყეში არ მდებარეობს KB⊥a. სიბრტყე, რომელიც გადის AK და KB წრფეებზე a წრფის მართობელია. ერთადერთობა დავამტკიცოთ წინააღმდეგობის დაშვებით.

8.



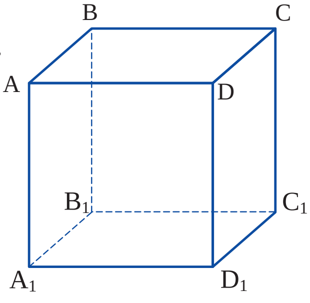
ფუძის გვერდებია a=3 და b=4. გვერდითი წიბო აღვნიშნოთ h-ით, ე.ი. $h^2=ab\Rightarrow h=2\sqrt{3}$. პარალელეპიპედის დიაგონალები აღვნიშნოთ d_1 და d_2-ით. ამოვხაზოთ ფუძე $BD^2=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=13$.

$d_1^2=h^2+BD^2=12+13=25\Rightarrow d_1=5$
$d_1^2=h^2+AC^2=12+37\Rightarrow d_2=7$

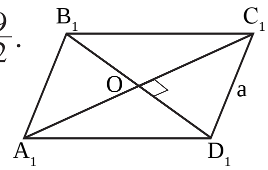


9. ABCD პარალელოგრამი პარალელეპიპედის ფუძეა AC:BD=3:2 $\Rightarrow AC=3x$ და $BD=2x$. $(3x)^2+(2x)^2=2(23^2+11^2)\Rightarrow 13x^2=1300\Rightarrow x=10$.
$S_1=AC\cdot h=30\cdot1=30;\ S_2=BD\cdot h=20$.

10.



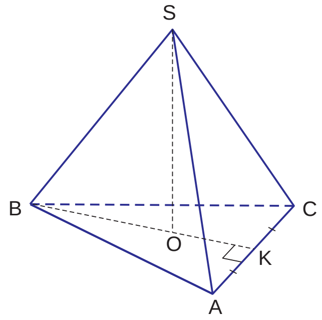
$A_1C=8$ და $BD_1^2=5$, h=2. $BD_1^2=h^2+B_1D_1^2\Rightarrow B_1D_1^2=21$.
$A_1C^2=h^2+A_1C_1^2\Rightarrow 64=A_1C_1^2+4\Rightarrow A_1C_1^2=60$.
$\Delta C_1OD_1\Rightarrow a^2=\left(\frac{A_1C_1}{2}\right)^2+\left(\frac{B_1D_1}{2}\right)^2=\frac{81}{4}\Rightarrow a=\frac{9}{2}$.



11. ა) 4; ბ) 18.

5. პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილი

ამოხსნები, მითითებები:

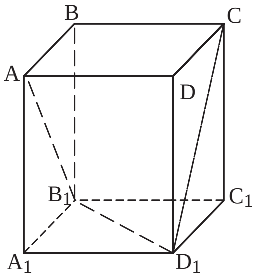


2. $\Delta BKC \Rightarrow BC^2=9^2+3^2 \Rightarrow \sqrt{90}=3\sqrt{10}$. $SB=SC=SA \Rightarrow O$ წერტილი შემოხაზული წრეწირის ცენტრია $R=\dfrac{3\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}\cdot 6}{4\cdot 9\cdot 3}=5$.

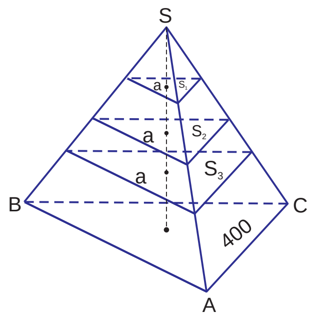
$\Delta SOB \Rightarrow SO=\sqrt{169-25}=12$.

3. ფუძის დიაგონალია 10 სმ. $h^2=13^2-5^2 \Rightarrow h=12$.

5.



I. ვიპოვოთ AB_1 და CD_1 წრფეებს შორის მანძილი. გავავლოთ $DC_1 \| AB_1$. მანძილი ამ წრფეებს შორის არის AB_1 წრფიდან D_1DCC_1 სიბტრყემდე მანძილი. $AD \perp D_1DCC_1$ სიბრტყის $AD=2$ მ. ანალოგიურად დანარჩენ პარალელურ სიბრტყეთა წყვილებს შორის მანძილი იქნება 1 მ და 3 მ.



7. პირამიდის სიმაღლე გაყოფილია 4 ტოლ ნაწილად. თითოეული ეს ნაწილი აღვნიშნოთ h-ით, მაშინ

$$\frac{S_1}{400}=\frac{(h)^2}{(4h)^2} \Rightarrow S_1=25; \quad \frac{S_2}{400}=\frac{1}{4} \Rightarrow S_2=100;$$

$$\frac{S_3}{400}=\frac{(3h)^2}{(4h)^2} \Rightarrow S_3=225.$$

8. $S_{\text{კვ}}+200=S_{\text{ფ}}$

$$\frac{S_{\text{კვ}}}{S_{\text{ფ}}}=\frac{(3h)^2}{(7h)^2}=\frac{9}{49} \Rightarrow \frac{S_{\text{ფ}}-200}{S_{\text{ფ}}}=\frac{9}{49} \Rightarrow 49S_{\text{ფ}}-9800=9S_{\text{ფ}}.$$

$40S_{\text{ფ}}=9800 \Rightarrow S_{\text{ფ}}=245$.

9. ვთქვათ ეს კვეთა არის ფუძიდან x მანძილზე, მაშინ

$$\frac{S_{\text{კვ}}}{S_{\text{ფ}}}=\frac{(16-x)^2}{(16)^2} \quad \Rightarrow x=6.$$

10. პირამიდის სიმაღლე აღვნიშნოთ h-ით.

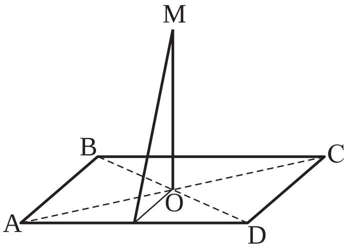
$$\frac{S_{\text{კვ}}}{S_{\text{ფ}}}=\frac{(h-14)^2}{h^2} \Rightarrow \frac{54}{150}=\frac{(h-14)^2}{h^2} \Rightarrow \left(\frac{(h-14)}{h}\right)^2=\frac{9}{25}=\frac{h-14}{h}=\frac{3}{5} \Rightarrow 5h-70=3h \Rightarrow 2h=70;\ h=35.$$

6. სამი მართობის თეორემა

ამოხსნები, მითითებები:

1. ორ შემთხვევას განსაზღვრავს EF წრფის M სიბრტყეზე გეგმილის მდებარეობა.

3.

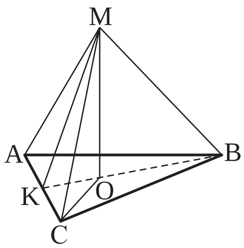


$$MK = a; \quad AC = d$$

$$OK = \frac{AD}{2} = \frac{d}{2\sqrt{2}}$$

$$MO = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{8}}$$

4.



$$MA = MB = MC = 5$$

$$MK = \sqrt{13}$$

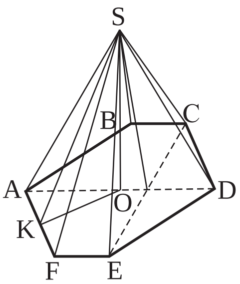
$$AB = AC = BC \equiv a$$

$$\begin{cases} MO^2 = MK^2 - KO^2 \\ MO^2 = MC^2 - CO^2 \end{cases} \Rightarrow 25 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 13 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2,$$

საიდანაც $a^2 = 48.$

$$MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = \sqrt{25 - \frac{48}{3}} = 3.$$

6.



$SA = SF = \sqrt{10} \quad SK = \sqrt{8}$ უ.ვ. OP.

AOF ტოლგვერდა სამკუთხედია.

ΔASK – დან $\quad AK = \sqrt{10-8} = \sqrt{2}.$

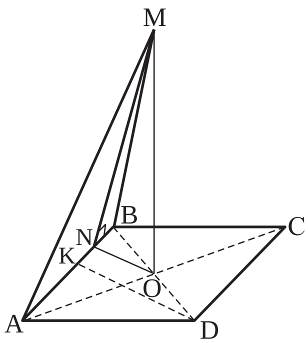
$$AF = 2\sqrt{2}.$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{10-8} = \sqrt{2}.$$

$$OP = PD = \frac{OD}{2} = \sqrt{2}.$$

ΔSOP – ში $\quad SP = \sqrt{SO^2 + OP^2} = \sqrt{2+2} = 2.$

7.



$$AB = BC = CD = AD = a = \sqrt{65}$$

$$MN = 2a$$

$$\angle BAD = 60°.$$

ე.ი. ABD სამკუთხედი ტოლგვერდაა

$$DK \perp AB$$

$ON \perp AB; \ OB = OD$ ე.ი. $KN = NB.$

მივიღეთ $NB = \frac{AB}{4} = \frac{a}{4}.$

ΔMNB – ში $\quad MB = \sqrt{MN^2 + NB^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{65}}{4} = \frac{65}{4}.$

8. ვთქვათ უნდა გავავლოთ წვეროდან x მანძილზე

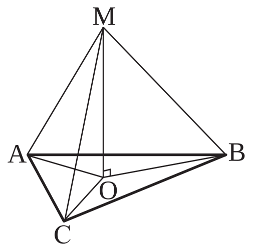
ა) $\frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{h}{3};$ $\quad$ ბ) $\frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{h}{5}.$

9. ა) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{2}ah$; ბ) a^2+2ah; გ) $\frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2}+3ah$.

7. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის

ამოხსნები, მითითებები:

2.



$AB=BC=AC=7\sqrt{6}$

$\angle MAO=\angle MBO=\angle MCO=45°$.

უ.უ. MA.

$MO=AO=R_{ABC}=\frac{AB\sqrt{3}}{3}=7\sqrt{2}$.

$AM=AO\sqrt{2}=14$.

4. ნახაზი წინა ამოცანა 2-ის.

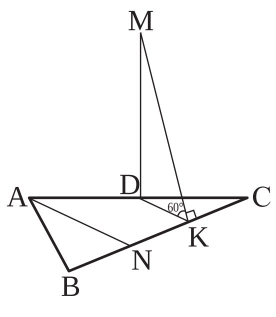
$AB=c=29 \quad AC=b=5 \quad BC=a=30$

$\angle MAO=\angle MBO=\angle MCO=\alpha; \quad \cos\alpha=\frac{29}{48};$

$OA=OB=OC=R_{ABC}=\frac{abc}{4S}=\frac{29\cdot30\cdot5}{4\sqrt{32\cdot2\cdot3\cdot27}}=\frac{29\cdot25}{48}$

$MB=\frac{R}{\cos\alpha}=\frac{29\cdot25\cdot48}{48\cdot29}=25.$

5.



$AN\perp BC$. გავატაროთ $DK\|AN$; $AD=DC$. $DK\perp BC$, ე.ი. $DK=\frac{AN}{2}$

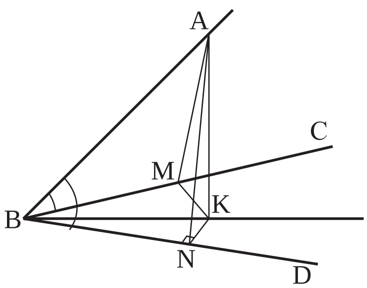
ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის AN სიმაღლე. AN=12; DK=6.

ΔMDK – ში $\angle D=90°$ $DK=6$. ე.ი. MK=12.

MDK სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი

ტოლია $\frac{MK}{2}=6$. $S_R=\pi R^2=36\pi$.

6.



დავუშვათ A წერტილიდან (BCD) სიბრტყეში მართობი AK. უ.დ. რომ BK CBD კუთხის ბისექტრისაა.

$KM\perp BC$; $KN\perp BD$ სამი მართობის თეორემით, $AM\perp BC$ და $AN\perp BD$.

$\Delta ABM=\Delta ABN$ ($\angle ABM=\angle ABN$; AB საერთოა). ე.ი. $BM=BN$.

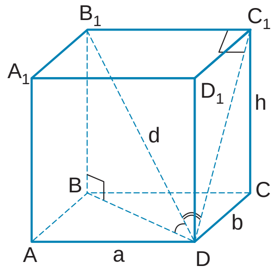
განვ. ΔMBK და ΔNBK. ეს სამკუთხედები ტოლია (BK საერთოა). ე.ი. $\angle MBK=\angle NBK$, რ.დ.გ.

8. $\Delta B_1C_1D \Rightarrow B_1C_1=3x$ და $d=4x \Rightarrow x=\frac{d}{4}$.

$\Delta B_1BD \Rightarrow \frac{h}{4x}=\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow h=\sqrt{3}\,d=\frac{\sqrt{3}\,d}{4};\;\; a=\frac{3d}{4}$.

$\Delta B_1BD \Rightarrow BD^2=d^2-h^2=13x^2$.

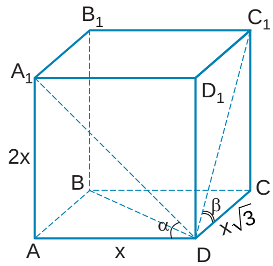
$\Delta ABD \Rightarrow a^2+b^2=13x^2 \Rightarrow b^2=4x^2 \Rightarrow b=2x=\frac{d}{2}$.



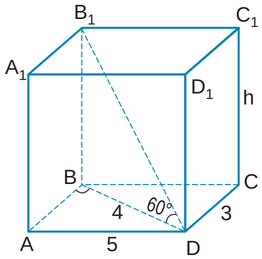
9. $\left.\begin{aligned} ctg\alpha &= \frac{1}{2} \\ ctg\beta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA_1 = 2x,\ AD = x$ და $DC = \sqrt{3}x$

ABCD მართკუთხედია, ე.ი. $BD=2x$.

ΔB_1BD მართკუთხაა, კათეტები $BB_1=BD=2x$, ე.ი. საძიებელი კუთხეა $45°$.



10.



ΔABD-ში $AB=3$; $BD=4$ და $AD=5 \Rightarrow \angle ABD=90°$.

$\Delta B_1BD \Rightarrow BB_1\equiv h=4\sqrt{3}$.

ABCD პარალელეპიპედიდან $(AC)^2+4^2=2(3^2+5^2) \Rightarrow AC^2=52$.

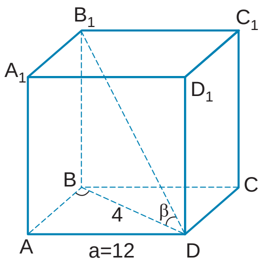
$\Delta ACC_1 \Rightarrow AC_1^{\,2}=h^2+AC^2=52+48=100 \Rightarrow AC_1=10$.

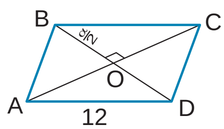
11. ამოვხაზოთ ფუძე (რომბი)

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow BO = 12\cdot\frac{1}{3}=4 \Rightarrow BD=8$.

$\Delta B_1BD \Rightarrow \frac{BD}{BB_1}=8 \Rightarrow BB_1=1$.

$S_{გვ}=4ah=4\cdot 2=48$.



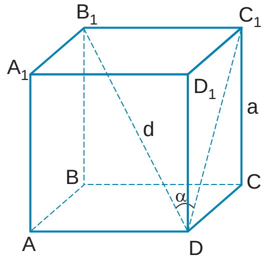


12. პრიზმის ფუძეა კვადრატი. გვერდი აღვნიშნოთ a-თი.

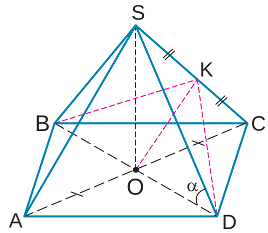
$\Delta B_1C_1D \Rightarrow \frac{a}{d} = \sin\alpha \Rightarrow a = 3\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3} = 2\sqrt{3}$.

ხოლო $C_1D^2=d^2-a^2=9\cdot 3-4\cdot 3=15$.

$\Delta C_1CD \Rightarrow C_1C^2=C_1D^2-a^2=15-12=3$. $a=\sqrt{3}$.



13. BD დიაგონალზე SA წიბოს პარალელურად უნდა გავავლოთ β სი-ბრტყე. გვაინტერესებს ეს სიბრტყე სად გადაკვეთს SC წიბოს. $O\in\beta$. გავავლოთ $OK\|AS$. ცხადია, $OK\in\beta$, OK არის ΔACS-ის შუახაზი.

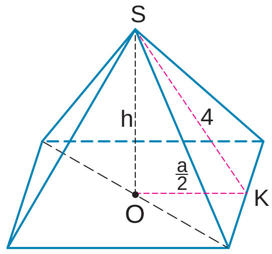


$\left.\begin{aligned} &\text{ABCD კვადრატია} \Rightarrow BD\perp AC \\ &\text{SO პირამიდის სიმაღლეა} \Rightarrow BD\perp SO \end{aligned}\right) \Rightarrow BD \perp (SOC)$ სიბრტყის

(ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფის მართობულია). ე.ი. $\left.\begin{aligned} &BD \perp OK \\ &\text{განვ. } \triangle BKD \end{aligned}\right) \Rightarrow S_{\triangle BKD} = \frac{1}{2}BD\cdot OK$.

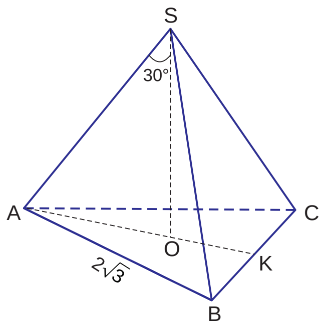
$OK=\frac{1}{2}AC=3,5$. $\Delta SOD \Rightarrow \frac{OD}{SD}=\cos\alpha \Rightarrow OD=7\cdot\frac{6}{7}=6 \Rightarrow BD=12$.

$S_{\Delta BKD}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 3,5=21$.

14. 

აპოთემა აღვნიშნოთ H. $S_{გვ}=4\cdot\frac{1}{2}a\cdot H=2aH$.

$\Delta SOK \Rightarrow H=\sqrt{h^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{4h^2-a^2}}{2}$. $a=\frac{P}{\sqrt{4h^2-a^2}}$.



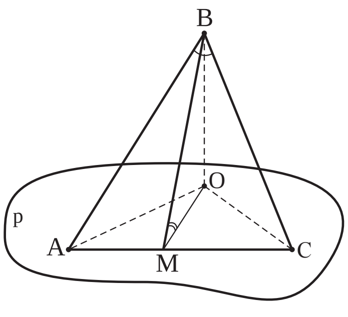
15. $\Delta ABC \Rightarrow AK=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=3$. $AO=\frac{2}{3}AK=2$.

$\Delta AOS \Rightarrow AS=4$.

16. აპოთემა იქნება SK (იხ. ამოცანა 15-ის ნახაზი). ფუძის გვერდი იყოს a.
$S_{გვ}=3\cdot\frac{1}{2}a\cdot SK=12a$.
$\Delta SOK \Rightarrow OK=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3} \Rightarrow AK=12\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=24$.
$S_{გვ}=12\cdot 24=288$.

8. ორწახნაგა კუთხე

ამოხსნები, მითითებები:

1. 

მოც.: AB=BC. $\angle B=\beta$; $\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

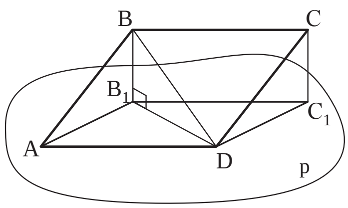
$(\widehat{(ABC);p})$ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

უ.ვ. $\angle BAO$. $BM\perp AC$, ე.ი. AM=MC და $\angle BMO=\alpha$.

$AB\equiv a$. ΔABM – ში $BM=AB\cos\frac{\beta}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

ΔBOM – ში $BO=BM\sin\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, ე.ი.

ΔABO – ში $AB=a$ $BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. მივიღეთ: $\angle BAO=45°$.

2. 

მოც.: ABCD კვადრატი.

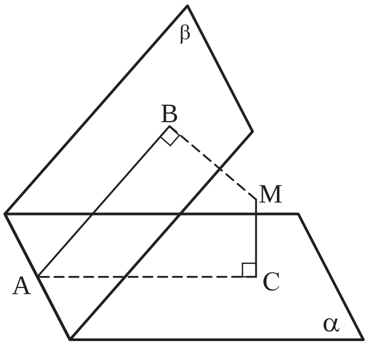
$(\widehat{(ABC);p})=\alpha$; $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

უ.ვ. $\sin\widehat{BDB}$.

$\alpha = \angle BAB_1$ ე.ი. თუ AB≡a, მაშინ $BB_1 = a\sin\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{5}$.

ΔBB_1D – ში $BB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{5}$ $BD = a\sqrt{2}$ ე.ი. $\sin BDB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{5a\sqrt{2}} = 0{,}2$.

6.



მოც.: $(\widehat{\alpha;\beta}) = 60^\circ$ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

$MC \perp \alpha$; $MB \perp \beta$; $MC = MB = 13$.

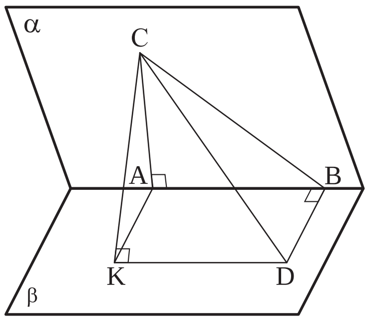
უ.ვ. MA.

$\Delta MCA = \Delta MBA$ ($BM = CM$;

AM საერთოა).

ე.ი. ∠BAM=∠MAC=∠BAC:2=30°. AM=2MC=26.

7.



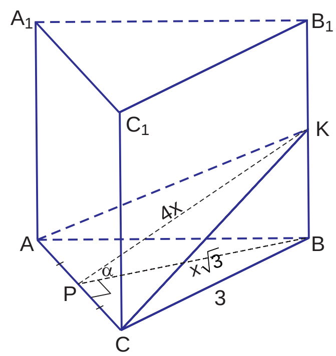
ა) $(\widehat{\alpha;\beta}) = 120^\circ$. AC=AB=a. გავავლოთ AK||BD; AK=BD.

∠CAK=120°. ΔCAK-ში $CK = a\sqrt{3}$.

ΔCKD – ში $CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = 2a$.

ბ) AB=3; AC=2; BD=1. ანალოგიურად ΔCAK-ში კოსინუსების თეორემით ვიპოვოთ $CK^2=7$.

ΔCKD-ში $CD=\sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{7+9} = 4$.



8. $\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BP = \sqrt{3}\,x \text{ და } KP = 4x \\ \triangle ABC \Rightarrow BP = \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} = 4x \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$S_{\Delta AKC}=\frac{1}{2}AC \cdot KP = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$

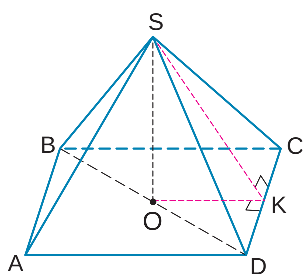
9. $S_{გვ}=P_{ABC}\cdot B_1B$ (იხილეთ მე-8 ამოცანის ნახაზი).

$BP=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. $tg60^\circ = \frac{KB}{BP} \Rightarrow KB = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2}$. $BK=KB_1 \Rightarrow BB_1=9$. $S_{გვ}=9\cdot 9=81$.

10. $\cos\alpha=\frac{2}{3} \Rightarrow OK=2x$ და $SK=3x$. $OK=\frac{a}{2}=3$, ე.ი. x=1,5.

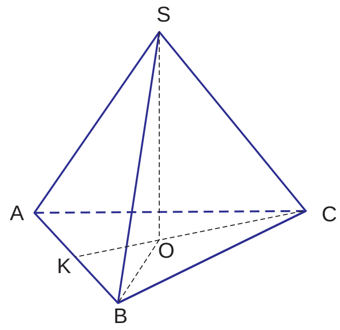
SK=4,5.

$S_{\Delta SOC}=\frac{1}{2}SK\cdot DC=4{,}5\cdot 6=27$.



11. $\angle DSC=\alpha \Rightarrow \angle DSK=\frac{\alpha}{2}$ (იხილეთ წინა მე-10 ამოცანის ნახაზი). $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3} \Rightarrow DK=x$ და $SK=3x$, მაგრამ $DK=\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{21}}{2}=x$, ე.ი. $SK=\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

$S=S_{ფ}+S_{გვ}=a^2+2a\cdot SK=21+2\sqrt{21}\cdot\frac{3\sqrt{21}}{2}=21+63=84.$



12. $\angle SKO=\alpha.\ \cos\alpha=\frac{1}{3}=\frac{OK}{SK} \Rightarrow OK=x$ და $SK=3x$.

$\Delta SOK \Rightarrow 9x^2=x^2+(\sqrt{3})^2 \Rightarrow 8x^2=3 \Rightarrow x=2\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow SK=3x=6\sqrt{\frac{3}{2}}=3\sqrt{6}.$

13. განვ.: ΔSOB. $SB=11$ და $\angle SBO=30° \Rightarrow \cos30°=\frac{OB}{SB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{OB}{11} \Rightarrow OB=\frac{\sqrt{3}\cdot 11}{2}$.

$\Delta ABC \Rightarrow SK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, მაგრამ $\frac{2}{3}SK=OB=\frac{\sqrt{3}\cdot 11}{2}$. მივიღეთ: $\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot 11}{2} \Rightarrow a=\frac{33}{2}$ (იხილეთ წინა მე-12 ამოცანის ნახაზი).

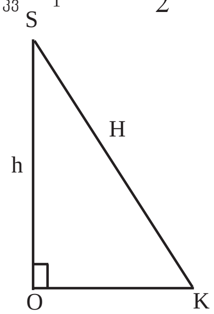
14. რადგან გვერდითი წახნაგები ფუძისადმი ტოლი კუთხეებითაა დახრილი, ე.ი. O წერტილი ფუძეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია (იხილეთ მე-12 ამოცანის ნახაზი) (1). ΔABC წესიერია, ე.ი. (1)-ის გათვალისწინებით პირამიდა წესიერია, რ.დ.გ.

15. $S=S_{ფ}+S_{გვ} \Rightarrow 16=a^2+2a\cdot SK$ (იხილეთ მე-10 ამოცანის ნახაზი). $SK\equiv x$. $\Delta SKD \Rightarrow 25=x^2+\frac{a^2}{4}$.

მივიღეთ სისტემა: $\left(\begin{cases}4x^2+a^2=100 \\ a^2+2ax=16\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 4\\ \cdot 25\end{matrix}\right.\right) \Rightarrow \left(\begin{cases}16x^2+4a^2=400 \\ 25a^2+50ax=400\end{cases}\right)$.

$16x^2+4a^2=25a^2+50ax$ ერთგვაროვანი განტოლებიდან მივიღებთ, რომ $\frac{x}{a}=\frac{7}{2}$, საიდანაც სისტემის ერთ-ერთ განტოლებაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ, რომ $a=\sqrt{2}$.

16. ფუძის დიდი დიაგონალია 2a. დიაგონალური კვეთის ფართობი იქნება $S_{კკ}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h=ah$. აპოთემა აღვნიშნოთ H-ით. მაშინ გვერდითი წახნაგის ფართობი იქნება: $S_1=\frac{1}{2}a\cdot H$. პირობის თანახმად: $S_{კკ}=S_1 \Rightarrow ah=\frac{1}{2}a\cdot H \Rightarrow H=2h$.



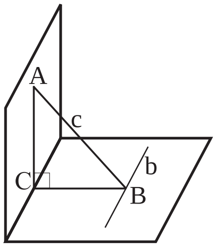
OK არის ტოლგვერდა (a გვერდით) სამკუთხედის სიმაღლე. $OK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (განიხილეთ ფუძის ექვსკუთხედი).

$H^2=h^2+OK^2 \Rightarrow 4h^2=h^2+\frac{a^2 3}{4} \Rightarrow 3h^2=\frac{a^2 3}{4} \Rightarrow h=\frac{9}{2}$.

$S_{გვ}=6\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot H=3a^2.$

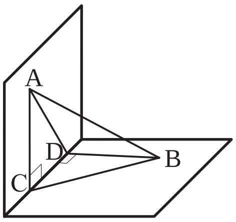
9. მართობული სიბრტყეები. სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანი

ამოხსნები, მითითებები:

1. 

მანძილი A წერტილიდან b წრფემდე ტოლია AB-ს. CB⊥c.

$AB=\sqrt{0{,}25+1{,}44}=1{,}3$.

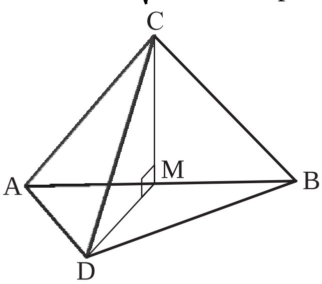
4. 

ე) AC=1; BD=b; CD=c.
უ.ვ. AB.
$\Delta ACD:\ AD=\sqrt{a^2+c^2}$

$\Delta ADB:\ AB=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

ვ) AD=m; BC=n; CD=p.
უ.ვ. AB.
$\Delta ACD:\ AC^2=m^2-p^2$

$\Delta ACB:\ AB=\sqrt{m^2+n^2-p^2}$

5. 

AC=CB; $\angle ACB=90°$.
AD=DB; $\angle ADB=90°$; AB=$5\sqrt{2}$.
$(\widehat{(ACB)(ADB)})=90°$. უ.ვ. CD.
დავუშვათ CM⊥AB, ე.ი. $\angle CMD=90°$.
მართკუთხა ტოლფერდა ACB და ADB სამკუთხედებში

CM=$\dfrac{AB}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$=DM, ე.ი. CDM სამკუთხედში CD=CM$\sqrt{2}$=5.

6. (იხილეთ წინა მე-5 ამოცანის ნახაზი). AC=AD=3; BC=BD=4, უ.ვ. CD.
AB=$\sqrt{AC^2+CB^2}=\sqrt{AD^2+DB^2}=5$. CM=DM=$\dfrac{3\cdot 4}{5}=\dfrac{12}{5}$, ე.ი. CD=CM$\sqrt{2}=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$.

8. აჩვენეთ მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობა. ერთი კათეტია პირამიდის სიმაღლე, მეორე — ა) აპოთემა — ჰიპოტენუზა; ბ) და გ) მახვილი კუთხეები ტოლი აქვთ). სამივე შემთხვევაში ეს სამკუთხედები ტოლია სხვადასხვა ნიშნით.

10. რადგან სიმაღლე გადის დიაგონალების კვეთის წერტილზე, ანუ ჩახაზული წრეწირის ცენტრში, ეს ნიშნავს, რომ გვერდითი წახნაგების (პირამიდის წვეროდან გავლებული) სიმაღლეები ტოლია, ანუ გვერდითი წახნაგები ტოლდიდია. ფუძის გვერდი აღვნიშნოთ a-თი. $a^2=9+16 \Rightarrow a=5$. აპოთემა აღვნიშნოთ H-ით. მაშინ

$$\left.\begin{array}{l} H^2=h^2+ok^2 \\ S_{\text{რომბის}}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=5\cdot 2OK \Rightarrow OK=\frac{12}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow H^2=1+\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{25+144}{25}=\frac{169}{25};\ H=\frac{13}{5}.$$

$$S_{\text{გვ}}=2a\cdot H=2\cdot 5\cdot \frac{13}{5}=26.$$

11. იხილეთ ამოცანა 10.

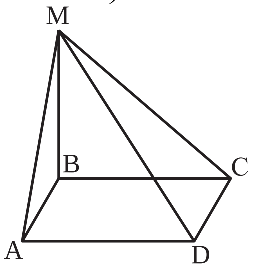
IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. არ შეიძლება. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოცემული ორი წრფე იქნება პარალელური.

2. MBD სამკუთხედი მართკუთხაა, იმიტომ, რომ ($MB\perp AB$; $MB\perp BC$) $\Rightarrow MB\perp(ABC)$.

3. $\left.\begin{array}{l} AC=AB \\ CM=MB \end{array}\right\} \Rightarrow AM\perp CB \quad \left.\begin{array}{l} CD=DB \\ CM=MB \end{array}\right\} \Rightarrow DM\perp CB \quad \left.\begin{array}{l} CB\perp AM \\ CB\perp DM \end{array}\right\} \Rightarrow CB\perp(ADM)$

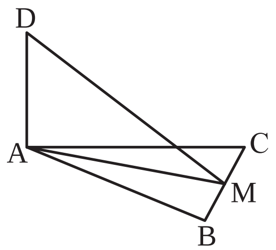
7.



$$\left.\begin{array}{l} BA\perp AD \\ MB\perp(ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow MA\perp AD$$

ე.ი. ΔAMD მართკუთხაა.
ანალოგიურად, ΔMBC-ც მართკუთხაა.

8.

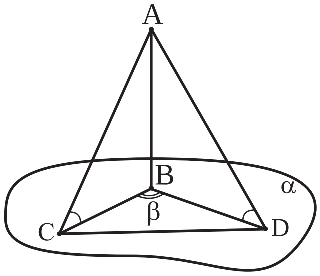


$AB=AC=10;\ BC=12;\ AD=24.$
A წერტილიდან მანძილი BC წრფემდე AM მონაკვეთის ტოლია. $AM\perp BC$, ხოლო D წერტილიდან – DM მონაკვეთის.

$$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=8$$

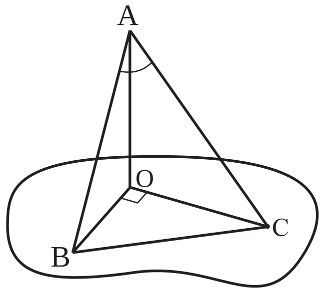
ΔADM – ში $\quad DM=\sqrt{24^2+8^2}=8\sqrt{10}$.

10.



$\angle ACB=\angle ADB=30°$
$AB\perp\alpha \quad AB=a$
$CB=BD=a\sqrt{3}$
$\Delta CBD: \quad CD=3a$

11.

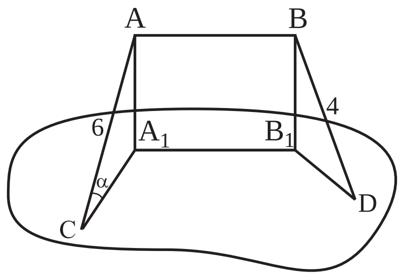


$$\left.\begin{array}{l} AB = AC = 7\sqrt{2} \\ \angle BAC = 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow BC = 7\sqrt{2}$$

$$\angle BOC = 90^\circ \quad BO = OC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 7.$$

$$(\Delta ABO \ \ AO \perp BO$$
$$AB = 7\sqrt{2} \ \ BO = 7) \Rightarrow AO = 7.$$

13.



უ.ვ. $\angle BDB_1$

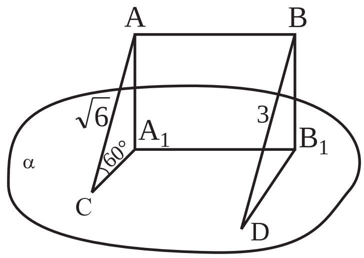
$$\sin\alpha = \frac{1}{3}$$

$$AA_1 = AC\sin\alpha = 2$$

$$BB_1 = AA_1 = 2.$$

$\Delta BB_1D \ \ BD = 4; \ \ BB_1 = 2$ ე.ი. $\angle BDB_1 = 30^\circ.$

14.



$$AA_1 = AC\sin 60^\circ = \sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$A_1C = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

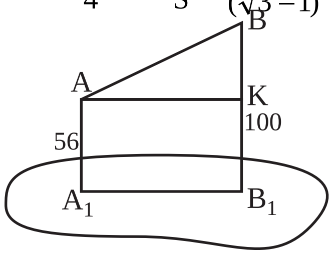
AA_1C სამკუთხედში ჩახაზული წრის ფართობი:

$$S = \pi r^2 = \pi\frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{16} = \frac{3(\sqrt{3}-1)^2}{8}$$

BDB_1 სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობია:

$$S_1 = \pi R^2 = \frac{9}{4}\pi \qquad \frac{S_1}{S} = \frac{6}{(\sqrt{3}-1)^2}.$$

15.

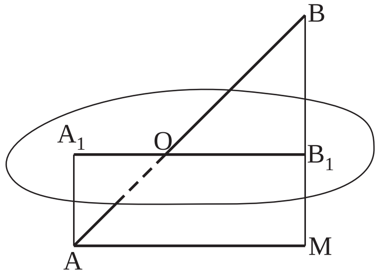


$$AK \parallel A_1B_1$$

$$BK = 100 - 56 = 44$$

$$\Delta ABK: \ AK = \sqrt{125^2 - 44^2} = \sqrt{81\cdot 169} =$$
$$= 9\cdot 13 = 117 = A_1B_1.$$

16.



$$AA_1 = 6 \quad BB_1 = 10$$

$$A_1B_1 = 12$$

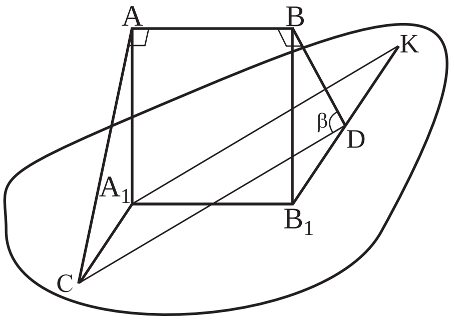
გავავლოთ $AM \parallel A_1B_1$

$$AM = A_1B_1 = 12$$

$$BM = BB_1 + A_1A = 16$$

$$\Delta ABM: \quad AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20.$$

19.



$AB=16 \quad BD=4\sqrt{6} \quad \sin\beta=\dfrac{\sqrt{2,5}}{4}$

$AC=8;$ უ.ვ. $CD.$

$\Delta BB_1D: \quad BB_1=BD\sin\beta=\sqrt{15}$

$B_1D=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-15}=9.$

$\Delta AA_1C: \quad AA_1=\sqrt{15} \quad AC=8.$

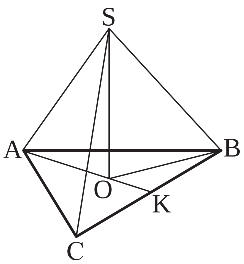
ე.ი. $A_1C=\sqrt{64-15}=7.$

$\big((B_1BD)\perp AB \ \ (AA_1C)\perp AB\big)\Rightarrow (AA_1C)\parallel(BB_1D), \ B_1D\parallel A_1C.$

B_1D-ს გაგრძელებაზე გადავდოთ $DK=A_1C$. მივიღეთ: A_1KDC პარალელოგრამი.

$CD=A_1K=\sqrt{A_1B_1^2+B_1K^2}=16\sqrt{2}$.

21.



$SA=SB=SC.$

$AC=AB \quad AK\perp BC \quad AK=4; \ CB=4.$

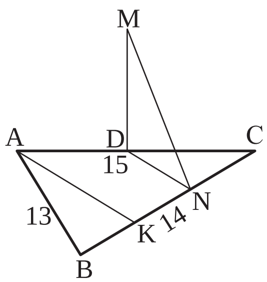
$SO\perp(ABC) \quad SO=6.$

უ.ვ. SA.

$OA=OB=OC=R_{ABC}=2,5$

$SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=6,5$.

22.



$AD=DC.$

$MD\perp(ACB) \quad DM=4.$

უ.ვ. მანძილი M წერტილიდან BC გვერდამდე.

დავუშვათ $DN\perp BC$, სამი მართობის თეორემის თანახმად $MN\perp BC$.

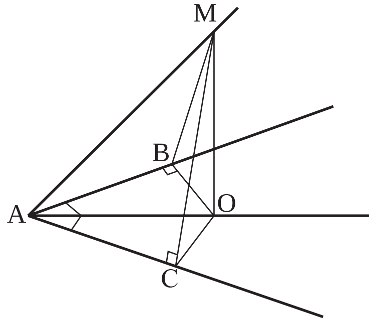
ე.ი. უნდა ვიპოვოთ MN.

დავუშვათ $AK\perp BC$, ცხადია $DN\parallel AK$, $DN=\dfrac{AK}{2}$. ვიპოვოთ AK.

$AK=\dfrac{2S_{ABC}}{BC}=12$, ე.ი. DN=6. $\Delta MND: \ MN=2\sqrt{3}$.

23. AD წრფის გეგმილი BAC კუთხის ბისექტრისაა, ამიტომ ის BC გვერდს AB და AC გვერდების პროპორციულ ნაწილებად ყოფს.

24.



$MO\perp(ABC)$

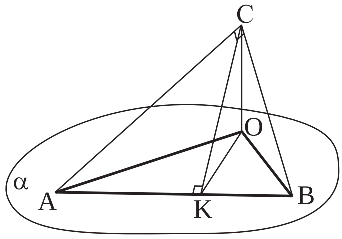
$MB=MC=b \quad MA=a$

უ.ვ. MO.

$\Delta ABO: \ BO=AB=\sqrt{a^2-b^2}.$

$\Delta MBO: \ MO=\sqrt{2b^2-a^2}.$

25.



$\Delta ABC:\ \angle C = 90°.$

$CB = 7 \quad AC = 24.$

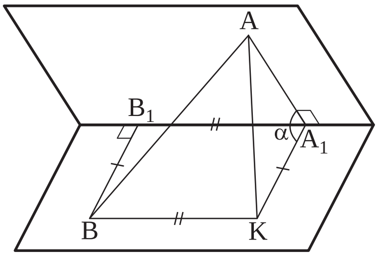
$(\alpha;(ABC)) = 30°. \quad CO \perp \alpha.$

უ.ვ. $CO.$

$CK \perp AB.$ ე.ი. $\angle CKO = 30° \Rightarrow CO = \dfrac{CK}{2} \quad CK = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{7 \cdot 24}{25}. \quad CO = 3{,}36.$

26. ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის A წვეროდან დაშვებული სიმაღლე.

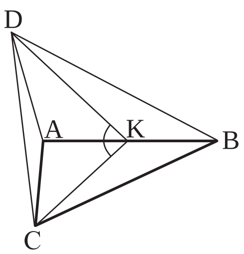
27.



$AB = \sqrt{BK^2 + AK^2} =$

$= \sqrt{c^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$

28.



$AB = 16 \ \ AC = 17; \ S_{ADB} = 160 \quad \angle DKC = 60°.$

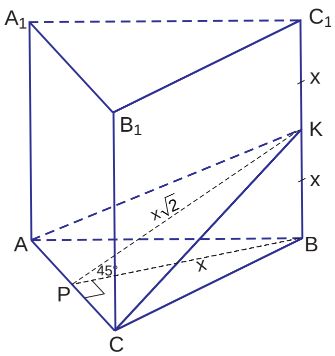
უ.ვ $DC.$

$\Delta ACK: \ \ CK = 15$

$\dfrac{16 \cdot DK}{2} = 160 \quad DK = 20$

$\Delta DCK: \ \ DC = \sqrt{400 + 225 - 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 60°} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}.$

30.



$\Delta KPC \Rightarrow KP = \sqrt{2}\,KC = CC_1.$

$\Delta ABC \Rightarrow PC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = x \Rightarrow CC_1 = \sqrt{3}.$

$S_{გვ} = 3 \cdot aCC_1 = 3\sqrt{3}.$

31. $S = 2S_ფ + S_{გვ} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} + (a+b+c) \cdot h = 480 + 4500 = 4980.$

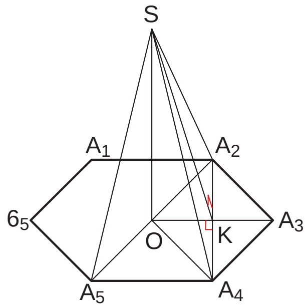
პასუხი: 4980სმ^2.

32. იხილეთ ამოცანა 30-ის ნახაზი.

$BC:AB = 5:6 \Rightarrow AP = PB = 3x$ და $BC = 5x$. $\Delta BPC \Rightarrow PC = 4x.$

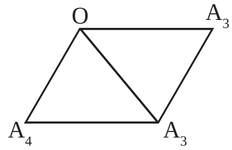
$S_{ABC} = 3x \cdot 4x = \dfrac{1}{2} \cdot 5x \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{24}{5}x$ (h პრიზმის სიმაღლეა)

$S = 24x^2 + 16x \cdot \dfrac{24}{5}x = 2520 \Rightarrow x = 5.$ $AB = 30$მ; $BC = 25$მ და $CC_1 = 24$მ.



33. ამოვხაზოთ ის ნაწილი, რომელიც გვჭირდება. A_1A არის ექვსკუთხედის დიდი დიაგონალი, ე.ი. დიაგონალური კვეთაა ΔA_5SA_2. $S_{\Delta A_5SA_2}=\frac{1}{2}h\cdot 2a=ah$. A_2A_4 არის მართი დიაგონალი. $OA_2A_3A_4$ რომბია, მაშასადამე $OA_3\perp A_2A_4$, საიდანაც სამი მართობის თეორემის თანახმად $SK\perp A_2A_4$.

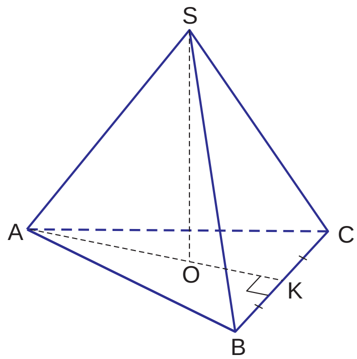
ე.ი. $S_{\Delta A_4SA_2}=\frac{1}{2}A_2A_4SK$.



ამოვხაზოთ $OA_2A_3A_4$ რომბი. $\angle A_4=60° \Rightarrow OA_3=a$.

$\Delta OKS \Rightarrow SK=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$. $A_2A_4=a\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta A_4SA_2}=\frac{a\sqrt{12h^2+3a^2}}{2}$.

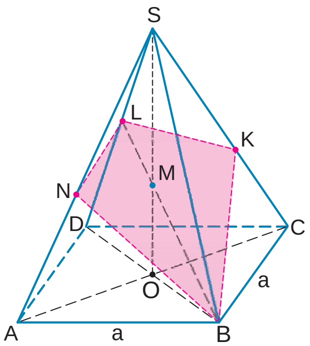
პასუხი: $S_1=ah_1$; $S_2=\frac{a\sqrt{12h^2+3a^2}}{2}$.



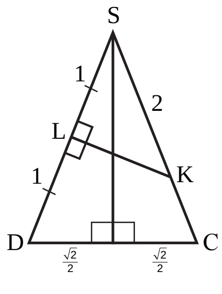
34. $\Delta AOS \Rightarrow h=\sqrt{b^2-AO^2}$; $\Delta ABC \Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$,

ე.ი. $h=\sqrt{b^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$.

$S_{\Delta ASK}=\frac{1}{2}AK\cdot h=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}=\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{4}$.



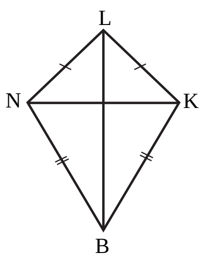
36. ვთქვათ ეს კვეთა SD წიბოს კვეთის L წერტილში, ხოლო AS და CS წიბოებს შესაბამისად N და K წერტილებში. პირობის თანახმად, SD წიბო მართობულია კვეთის სიბრტყის, ანუ (BNLK) სიბრტყის, მაშასადამე, SD მართობულია ამ სიბრტყის ნებისმიერი წრფის, ე.ი. $SD\perp BL$, $SD\perp BL$ და $SD\perp LK$. ΔDBS ტოლგვერდაა ($\angle DSB=60°$), ე.ი. BL არის მედიანაც, ანუ $DL=LS$ და $BL=\sqrt{3}$.



ამოვხაზოთ DSC სამკუთხედი. ადვილად დარწმუნდებით,

რომ $\frac{SK}{SC}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$, ხოლო $\Delta ASC \Rightarrow \frac{NK}{AC}=\frac{SK}{SC}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$, საიდანაც $NK=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

ამოვხაზოთ კვეთა. ცხადია, $NC=LK$ და $NB=BN$, ე.ი. $NK\perp LB$.



$S_{NLKB}=\frac{1}{2}BL\cdot NK=\frac{1}{2}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

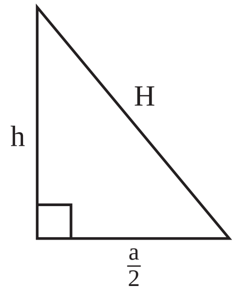
პასუხი: $S_{კვ}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

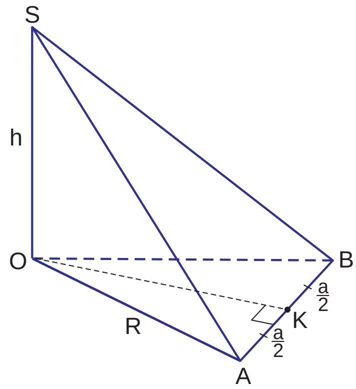
38. ფუძის დიაგონალი იქნება $a\sqrt{2}$, დიაგონალური კვეთა კი

$S_{კვ}=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot h$, პირობის თანახმად ეს კვეთა ფუძის ტოლდიდია, ე.ი.

$\frac{\sqrt{2}}{2}ah = a^2$, საიდანაც $h=a\sqrt{2}$. $S_{გვ}=2a\cdot H$, საიდანაც HM აპოთემა

$H=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{2a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{3a}{2}$. $S_{კვ}=3a^2$.





39. ამოვხაზოთ პირამიდის ის ნაწილი, რომელიც გვჭირდება.

$\angle AOB=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ \Rightarrow \angle AOK=18^\circ$.

პირობის თანახმად,

$h=R+\frac{a}{2}$. $\Delta OAK \Rightarrow OK=R\cos 18^\circ$. $AK=R\sin 18^\circ \Rightarrow a=2R\sin 18^\circ$.

$\Delta SOK \Rightarrow SK=\sqrt{h^2+R^2\cos^2 18^\circ}=\sqrt{(R+R\sin 18^\circ)^2+R^2\cos 18^\circ}=R\sqrt{2+2\sin 18^\circ}$

$S_{გვ}=5a\cdot SK=5\cdot 2R\sin 18^\circ\cdot R\sqrt{2+2\sin 18^\circ}=10R^2\sin 18^\circ\sqrt{2(1+\sin 18^\circ)}$.

ტესტი:

1. ა; 2. გ; 3. ბ; 4. გ; 5. გ; 6. დ; 7. გ; 8. ა; 9. დ.

V თავი

1. მიმდევრობა

რეზიუმე:

გავახსენოთ მოსწავლეებს მიმდევრობის განმარტება. გავახსენოთ, თუ როგორ უნდა შევეცადოთ დავინახოთ კანონზომიერება, რომლითაც შედგენილია მოცემული მიმდევრობა. შევახსენოთ მიმდევრობის ზოგ. წევრის ფორმულა; რეკურენტული ფორმულა, არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები. ვთხოვოთ მათ დაასახელონ პარაგრაფის დასაწყისში დასმულ ამოცანაში წევრთა გაგრძელება.
ა) სამკუთხა, ოთხკუთხა, ხუთკუთხა... პირამიდა;
ბ) $X_n=2n^2-1$.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ზ) $\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{8}...;$ თ) 1; 0; –1; ....

6. გ) $a_1=1;\ a_{n+1}=a_n^2+1;$ ვ) $a_1=4;\ a_{n+1}=2a_n+2(-1)^{n+1}$.

11. $(\sqrt[4]{10n+4})^2=\sqrt{n-4}\cdot\sqrt{n+2}$
$n^2-13n-14=0$, საიდანაც $n=14$.

2. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ინდუქციური და დედუქციური მსჯელობების ერთმანეთისგან გარჩევა. უნდა შეეძლოს დასკვნების გაკეთება, როგორც ერთ, ისე მეორე შემთხვევაში და იმის დანახვა, თუ როდის არის მსჯელობიდან გაკეთებული დასკვნა ჭეშმარიტი. მოსწავლემ უნდა იცოდეს მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი. უნდა შეეძლოს ამ პრინციპებით შესაბამისი მაგალითების გაკეთება (უტოლობების დამტკიცება, ჯამების დათვლა, გაყოფადობების დამტკიცება...).

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) $S_n=1+3+5+...+(2n-1)$.
$S_1=1;\ S_2=4;\ S_3=9...\ S_n=n^2;$
S_1 — ჭ;
დავუშვათ $S_k=k^2$;
$S_{k+1}=k^2+a_{k+1}=k^2+(2(k+1)-1)=(k+1)^2;$
ბ) $S_n=-1+3-5+7-...+(-1)^n(2n-1)$
$S_1=-1;\ S_2=2;\ S_3=-3...\ S_n=(-1)^2-n;$
S_1 — ჭ;
$S_{k+1}=(-1)^k+(-1)^{k+1}(2k+2-1)=(-1)^k(k-2k-1)=(-1)^{k+1}(k+1);$
გ) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$S_1=\frac{1}{3}$; $S_2=\frac{2}{5}$; $S_3=\frac{3}{7} \ldots S_n=\frac{n}{2n+1}$.

S_1 — ჭ.

$$S_{k+1}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3};$$

დ) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$S_1=\frac{1}{3\cdot 1+1}$; $S_2=\frac{2}{3\cdot 2+1} \ldots . S_n=\frac{n}{3n+1}$;

S_1 — ჭ.

$$S_{k+1}=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}.$$

2. n=19-სთვის გამოსახულება არ არის მარტივი.

3. ა) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$

$A_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ჭ.

$A_k=\frac{1}{k+1}$

$A_{k+1}=\frac{1}{k+1}\cdot\left(1-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{k+1}$, რ.დ.გ.

ვ) $1^2+3^2+\ldots(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

$S_1=1$ ჭ.

$$S_{k+1}=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

4. ა) $(6^{2n}-1) \vdots 35$

$A_1: (6^2-1)=35$ ჭ.

$A_k: (6^{2k}-1) \vdots 35$

$A_{k+1}: 6^{2k+2}-1=36\cdot 6^{2k}-1=\underbrace{35\cdot 6^{2k}}+\underbrace{6^{2k}-1} \vdots 35$

ბ) $(4^n+15n-1) \vdots 9$ ჭ.

$A_1: 4+15-1 \vdots 9$

$A_{k+1}: 4^{k+1}+15k+14=4\cdot 4^k+15k+14=4\cdot 4^k+4\cdot 15k-4-3\cdot 15k+18=4\underbrace{(4^k+15k-1)}\underbrace{-45k+18} \vdots 9$

გ) $(7^{n+2}+8^{2n+1}) \vdots 57$

A_1 — ჭ.

$A_k: (7^{k+3}+8^{2k+1}) \vdots 57$

$A_{k+1}: 7^{k+2}+8^{2k+3}=7\cdot 7^{k+3}+64\cdot 8^{2k+1}=7\underbrace{(7^{k+2}+8^{2k+1})}+\underbrace{57\cdot 8^{2k+1}}.$

დ) $(n^3+3n^2+5n+3) \vdots 3$

A_1 — ჭ.

A_{k+1}: $(k+1)^3+3(k+1)^2+5(k+1)+3=k^3+6k^2+14k+12=\underbrace{k^3+3k^2+5k+3}+3\underbrace{k^2+9k+9}$.

ე) $(6^{2n-1}+1)\vdots 7$

A_1 — ჭ.

A_{k+1}: $6^{2k+1}+1=36\cdot 6^{2k-1}+36-35=36(\underbrace{6^{2k-1}+1})\underbrace{-35}$

ვ) $(6^{2n}+3^{n+2}+3^n)\vdots 11$

A_1 — ჭ.

A_{k+1}: $6^{2k+2}+3^{k+3}+3^{k+1}=\underbrace{36\cdot 6}{}^{2k}+3\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k+1}=33\cdot 6^{2k}+3\cdot\underbrace{(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k+1})}$.

5. ა) $2^n>2n+1$ $\quad n\geq 3$

$n=3 \qquad 8>7 \qquad$ ჭ.

A_k: $2^k>2k+1$

A_{k+1}: $2^{k+1}>2(k+1)+1$

A_k-ს უტოლობა შევკრიბოთ

$2^k>2 \qquad (k\geq 3)$ ჭეშმარიტი უტოლობაა

მივიღებთ: $2^k+2^k>2k+1+2. \qquad 2\cdot 2^k>2k+3.$

ბ) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$

$S_2=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$ $\qquad$ ჭ.

ვთქვათ $S_k>\frac{13}{24}$, უ.დ. $S_{k+1}>\frac{13}{24}$

$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}$

$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}>0$

ე.ი. $S_{k+1}>S_k>\frac{13}{24}$.

გ) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ $\qquad n>1$

$n=2 \qquad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$

A_k: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$

A_{k+1}: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$

განვიხილოთ ჭეშმარიტი უტოლობა

$1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}>1$, საიდანაც თუ გავამრავლებდით $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ -ზე

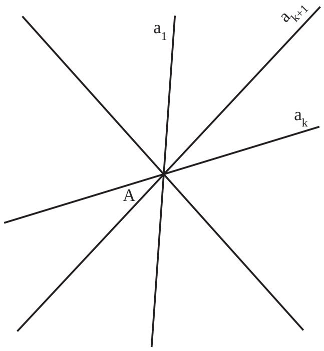
$\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ შევკრიბოთ A_{k+1} უტოლობასთან, მივიღებთ დასამტკიცებელს.

6. შევაერთოთ A_1K. ვთქვათ $A_1...A_k$. K-კუთხედის დიაგონალების რიცხვია $\frac{k(k-3)}{2}$

(k+1)-კუთხედში დაემატება A_{k+1}-დან გავლებული ყველა დიაგონალი (k–1 ცალი) და A_1A_k დიაგონალი, ე.ი. $\frac{k(k-3)}{2}+k-2+1=\frac{k(k-3)+2k-2}{2}=\frac{(k-2)(k+1)}{2}$. რ.დ.გ.

7. ა) $a_k=a_1+d(k-1)$
$a_{k+1}=a_k+d=a_1+dk$

8.



ვთქვათ A წერტილზე გამავალი $a_1....a_k$ წრფე სიბრტყეს ყოფს 2k ნაწილად. გავავლოთ a_{k+1} წრფე, რომელიც ორ მეზობელ წრფეს შორის კუთხეს გაყოფს ორ ნაწილად, ე.ი. დაყოფას დაემატება კიდევ 2 ნაწილი 2k+2=2(k+1).

9. $2+22+222+.....\underbrace{22....2}_{n}=\frac{2}{9}(9+99+999+...+\underbrace{99....9}_{n})=$

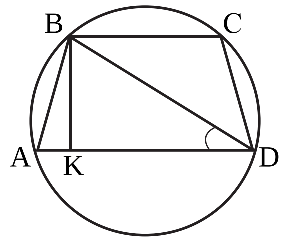
$$=\frac{2}{9}(10-1+100-1+1000-1+...+10^n-1)=\frac{2}{9}\left(\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right)=\frac{2}{81}(10^{n+1}-9n-10)$$

10. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}....\sqrt[512]{a}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....+\frac{1}{512}}=a^{\frac{511}{512}}$

11.

	რკინა (%)	ნიკელი (%)	
I	10	90	x
II	80	20	3–x

$\frac{10x+80(3-x)}{3}=60$, საიდანაც $x=\frac{6}{7}$ კგ



12. ამოცანის პირობის თანახმად, AB=CD=60°, ე.ი. ∠ADB=30°, მაშინ შუახაზი=KD=$h\sqrt{3}$, ე.ი. S=$h^2\sqrt{3}$.

3. მიმდევრობის ზღვარი

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-2}{2n}=2$.

$\left|\frac{4n-2}{2n}-2\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon \qquad n>\frac{1}{\varepsilon}$.

4. ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$;   ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=3$.

5. ა) $a_n=\frac{2n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$;

$n=1 \quad a_n=2$

$n=2 \quad a_n=1\frac{1}{2}$,   ე.ი. $b=2$; $1<a_n\le 2$.

6. $x^2-(2^a-1)x-3(4^{a-1}-2^{a-1})=0$

$D=(2^a-1)^2+12\left(\frac{4^a}{4}-\frac{2^a}{2}\right)=4\cdot 2^{2a}-8\cdot 2^a+1\ge 0$

$$\left[\begin{array}{l}2^a\ge\frac{2+\sqrt{3}}{2}\\ 2^a\le\frac{2-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}a\ge\log_2(2+\sqrt{3})-1\\ a\ge\log_2(2-\sqrt{3})-1\end{array}\right.$$

8. $0,11^{\log_3\frac{4x-1}{3x+2}}>1 \qquad \log_3\frac{4x-1}{3x+2}<0$

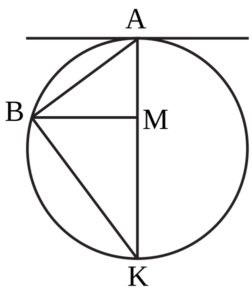
$$\begin{cases}\frac{4x-1}{3x+2}<1\\ \frac{4x-1}{3x+2}>0\end{cases} \qquad x\in\left(\frac{1}{4};3\right)$$

9. $AM=x \qquad MK=20-x$

$BM=\sqrt{x(20-x)}$

$S_{ABK}=10\sqrt{20x-x^2}$

უდიდესი იქნება $x_0=\frac{-20}{-2}=10$.



4. ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ

ამოხსნები, მითითებები:

1. ე) $x_n=\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}=\frac{6n^2+2}{n^2+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=6$

ვ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n^2+4}=\frac{1}{6}$

6. ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+5n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{5}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\sqrt{2}$

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+3}\cdot\sqrt{n^2-n+5})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+3}+\sqrt{n^2-n+5}}{2n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{2-\frac{2}{n}}=1$

7. ა) $x_n = \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + ... + \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2n+2}.$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n+4} = \frac{1}{4}$

ბ) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right) =$

$= \frac{1}{2\sqrt{n}}(\sqrt{3} - \sqrt{1} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + ... + \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{n}}$

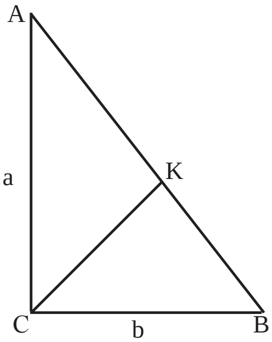
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. ა) შეიძლება იყოს კრებადი. მაგ. $a_n = \frac{1}{n}$; $b_n=(-1)^n$.

ბ) შეიძლება იყოს განშლადი, მაგ. $a_n = \frac{n+1}{n}$. $b_n=(-1)^n$.

9. ყოველთვის არა, მაგალითად, თუ $a_n=(-1)^n$; $b_n=(-1)^{n+1}$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$, ხოლო $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 1$

12.

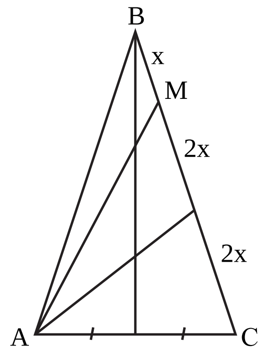


$S_{ACK}=384$
$S_{CKB}=216$

$\frac{S_{ACK}}{S_{CKB}} = \frac{AK}{KB} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{16}{9}$, ე.ი. $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$ და $ab=1200$.

საიდანაც $a=40$; $b=30$, ე.ი. $AB=50$.

13. BM:MC=1:4



5. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია

ამოხსნები, მითითებები:

1. a; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a}{2}$;.... $b_1=a$ $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

P: $p_1=4a$ $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $S_p=\frac{4a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}a$

S: $S_1=a^2$ $q=\frac{1}{2}$

$S_S=\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2$

3. $S_3=10{,}5$
$S=12$

$$\begin{cases}\dfrac{b_1(q^3-1)}{q-1}=\dfrac{21}{5}\\ \dfrac{b_1}{q-1}=12\end{cases}\qquad \begin{cases}q^3=\dfrac{1}{8}\\ q=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

4. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{7}{2}$

$x=\dfrac{1}{3}$; $x=\dfrac{2}{3}$.

5. $b_1q^{n-1}=\dfrac{4b_{n+1}}{1-q}$

$b_1q^{n-1}(1-q)=4b_1q^4$

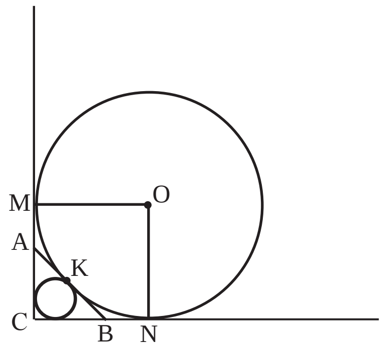
$q^{n-1}=5q^n \qquad q=\dfrac{1}{5}$

6. $\begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=16\\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2}=\dfrac{768}{5}\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{b_1^2}{(1-q)^2}=256\\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2}=\dfrac{768}{5}\end{cases}\qquad \dfrac{1+q}{1-q}=\dfrac{3}{5}\qquad q=\dfrac{1}{4};\ b_1=\dfrac{3}{16}.$

12. $\begin{cases}10x+y=x^2+xy+y^2\\ 10(x+5)+y=(x+5)^2+(x+5)y+y^2\end{cases}\qquad 2x+y=5.$

13 და 63.

13.



$AK=AM;\ KB=BN$

$P_{ACB}=CM+CN=2R$

$\begin{cases}a+b+c=2R\\ a+b-c=2r\end{cases}\qquad \begin{cases}a+b=R+r\\ c=R-r\end{cases}$ ავიყვანოთ კვადრატში

$a^2+2ab+b^2=(R+r)^2$

$(R-r)^2+4S=(R+r)^2$

$S=Rr$

15. დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}}{0,25n^2+n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}{2}}{0,25n^2+n+3}=1$

ზ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n-1}+3^n-2^{2n}}{5^n+2^n+3^{n+3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n+27\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\dfrac{1}{5}$

16. $\left(1-\dfrac{4}{1}\right)\left(1-\dfrac{4}{9}\right)...\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)=\dfrac{1+2n}{1-2n}$

1-სთვის წინადადება ჭეშმარიტია. დავუშვათ ჭეშმარიტია k-სთვის. უ.დ. რომ (k+1) თანამამრავლი ტოლია $\dfrac{2k+1}{-2k-1}$.

$\dfrac{1+2k}{1-2k}\cdot\left(1-\dfrac{4}{(2k-1)^2}\right)=-\dfrac{2k+3}{2k+1}.$

შეამოწმე შენი ცოდნა

1. გ; 2. დ; 3. ბ; 4. ბ; 5. ბ; 6. დ; 7. გ; 8. დ; 9. ბ; 10. გ.

დამატებითი სავარჯიშოები

7. დ) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$

A_1 — ჭ.

A_k: $S_k=\frac{k}{4k+1}$

A_{k+1}: $S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}$, რ.დ.გ

8. ა) $k^3-k \vdots 5$

$(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+2k=\underbrace{k^3-k}+\underbrace{3k^2+3k}$;

ბ) $(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3) \vdots 9$

A_{k+1}: $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3==\underbrace{k^3+(k+1)^3+(k+2)^3}+\underbrace{9k^2+27k+27}$;

გ) $(9^{n+1}-8n-9) \vdots 16$

A_{k+1}: $9^{k+2}-8(k+1)-9=9\cdot 9^{k+2}-8k-17=9\cdot 9^{k+1}-9\cdot 8k+8\cdot 8k-84+64=9(9^{k+1}-8k-9)+64k+64$;

დ) $(10^m+18m-28) \vdots 27$

A_{k+1}: $10^{k+1}+18(k+1)-28=10\cdot 10^k+10\cdot 18k-9\cdot 18k-10\cdot 28+9\cdot 28+18=10(10^k+18k-28)+270$.

14. ა) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1$

18. ბურთის მიერ გავლილი მანძილია 10+2S, სადაც S გეომეტრიული პროგრესიის ჯამია $b_1=6$ და $q=\frac{3}{5}$, ე.ი. $10+2\cdot\frac{6}{\frac{2}{5}}=40$ მ.

VI თავი

1. ვექტორის კოორდინატები

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს: ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილების კოორდინატებით ვექტორის კოორდინატების დაწერა; კოორდინატების მიხედვით ტოლი ვექტორების ამორჩევა; ტოლი ვექტორების საწყისი და ბოლო წერტილების სამის, მოცემულობის მიხედვით, მეოთხეს კოორდინატების დადგენა.

ამოხსნები, მითითებები:

7. $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ}$, ე.ი. –1–3=x–1 და 2–3=y–0, საიდანაც Q(–3;–1).

9. $|\vec{a}| = \sqrt{4+9+12} = 5; \qquad |\vec{b}| = \sqrt{1+16+8} = 5.$

2. ვექტორების შეკრება-გამოკლება

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ვექტორების შეკრება-გამოკლება, როგორც გეომეტრიულად, ასევე კოორდინატებში. უნდა შეეძლოს ვექტორების მოცემული კოორდინატებით მოქმედების შედეგად მიღებული ვექტორების კოორდინატების დაწერა.

ამოხსნები, მითითებები:

4. A(0;0;1); B(3;2;1); C(4;6;5); D(1;6;3).

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(3;2;0)} + \overrightarrow{(-3;0;-2)} = \overrightarrow{(0;2;-2)}$

$\sqrt{2}|\vec{a}| = \sqrt{2}\sqrt{0+2^2+(-2)^2} = 4$

9. M(x;y) AB მონაკვეთის შუაწერტილია $x = \frac{x_A + x_B}{2} = 3,5;\ y = \frac{y_A + y_B}{2} = -3.$

10. $y=x^2$ გრაფიკის წვერო (0;0) მოცემული პარალელური გადატანით გადავა (2;–1) წერტილში, ე.ი. $y=(x-2)^2-1$.

3. ვექტორის გამრავლება რიცხვზე. კოლინეარული ვექტორები

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს მოცემული ვექტორის მოცემულ რიცხვზე გამრავლებით მიღებული ვექტორის კოორდინატების დაწერა; მოცემულ ვექტორებს შორის კოლინეარული ვექტორების ამორჩევა და უნდა იცოდეს ვექტორების კოლინეარულობის პირობა.

ამოხსნები, მითითებები:

4. $\vec{a}; \vec{b}; \vec{d}$ და $\overrightarrow{m}$ ვექტორები კოლინეარულია.

5. $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორები კოლინეარულებია.

7. ა) $\left[\begin{array}{l} x-2=2 \\ x-2=5 \end{array}\right.$ x=4 ან 7.

4. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს: ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის პოვნა კოორდინატებითაც და მათი სიგრძეებით და მათ შორის მდებარე კუთხითაც; მოცემული კოორდინატებით ვექ-ტორებს შორის კუთხის მოძებნა. უნდა იცოდეს, რისი ტოლია სკალარული კვადრატი და ორი მართობული ვექტორის სკალარული ნამრავლი.

ამოხსნები, მითითებები:

4. თუ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ მართობულია, მაშინ $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=0$, ე.ი. $|\vec{a}|=|b|$.

5. $|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}\cdot\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2}\cdot\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2}=29$.

6. ბ) $|a|=2 \quad |\vec{b}|=1\ (\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=60^\circ$

$\vec{a}(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=4+1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=5$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{4+2+1}=\sqrt{7}$

$5=2\sqrt{7}\cos\alpha \quad \cos\alpha=\frac{5}{2\sqrt{7}}$.

7. $\overrightarrow{AB}(-3;0;-4)$; $\overrightarrow{AC}(4;0;-3)$

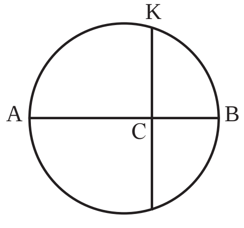
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12+12=0$, ე.ი. $\angle A=90^\circ$.

-	1	2	3
1		+	
2			+
3	+		
4		+	
5	+		

5. ბრუნვითი სხეულები, ცილინდრი

ამოხსნები, მითითებები:

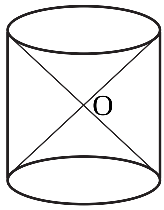
4.



AC:CB=3:1

$AC=\frac{3R}{2}$ $CB=\frac{R}{2}$; $CK=\frac{R\sqrt{3}}{2}=r$.

$S=\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot H$ $H=\frac{2S}{R\sqrt{3}}$.

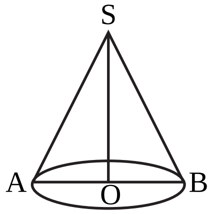
8. 

$$\frac{\pi R^2}{2RH}=\frac{\pi}{4}$$

$\frac{R}{H}=\frac{1}{2}$, ანუ $\frac{2R}{H}=1$, ე.ი. ღერძული კვეთა კვადრატია, ანუ კუთხე დიაგონალებს შორის 90°-ია.

6. კონუსი

ამოხსნები, მითითებები:

9. 

$\cos\alpha=\frac{SO}{SB}=\frac{1}{3}$

$SO\equiv x SB=3x;$ $\qquad 2x=\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ $\qquad x=\frac{5}{2\sqrt{\pi}}$ $\qquad OB^2=8x^2$

$S_{ფ}=\pi\cdot OB^2=\pi\cdot 8x^2=8\pi\cdot\frac{25}{4\pi}=50.$

10. $\frac{\pi R^2}{\frac{1}{2}H\cdot 2R}=\pi$, საიდანაც R=H, ე.ი. ფუძესთან მდებარე კუთხეა 45°.

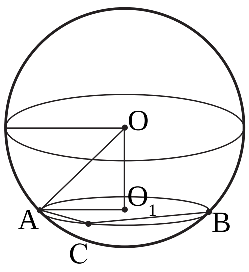
7. სფერო, ბირთვი

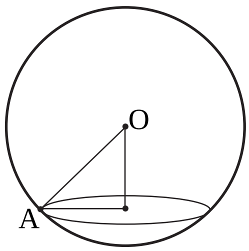
ამოხსნები, მითითებები:

3. AB=10; AC=8; BC=6.

$AB^2=AC^2+BC^2$, ე.ი. $\angle C=90°$.

$OO_1=\sqrt{OA^2-AO_1^2}=12.$





4. R=10

$\pi r^2=9\pi$ $\qquad r=3$

$OO_1=\sqrt{100-9}=\sqrt{91}.$

7. ბ) $y=x^2-2x+3$ $\qquad \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y-2 \end{cases}$

წვერო $A(1;2)\rightarrow A_1(3;-1)$

$y=(x-3)^2-1$

შეამოწმე შენი ცოდნა

1. გ; 2. დ; 3. ბ; 4. გ; 5. დ; 6. დ; 7. გ; 8. ბ; 9. ბ; 10. ა; 11. ბ; 12. გ; 13. ა; 14. ა; 15. ა.

დამატებითი სავარჯიშოები

4. $\vec{a}(2;-3;6)$ $\quad |\vec{b}|=1 \quad \vec{a}\,||\,\vec{b}$

$\vec{b}(2x;-3x;-6x)$

$4x^2+9x^2+36x^2=1$

$x^2=\frac{1}{49}$, რადგან $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართულია $x=\frac{1}{7}$.

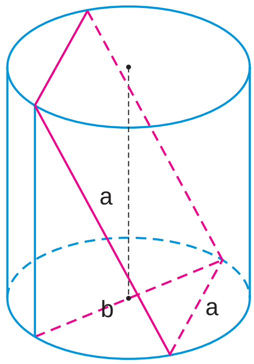
5. $\vec{c}=(\overrightarrow{-3;7})$ $\qquad \vec{d}=(\overrightarrow{2;5})$

$|\vec{c}|=\sqrt{58}$ $\qquad |\vec{d}|=\sqrt{29}$ $\qquad \vec{c}\cdot\vec{d}=29$

$\cos\alpha=\frac{29}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{29}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \alpha=45°$.

16. მოპირდაპირე კუთხეები მართია, ე.ი. წრეწირი შემოიხაზება.

28. $\frac{\pi R^2}{2RH}=\frac{\pi}{4}$ $\qquad \frac{R}{H}=\frac{1}{2}$, ე.ი. 45°.



29. კვადრატის გვერდია a, მისი გეგმილია b.

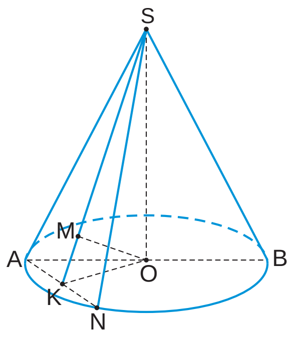
$\begin{cases} a^2+b^2=4R^2 \\ a^2-b^2=h^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+b^2=4\cdot 49 \\ a^2-b^2=4 \end{cases}$

$2a^2=4\cdot 50$

$a=10$

32. $2\pi RH=2\pi R^2$

$H=R$



39. $H=SO=20$; $\qquad R=ON=25$

$OM\perp SK$ $\qquad OM=12$.

ΔSOK. $SM=16$; $MK=9$, ე.ი. $SK=25$.

$OK=15$. ΔKON. $KN=20$. $S_{ASN}=500$.

VII თავი

1. კომბინატორული ამოცანები

ამოხსნები, მითითებები:

1. წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს ექვსი ადგილი. პირველი გაკვეთილის შერჩევის 10 ვარიანტია, რადგან გაკვეთილების გამეორება არ შეიძლება. მეორე გაკვეთილის შერჩევის 9 ვარიანტია და ა.შ. ე.ი. ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

გაკვეთილი	I	II	III	IV	V	VI
ვარიანტი	10	9	8	7	6	5

სულ იქნება $10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=151200$ ვარიანტი.

2.	10	9	8	ვარიანტების რაოდენობა
	თავმჯდ.	I მოადგ.	II მოადგ.	$10\cdot9\cdot8=720$

3. წინა ამოცანიდან უკვე ვიცით, თუ რამდენი დალაგებული სამეული შეიძლება შედგეს 10 ადამიანისგან. ეს არის 720. რადგან a,b,c სამეულისაგან შეიძლება მივიღოთ დალაგებული 6 სამეული, ესენია: {a;b;c}; {a;c;b}; {c;a;b}; {c;b;a}; {b;a;c}; {b;c;a}, ე.ი. სამეულების რაოდენობა 720:6=120.

4. ა) ნომერი 000 შეიძლება, ამიტომ შესაძლო ნომრების რაოდენობაა 1000;
ბ) შესაძლო სერიები: HHA; HAH; AHH.

5. ა) $1\cdot2\cdot3...13\cdot14=14!$
ბ) რადგან 2 ერთმანეთის გვერდით უნდა მოხვდეს, ჩვენ შეგვიძლია ის ორი წარმოვიდგინოთ ერთ წიგნად, ანუ უნდა განვიხილოთ 13 წიგნის დალაგების შესაძლებლობა და მიღებული პასუხი გავამრავლოთ 2-ზე, რადგან იმ ორი ურთიერთმდებარეობის ორი შემთხვევა არსებობს (a;b) და (b;a). პასუხი: $2\cdot13!$.

6. ა) ციფრების რაოდენობაა 10, მაგრამ პირველ ადგილზე 0 ვერ იქნება. პირველ ადგილზე გვაქვს 9 შესაძლო ვარიანტი. მეორე ადგილზე ვირჩევთ დარჩენილი 9-დან. მესამეზე — დარჩენილი 8-დან და ა.შ.
პასუხი: $9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6=27216$.
ბ) $9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=9\cdot10^4$.

7. პირველ ადგილზე წერია 2, ე.ი. ჩვენ გვაინტერესებს დარჩენილ 6 ადგილზე მიღებული ვარიანტები; სულ ტოლია: $10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=10^6$ (იგულისხმება, რომ მეორე ციფრიც შეიძლება იყოს 0).

8. ა) კენტი ციფრების რაოდენობაა 5, ე.ი. ასეთი რიცხვების რაოდენობა იქნება 5^6. ბ) ლუწი ციფრების რაოდენობაა 5. მაგრამ პირველ ადგილზე 0 ვერ იქნება. ე.ი. ასეთი რიცხვების რაოდენობაა $4\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=4\cdot5^5$.

9. ერთიანი აუცილებლად გვხვდება მხოლოდ ერთხელ. ის შეიძლება იდგეს პირველ, მეორე, მესამე ან მეოთხე ადგილზე, ე.ი. ჩვენ უნდა დავთვალოთ რამდენი სამნიშნა რიცხვი შედგება დანარჩენი 7 ციფრისგან და მიღებული პასუხი გავამრავლოთ 4-ზე. ე.ი. $4\cdot7\cdot7\cdot7=4\cdot7^3$.

10. ასეთი სიტყვების რაოდენობაა 6·5·4·3-360.

11. პირველ ადგილას გვაქვს შესაძლო 15 ვარიანტი, მეორესთვის — 14 და მესამესთვის — 13. პასუხია: 15·14·13.

12. ეს არის $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$ (იხილეთ მე-3 ამოცანა).

13. წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს ოთხი ადგილი. პირველ ადგილზე არის რვა ვარიანტი. რადგან ციფრების გამეორება შეიძლება, ყველა დანარჩენ ადგილზეც იქნება რვა ვარიანტი, ე.ი. 8^4.

2. გადანაცვლება, წყობა

ამოხსნები, მითითებები:

1. $A_{20}^{11} = \frac{20!}{(20-11)!} = \frac{20!}{9!}$.

2. ა) $A_{33}^{6} = \frac{33!}{(33-6)!} = \frac{33!}{27!}$.

3. $A_{25}^{5} = \frac{25!}{(25-5)!} = \frac{25!}{20!}$.

4. $A_{15}^{4} = \frac{15!}{11!}$.

5. P_5=5!=120.

6. ა) $4 \cdot 5^4$;   ბ) 5^5.

7. ა) გოგონების სკამებზე განლაგების რაოდენობაა P_5=5!, ბიჭების — P_5=5! რადგან პირველ ადგილზე შეიძლება აღმოჩნდეს როგორც გოგონა, ისევე ბიჭიც, ყველა შესაძლო ვარიანტი დაითვლება 2·5!·5!
ბ) ამ შემთხვევაში პირველი ადგილი არ კონკრეტდება (წრეზე სხედან), ამიტომ პასუხია: $P_5 \cdot P_5$ =5!·5!

8. ციფრების რაოდენობაა 6, ე.ი. შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობაა $A_6^4 = \frac{6!}{2!}$=3·4·5·6=360.

9. დავთვალოთ 14 მგზავრის განთავსების ვარიანტების რაოდენობა და მიღებული პასუხი გავამრავლოთ 2-ზე (მძღოლების განაწილების რაოდენობაა 2). პასუხი: $2 \cdot P_{14}$=2·14!

10. უნდა დავთვალოთ ვაჟების წყვილთა რაოდენობა (პირველი და ბოლო ადგილის დასაკავებლად). ეს რიცხვია: $A_7^2 = \frac{7!}{5!} = 42$. დარჩენილი 5 ბიჭი და 5 გოგო სულერთია როგორი თანმიმდევრობით გამოვლენ, ე.ი. უნდა ვნახოთ 10 ბავშვის გამოსვლის თანმიმდევრობა. ეს არის P_{10}=10! საბოლოო პასუხი: 42·10!

11. ბიჭების მერხებზე განაწილების რაოდენობაა P_{10}=10! გოგოების — P_{10}=10!
პასუხი: $P_{10} \cdot P_{10}$=10!· 10! =$(10!)^2$.

12. ჯერ დავთვალოთ ის შემთხვევა, როცა მწკრივის თავსა და ბოლოში ორი გოგონაა.

$A_{10}^2=\frac{10!}{8!}$=8·9=72 შემთხვევა. დარჩენილი 16 ბავშვის გადანაცვლებათა რაოდენობაა P_{16}=16! ე.ი. მივიღეთ: 72·16! ახლა დავთვალოთ რამდენი რამდენი დალაგებული წყვილი მიიღება 8 ბიჭისგან. ეს იქნება: $A_8^2=\frac{8!}{6!}$=7·8=56. დარჩენილი 16 ბავშვის გადანაცვლების რაოდენობაა: P_{16}=16! მივიღეთ: 56·16!.

13. თავსა და ბოლოში სამკუთხედებია — $A_5^2\cdot P_{12}$;

თავსა და ბოლოში წრეა — $A_4^2\cdot P_{12}$;

თავსა და ბოლოში ოთხკუთხედია — $A_5^2\cdot P_{12}$.

სულ $A_5^2\cdot P_{12}+A_4^2\cdot P_{12}+A_5^2\cdot P_{12}=P_{12}(2A_5^2+A_4^2)=12!\left(2\cdot\frac{5!}{3!}+\frac{4!}{2!}\right)=52\cdot 12!$.

3. ჯუფთება

ამოხსნები, მითითებები:

2. ა) $\frac{C_{100}^{97}\cdot P_4}{66\cdot A_{50}^2}=\frac{\frac{100!}{3!97!}\cdot 4!}{66\cdot\frac{50!}{48!}}=\frac{98\cdot 99\cdot 100\cdot 4}{66\cdot 49\cdot 48}=25$; ბ) $C_7^4+C_7^3-C_8^3=0$;

გ) $\frac{C_{16}^6}{C_{14}^5+C_{14}^6+C_{15}^5}=1$.

3. ა) $C_x^3+C_x^2=15(x^2-1)\Rightarrow\frac{x!}{3!(x-3)!}+\frac{x!}{2!(x-2)}=15(x^2-1)\Rightarrow\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+\frac{x(x-1)}{2}=$

$=15(x^2-1)\Rightarrow(x-1)\cdot\frac{x(x-2)+3x}{6}=15(x-1)(x+1)\Rightarrow x^2-2x+3x=90(x+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-89x-90=0$

$$\left[\begin{array}{l}x\neq 1\\ x=90\\ x=-1\end{array}\right)\Rightarrow x=90$$

ბ) $C_x^1+A_x^2=256\Rightarrow\frac{x!}{(x-1)!}+\frac{x!}{(x-2)!}=256\Rightarrow x+(x-1)x=256\Rightarrow x^2=256\Rightarrow x=16$;

გ) $\frac{A_{x+2}^4}{A_{x+2}^2}=42\Rightarrow\frac{(x+2)!}{(x-2)!}:\frac{(x+2)!}{x!}=42\Rightarrow\frac{x!}{(x-2)!}=42\Rightarrow x(x-1)=42\Rightarrow x^2-x-42=0\Rightarrow x=7$;

დ) $3C_{2x}^{x-1}=5C_{2x-1}^{x}\Rightarrow\frac{3\cdot(2x)!}{(x-1)!(x+1)!}=\frac{5(2x-1)!}{x!(x-1)!}\Rightarrow 6x=5x+5\Rightarrow x=5$.

4. $(x+x^2)^7=x^7(x+1)^7$. ე.ი. გვინდა $(x+1)^7$ — ეს გაშლაში x^3-ის კოეფიციენტი ეს არის:

$C_7^4=\frac{7!}{4!3!}=\frac{5\cdot\cancel{6}\cdot 7}{\cancel{2\cdot 3}}=35$.

5. თ) x^3-ს შეიცავს მესამე წევრი, ე.ი. $C_5^2(2x)^3(-3)^2=720x^3$. მაშასადამე, კოეფიციენტია 720.

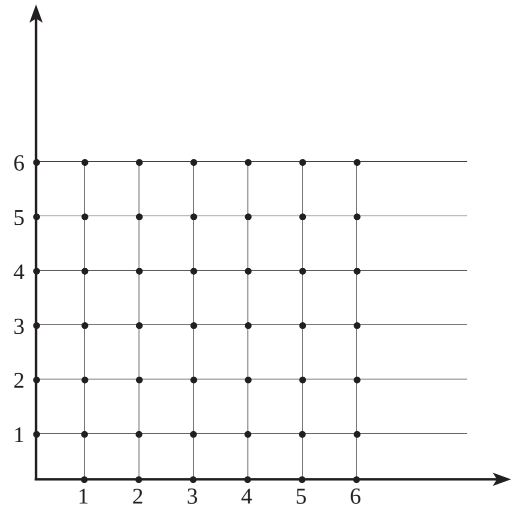
6. x^2-ს შეიცავს მესამე წევრი. ეს არის $C_6^2\cdot 2^4(ax)^2=\frac{6!}{2!4!}\cdot 2^4a^2x^2=15\cdot 2^4a^2x^2$, ე.ი. $15\cdot 16a^2=60\Rightarrow$ $a^2=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$.

7. რადგან ქვედა კაბასა და შარვალს ერთდროულად ვერ ჩაიცმევს, ამიტომ ეს იგივეა, რაც 8 ბლუზა და 15 ქვედაკაბა. თითო ბლუზასთან არის 15 ვარიანტი. ე.ი. პასუხია: 15·8=120.

8. რადგან შეიძლება, რომ ორივე ერთი და იგივე სახის სათამაშო იყოს, მაგალითად, ორივე იყოს მანქანა. ასარჩევია 20+5+10=35 სათამაშოდან 2 ეს არის $C_{35}^{2}=\frac{35!}{33!2!}=\frac{34\cdot 35}{2}$=17·35=595.

9. შესაძლო ხდომილობათა რაოდენობაა $C_{50}^{2}=\frac{50!}{48!2!}$=49·50=49·25=1225. ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვია $C_{3}^{2}=\frac{3!}{2!1!}=3$. ალბათობა იმისა, რომ ორივე წითელია, იქნება: $\frac{3}{1225}$.

10. შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია C_{24}^{10}. ხდომილობათა რაოდენობა 5 იქნება $C_{14}^{5}\cdot C_{10}^{5}$. ალბათობა იქნება $\frac{C_{14}^{5}\cdot C_{10}^{5}}{C_{24}^{10}}$.



11. ორი კამათლის გაგორებისას შესაძლოა მოვიდეს 36 განსხვავებული წყვილი. ამის საილუსტრაციოდ შეგვიძლია გამოვიყენოთ საკოორდინატო სიბრტყე.
ა) ერთნაირი რიცხვების მოსვლის 6 შესაძლო შემთხვევაა, ამიტომ ალბათობა იქნება $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$;
ბ) განსხვავებული ციფრების მოსვლის ალბათობაა $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$;
გ) ცხრილი მოგვეხმარება ასეთი წყვილების დათვლაში. (1;2); (1;5); (2;1); (2;4)...(6;3); (6;6). სულ 12. ალბათობა იქნება $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.
დ) დავთვალოთ ისეთი წყვილების რაოდენობა, რომელთა ციფრების ჯამი ნაკლებია ან ტოლი 4-ის. ეს რაოდენობაა 4 (ცხრილში 2×2 კვადრატია), ე.ი. ოთხზე მეტს გვაძლევს ჯამში 36–4=32 წყვილი. ალბათობაა $\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$.

12. ეს რიცხვია $C_{10}^{2}=\frac{10!}{2!8!}=\frac{9\cdot 10}{2}=45$.

13. ყოველი სამი წერტილი გვაძლევს ერთ წრეწირს, ე.ი. წრეწირების რაოდენობაა
$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!7!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{6}$=4·3·10=120.

14. ვთქვათ იყო x მონაწილე. მაშინ გათამაშებული პარტიების რაოდენობაა
$C_{x}^{2}=210\Rightarrow\frac{x!}{2!(x-2)!}=210\Rightarrow x^2-x-420=0.$ x=21.

15. ეს იგივეა, რომ 15 მოსწავლიდან რამდენი ხერხით აირჩევა 4 მოსწავლე, ე.ი. პასუხია:
$C_{15}^{4}=\frac{15!}{4!11!}=\frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{2\cdot 3\cdot 4}$=7·13·15=1365.

4. წყობა განმეორებით

ამოხსნები, მითითებები:

1. კენტი ადგილია 3, მათგან თითოეულისათვის 5-5 ვარიანტია. ლუწი ადგილია 2. მათთვისაც 5-5 ვარიანტია, ე.ი. პასუხია: 5^5.

2. ბარათების რაოდენობაა 8. ციფრი 2 მეორდება ორჯერ. 5 — სამჯერ. შესაძლო რიცხვების რაოდენობაა $\frac{8!}{2!3!}=\frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{2}\cdot \cancel{6}}=3360$.

3. ბურთულების რაოდენობაა 12. გამეორებების რიცხვია 5, 3 და 4, ე.ი. შესაძლო ვარიანტების რაოდენობაა $\frac{12!}{5!3!4!}=\frac{\cancel{6}\cdot 7\cdot \overset{4}{\cancel{8}}\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot \cancel{12}}{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot 2\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}}=27720$.

4. ასოების რაოდენობაა 6. გამეორებების კი 4 და 2. ვარიანტების რაოდენობაა $\frac{6!}{2!4!}=\frac{5\cdot 6}{2}=15$

5. ასოების რაოდენობაა 8. „ა“ მეორდება 3-ჯერ.

6. 9 მგზავრი 2, 3 და 4 კაცისგან შემდგარ ჯგუფებად შეგვიძლია დავაწყოთ $\frac{9!}{2!3!4!}$ ხერხით. თითოეულ ჯგუფს შეუძლია გადმოვიდეს 10 სართულიდან ნებისმიერზე. ვთქვათ ერთ-ერთი ჯგუფი გადმოვიდა 10 სართულიდან ნებისმიერზე. ამის შემდეგ II-ს დარჩა 9 შესაძლებლობა, მესამეს კი 8. მივიღეთ: $\frac{9!}{2!3!4!}\cdot 10\cdot 9\cdot 8=\frac{10!}{4}$.

7. ვარიანტების რაოდენობაა $\frac{9!}{2!3!4!}=1260$.

8. $\frac{16!}{5!7!4!}$.

5. ამოვხსნათ ამოცანები ალბათობათა თეორიიდან

ამოხსნები, მითითებები:

1. ყველა შესაძლო ოთხნიშნა რიცხვთა რაოდენობაა 9000. ხელშემწყობ ხდომილობათა რაოდენობაა (ანუ კენტი ციფრებით შედგენილ ოთხნიშნა რიცხვთა რაოდენობაა) 5^4. ალბათობა იქნება $\frac{54}{9000}=\frac{5}{72}$.

2. ა) ოთხნიშნა რიცხვების რაოდენობაა $9\cdot 10^{11}$, ხელშემწყობ ხდომილობათა რაოდენობა კი 5^{12}. ალბათობა $\frac{5^{12}}{9\cdot 10^{11}}=\frac{5^{12}}{9\cdot 5^{11}\cdot 2^{11}}=\frac{5}{9\cdot 2^{11}}$.

ბ) $\frac{5^{18}}{9\cdot 10^{17}}=\frac{5^{18}}{9\cdot 5^{17}\cdot 2^{17}}=\frac{5}{9\cdot 2^{17}}$.

3. ორნიშნა რიცხვების რაოდენობაა 90. ახლა დავთვალოთ ორნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომლის ჩანაწერშიც არ შედის 2-იანი. გვაქვს ორი ადგილი. პირველ ადგილას ვერ იქნება 0 და 2, ე.ი. გვაქვს რვა ვარიანტი. მეორე ადგილას ვერ იქნება 2-იანი. ე.ი. გვაქვს 9 ვარიანტი. ე.ი. $8\cdot 9=72$ რიცხვის ჩანაწერში არ გვხვდება 2-იანი. ალბათობა იქნება $\frac{8\cdot 9}{90}=\frac{4}{5}$.

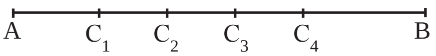
4. ყველა შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია $9^2=81$. ისეთი წყვილების რაოდენობა, რომელთა ჯამი ლუწია, იქნება კენტი და კენტი — $5^2=25$. ლუწი და ლუწი — $4^2=16$, სულ 41. ალბათობა იქნება $\frac{41}{81}$.

5. 10 ასოდან (ასოები არ მეორდება) 5-ასოიანი სიტყვის შედგენის ვარიანტებია (შესაძლო ხდომილობათა რიცხვი) $A_{10}^{5}=\frac{10!}{5!}$. ამ სიტყვებიდან გვჭირდება ერთი, ე.ი. ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვია 1. ალბათობა $\frac{5!}{10!}$.

6. შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია A_8^4. ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვი კი 1. ალბათობა იქნება: $\frac{1}{A_8^4}=\frac{4!}{8!}$.

7. გვაქვს 5 ადგილი. პირველ ადგილზე ასო „ვ“-ს მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{7}$. დარჩა 6 ასო. II ადგილზე გვინდა „ა“. მისი მოსვლის ალბათობაა $\frac{3}{6}$. III ადგილზე „შ“-ს მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{5}$. IV-ზე „ლ“-ს მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{4}$, ხოლო V-ზე „ი“-ს მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{3}$. სიტყვა „ვაშლის“ მოსვლის ალბათობა იქნება ამ ალბათობათა ნამრავლი $\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7}=\frac{1}{840}$.

8. ალბათობა იქნება ალბათობათა ნამრავლი (იხ. ამოცანა 7). ე.ი. $\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot9}=\frac{1}{1890}$

9. 

მონაკვეთების რაოდენობა 5+4+3+2+1=15. ამასთან ისეთი მონაკვეთები, რომლის ბოლო წერტილია A იქნება 5, ე.ი. შესაძლო ხდომილობათა რაოდენობაა 15. ხელშემწყობ ხდომილობათა რაოდენობა იქნება 5. ალბათობა იქნება $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

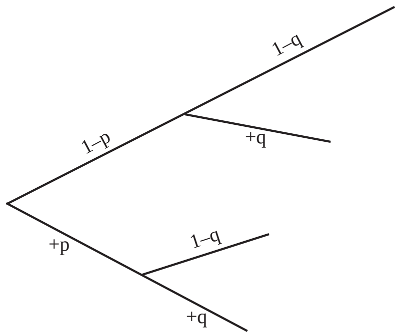
10. რადგან ერთ წყვილს აუცილებლად აიღებს. უნდა ამოიღოს დარჩენილი 27 ქვიდან 6. ეს არის C_{27}^6 (შესაძლო ხდომილობათა სივრცე). ხელშემწყობ შემთხვევაში რიცხვია 1 (ექვსივე წყვილია). ალბათობა იქნება $\frac{1}{C_{27}^6}=\frac{1!26!}{27!}=\frac{1}{27}$.

11. თითოეული ამოღებისას გულის ამოღების ალბათობა არის $\frac{13}{52}$ (13-ია გულის კარტი). ე.ი. ალბათობაა $\left(\frac{13}{52}\right)^3=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$.

12. ამ რიცხვების გადანაცვლებათა რიცხვია P_6=6! ამათგან გეომეტრიული პროგრესიაა ორი (1; 3; 9; 27; 81; 243 და 243; 81; 27; 9; 3; 1), ალბათობაა $\frac{2}{6!}$.

13. 20-ის 80%-ია 16, ე.ი. 16 წითელი და 4 ლურჯი. შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია C_{20}^8. ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვი $C_{16}^5\cdot C_4^3$. ალბათობაა $\frac{C_{16}^5\cdot C_4^3}{C_{20}^8}=\frac{16!4!8!12!}{5!11!3!1!20!}$

14. გიორგი ვერ მიიღებს 10-იანს — ალბათობაა 1–p. დათო ვერ მიიღებს 10-იანს — ალბათობაა 1–q. გიორგი ვერ მიიღებს და დათო მიიღებს, ალბათობაა q(1–p). დათო ვერ მიიღებს და გიორგი მიიღებს, ალბათობაა p(1–q). მხოლოდ ერთი მიიღებს, ალბათობა იქნება q(1–p)+p(1–q)=q–pq+p–qp=p+q–2pq.
ამ ამოცანის საილუსტრაციოდ გამოგვადგება მოცემული სქემა:

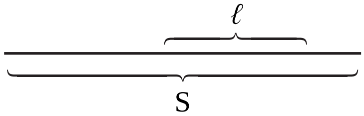


15. შესაძლო ხდომილობათა რიცხვი C_{15}^5. ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვი კი $C_6^3\cdot C_9^2$. ალბათობაა $\frac{C_6^3\cdot C_9^2}{C_{15}^5}\approx 0,24$.

16. მესამე და მეოთხე ტომი ჩავთვალოთ ერთ წიგნად. ამ შემთხვევაში ხელშემწყობ ხდომილო-ბათა რიცხვია $2\cdot P_{14}=14!\cdot 2$. შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია $P_{15}=15!$ ალბათობაა $\frac{14!\cdot 2}{15!}=\frac{2}{15}$.

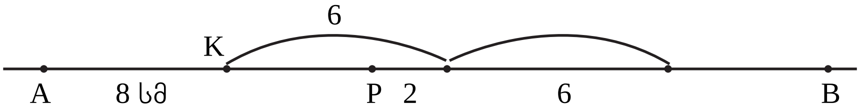
6. გეომეტრიული ალბათობა

ამოხსნები, მითითებები:

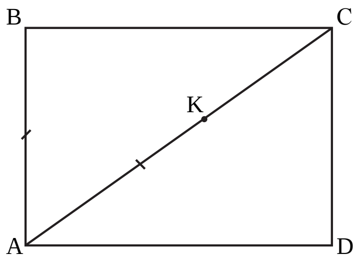


1. ალბათობა იმისა, რომ S სიგრძის მონაკვეთზე შემთხვევით არჩეული წერტილი ℓ სიგრძის მონაკვეთზე აღმოჩნდება, არის $\frac{\ell}{S}$. ჩვენს შემთხვევაში S=500მ. ℓ=200მ–120მ=80მ. ალბათობა იქნება $\frac{80}{500}=\frac{4}{25}$.

2. ამოცანის ამოსახსნელად დავადგინოთ იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც ამოცანის პირობებს აკმაყოფილებს, ასეთია: KP=4. ალბათობაა $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.



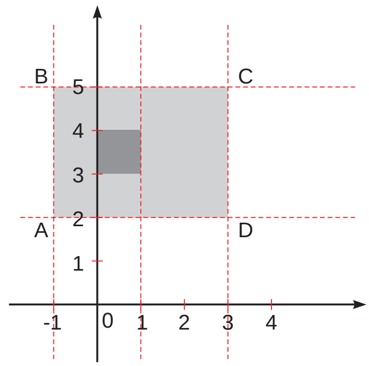
3. AC-ზე გადავზომოთ AK=a მონაკვეთი. წინადადება, წრეწირის გადაკვეთს AB და AD გვერდებს, ტოლფასია წინადადების წრეწირი გადაკვეთს AK მონაკვეთს. ალბათობა იმისა, რომ წრეწირმა გადაკვეთოს AK მონაკვეთი, ტოლია $\frac{AK}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.



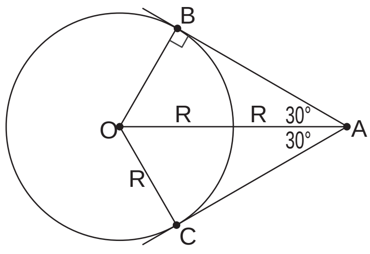
4. წესიერ ექვსკუთხედში a=R წრის ფართობია $S_{წრ}=\frac{\pi a^2 3}{4}$, ექვსკუთხედის კი $6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

ალბათობა იქნება $\frac{S_{წრ}}{S_{ექვს}}=\frac{\pi \cancel{a}^{2}\cancel{3}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot {}_{2}\cancel{6}\sqrt{3}\cdot\cancel{a}^{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

5. (1) სისტემის შესაბამისი წერტილებია ABCD მართკუთხედი გვერდებით 3 და 4 $S_{ABCD}=12$.
(2) სისტემის შესაბამისი წერტილებია. ნახატზე გამუქებული კვადრატი ფართობით 1. ალბათობა იქნება $\frac{1}{12}$.



6.

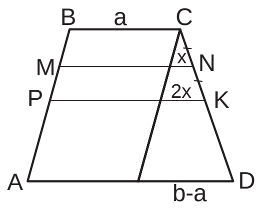


$$\left.\begin{array}{l}\text{განვ. } \Delta AOC\\ OC=R\\ AC=2R\\ \angle C=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle OAC=30^\circ \Rightarrow \angle BAC=60^\circ.$$

A წერტილზე შემთხვევით გავლებულმა წრფემ რომ გადაკვეთოს წრეწირი, იგი უნდა გადიოდეს $\angle BAC$-ის გვერდებს შორის, ე.ი. ალბათობაა $\frac{60^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{6}$.

7. $S_{\text{ფ}}=25\pi$. $S_{\text{გვ}}=100$.

ა) $\dfrac{2S_{\text{ფ}}}{2S_{\text{ფ}}+S_{\text{გვ}}}=\dfrac{50\pi}{50\pi+100}=\dfrac{\pi}{\pi+2}$; ბ) $\dfrac{100}{50\pi+100}=\dfrac{2}{\pi+2}$; გ) $\dfrac{25\pi}{50\pi+100}=\dfrac{\pi}{2\pi+4}$.

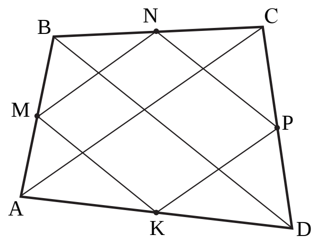


8. MBCN; PMNK და APKD ტრაპეციებს ტოლი სიმაღლეები აქვთ. ამასთან ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $MN=\dfrac{2a+b}{3}$.

$PK=\dfrac{2b+a}{3}$. $S_{PMNK}=\dfrac{MN+PK}{2}\cdot h=\dfrac{3a+3b}{6}\cdot h=\dfrac{a+b}{2}h$.

$S_{ABCD}=\dfrac{a+b}{2}\cdot 3h$.

ალბათობა იქნება: $\dfrac{S_{PMNK}}{S_{ABCD}}=\dfrac{a+b}{2}\cdot h:\dfrac{a-b}{2}\cdot 3h=\dfrac{1}{3}$.



9. მითითება: განიხილეთ მსგავსი სამკუთხედები.

$\dfrac{S_{MNPK}}{S_{ABCD}}=\dfrac{3}{5}$, ე.ი. ალბათობაა $\dfrac{3}{5}$.

10. $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}.4\cdot3=6$ $r=\dfrac{a+b-c}{2}=1$ $S_{\text{წრ}}=\pi$. ალბათობაა $\dfrac{S_{\text{წრ}}}{S_{\Delta}}=\dfrac{\pi}{6}$.

7. დაგროვილი სიხშირე. რანგი

ამოხსნები, მითითებები:

1.

ვარიანტი	1	3	7	12	18
სიხშირე	5	2	2	3	4
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$
დაგროვილი სიხშირე	5	7	9	12	16
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{12}{16}$	1

2. ა) 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 4; 7; 8; 9; 9 — ვარიაციული მწკრივი. 0-ის რანგია $\dfrac{1+2+3}{3}=2$; 1-ის რანგია $\dfrac{4+5+6+7}{4}=5,5$; 4-ის რანგია — 8; 7-ის რანგია — 9; 8-ის რანგია —10; 9-ის რანგია $\dfrac{11+12}{2}=11,5$. მოსწავლეებს დაავალეთ, რომ ცხრილის საბოლოო ვარიანტი შეკვეცილი წილადების სახით წარმოადგინონ.

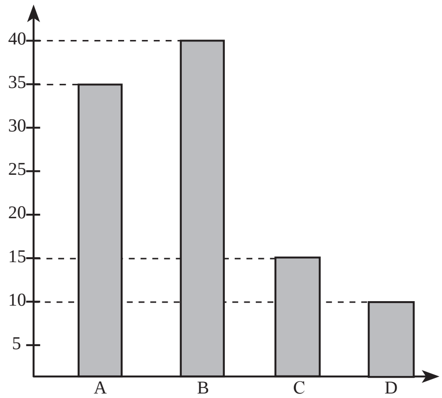
ვარიანტი	0	1	4	7	8	9
სიხშირე	3	4	1	1	1	2
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$
დაგროვილი სიხშირე	3	7	8	12	10	12
დაგროვილი ფარდო-ბითი სიხშირე	$\frac{3}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{12}{12}$

3.

ნიშანი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
სიხშირე	0	0	0	0	3	7	4	3	6	5
დაგროვილი სიხშირე	0	0	0	0	3	10	14	17	23	28
ფარდობითი სიხშირე	0	0	0	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$
ფარდობითი სიხშირე	0	0	0	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{14}{28}$	$\frac{17}{28}$	$\frac{23}{28}$	$\frac{28}{28}$
რანგი	-	-	-	-	2	7	12,5	3	20,5	26

4. ქორწინებაში მყოფი (A) — 35 ადამიანი
ახალდაქორწინებული (B) — 40 ადამიანი
განქორწინებული (C) — 15 ადამიანი
ქვრივი (D) — 10 ადამიანი.

A	35	$\frac{35}{100}$	35
B	40	$\frac{40}{100}$	75
C	15	$\frac{15}{100}$	90
D	10	$\frac{10}{100}$	100



5. ბ) 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 4

0-ის რანგია $\frac{1+2}{2} = 1,5$;   2-ის რანგია $\frac{7+8+9+10+11}{5} = 9$;

1-ის რანგია $\frac{3+4+5+6}{4} = 4,5$;   3-ის რანგია $\frac{12+13+14}{3} = 13$;

4-ის რანგია 15. მოდა არის 2. საშუალო=$\frac{4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4}{15} = \frac{27}{15} = 1,8$.

7.

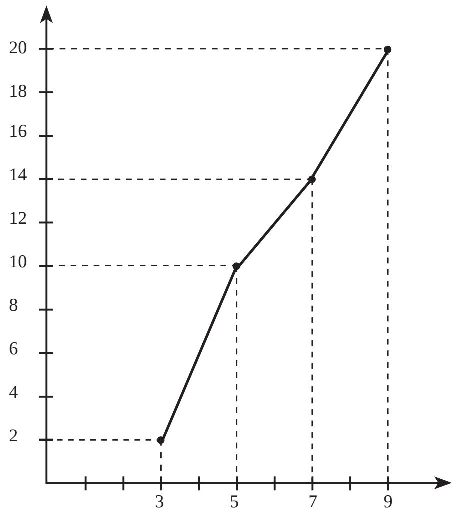
ვარიანტი	3	5	7	15	21
სიხშირე	3	1	8	1	5
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$
დაგროვილი სიხშირე	3	4	12	13	18
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{18}{18}$

8. ᲝᲒᲘᲕᲐ

ამოხსნები, მითითებები:

2.

ინტერვალი	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე	დაგროვილი სიხშირე	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე
[1–3)	2	$\frac{2}{20}$	2	$\frac{2}{2}$
[3–5)	7	$\frac{7}{20}$	9	$\frac{9}{20}$
[5–7)	5	$\frac{5}{20}$	14	$\frac{14}{20}$
[7–9]	6	$\frac{6}{20}$	20	$\frac{20}{20} = 1$



ოგივას ასაგებად ვიღებთ წერტილებს (ინტერვალის ზედა საზღვარი; შესაბამისი დაგროვილი სიხშირე). ასეთი წერტილებია: (3;3); (5;9); (7;14); (9;20).

ამოცანები **3, 4, 5** (იხილეთ ამოცანა 2).

9. ცენტრალური ტენდენციის საზომები

ამოხსნები, მითითებები:

1. c=d=11; d–a;8 ⇒ a=3;   a+b+c=16 ⇒ a=2.

2. b=11 $\qquad \left.\begin{cases} c-a=10 \\ a+c+11=27 \end{cases}\right) \Rightarrow \left.\begin{cases} c-a=10 \\ c+a=16 \end{cases}\right) \Rightarrow \begin{cases} c=13 \\ a=3 \end{cases}$

პასუხი: a=3.

ინტერვალი	შუაწერტილი (x_i)	სიხშირე n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
[2;5)	3,5	8	28	98
[5;8)	6,5	6	39	253,5
[8;11)	9,5	4	38	361
[11;14]	12,5	2	25	312,5
ჯამი		20	130	102,5

4. $\vec{x} = \frac{130}{20} = 6{,}5.$

5. $S^2 = \frac{1}{19}(1025 - 20 \cdot 6{,}5^2) \approx 9{,}474.$

6. სტანდარტული გადახრაა $\sqrt{S^2} = \sqrt{9{,}474} \approx 3.$

VII თავის დამატებითი სავარჯიშოები

2. ა) $A_x^2 \cdot C_x^{x-2} = 72 \Rightarrow \frac{x!}{(x-2)!}\cdot\frac{x!}{2!(x-2)!} = 72 \Rightarrow \left(\frac{x!}{(x-2)!}\right)^2 = 144 \Rightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = 12 \Rightarrow x(x-1) = 12 = 0.$
x=4.

ბ) $C_{x+1}^{x-2} + 2\cdot C_{x-1}^3 = 7(x-1) \Rightarrow \frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} + 2\frac{(x-1)!}{(x-4)!3!} = 7(x-1) \Rightarrow x(x+1)+2(x-3)(x-2)=42 \Rightarrow$
$x^2-3x-10=0 \Rightarrow x=5.$

გ) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x \Rightarrow \frac{x!}{(x-3)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} = 14x \Rightarrow (x-2)(x-1) + \frac{x-1}{2} = 14 \Rightarrow 2x^2-5x-15=0 \Rightarrow$
x=5.

დ) $\frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336 \Rightarrow \frac{x!}{\cancel{(x-5)!}} = 336\cdot\frac{(x-2)!}{3!\cancel{(x-5)!}} \Rightarrow (x-2)!(x-1)!\cdot x = 56\cdot(x-2)! \Rightarrow x^2-x-56=0 \Rightarrow x=3.$

ვ) $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2 = \frac{(n+k)!}{(n+k-2)!2!} + \frac{(n+k+1)!}{(n+k-1)!2!} = \frac{(n+k)!}{2}\cdot\left(\frac{1}{(n+k-2)!} + \frac{n+k+1}{(n+k-1)!}\right) =$

$= \frac{(n+k)!}{2}\cdot\frac{n+k\cancel{-1}+n+k+\cancel{1}}{(n+k-1)!} = \frac{(n+k)!}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}(n+k)\cdot(n+k)}{(n+k-1)!\cdot(n+k)} = \frac{(n+k)!(n+k)^2}{(n+k)!} = (n+k)^2.$

4. $\left.\begin{cases} C_{16}^3 15^3 (2x)^3 < C_{16}^4 \cdot 5^{12}(2x)^4 \\ C_{16}^3 15^3 (2x)^3 < C_{16}^2 \cdot 5^{14}(2x)^3 \end{cases}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{16!}{3!13!}\cdot 15 > 2x\frac{16!}{12!4!} \\ \frac{16!}{3!13!}\cdot 2x > \frac{16!}{14!2!}15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{30}{13} \\ x > \frac{45}{28} \end{cases} \qquad x \in \left(\frac{15}{28}; \frac{30}{13}\right)$

5. მეოთხე წევრია $C_n^4(\sqrt[3]{x})^{n-4}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4$, ე.ი. $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{n-4}\cdot x^{-4} = x^{\frac{n-4}{3}-4}$, 3-ის ხარისხი 0-ია.
$\frac{n-4-12}{3} = 0,\ n = 15.\quad A_{16}^2 = \frac{16!}{14!}$=15·16=230.

6. $C_{10}^3 + C_{10}^4 + ...C_{10}^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + ... + C_{10}^{10} - C_{10}^0 - C_{10}^1 - C_{10}^2 = 2^{10} - 1 - \frac{10!}{8!2!} = 2^{10} - 1 - 10 - 45 = 2^{10} - 56.$

7. ქულათა ჯამს — 18 გვაძლევს წყვილი 9+9=18. ე.ი. გვაქვს 1-დან 9-მდე რიცხვებისათვის ჩათვლით. ორელემენტიანი ქვესიმრავლეების რაოდენობა $C_9^2 = \frac{9!}{2!7!}$=36.

9. ოთხნიშნა რიცხვის ბოლო ციფრი უნდა იყოს 5 ან 0. უნდა განვიხილოთ ცალ-ცალკე ა) ბოლოში 0-ია; ბ) ბოლოში 5-ია. თუ ბოლოში არის 0, მაშინ პირველ ადგილზე გვაქვს 5 ვარიანტი; მეორეზე — 4; მესამეზე — 3, ე.ი. ასეთი რიცხვებს რაოდენობაა 5·4·3=60. თუ ბოლოში არის 5, მაშინ პირველ ადგილზე 0-იც ვერ იქნება და მივიღებთ: 4·4·3=48. სულ 108.
პასუხი: 108.

10. ყველა შესაძლო განლაგებათა რიცხვია p_{30}=30!. ახლა ვნახოთ, რამდენი განლაგებაა, როცა პირველი და მეორე ტომი ერთადაა. წარმოვიდგინოთ პირველი და მეორე ტომი ერთ წიგნად. მივიღებთ: 2·p_{29} (ორზე მრავლდება იმიტომ, რომ სხვადასხვა შეერთებაა I, II და II, I) საბოლოო პასუხია: p_{30}–2p_{29}=30!–2·29!=29!·28.

11. 2·p_9=2·9! (იხილეთ ამოცანა 10).

12. ორი ფიქსირებული ავტორი წერს 3-3 თავს. აქ არის ვარიანტების რაოდენობა A_{10}^3, დარჩა 10 თავი. 4 ფიქსირებული ავტორი წერს 2-2 თავს. თავების დაჯგუფების ვარიანტებია A_{10}^2 მაგრამ ეს რაოდენობა უნდა განაწილდეს 4 ავტორზე. აქ გადანაცვლებათა რაოდენობაა $A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 90$, დარჩა 2 თავი. 2 კაცზე აქ 2 ვარიანტია.
სულ $A_{16}^3 + 90(89 + 88 + 87) + 2.\ \frac{16}{13}$=14·15(6+90·3·88+2).

13. ერთსიმბოლოთი შედგენილი ასო იქნება 2. ორი სიმბოლოთი შედგენილი იქნება 2^2, სამი სიმბოლოთი — 2^3. სულ 14.

14. $\frac{18!}{3!5!10!}$.

15. ყველა შესაძლო წყვილთა რაოდენობაა C_{10}^2, 1-დან 10-მდე არის 5 ლუწი და 5 კენტი რიცხვი.
გვინდა ორივე ლუწი. $\left.\begin{array}{l}\text{ორივე ლუწია } C_5^2\\ \text{ორივე კენტია } C_5^2\end{array}\right) \Rightarrow$ ჯამი ლუწია $2\cdot C_5^2$.
ალბათობა იქნება $\frac{2\cdot C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2\cdot 5!8!\cancel{2}!}{3!\cancel{2}!10!} = \frac{2\cdot\cancel{3}!\cdot 4\cdot 5\cdot\cancel{8}!}{\cancel{3}!8!\cdot 9\cdot 10} = \frac{4}{9}$.

16. შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვია $\frac{10!}{2!3!}$. ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვია $\frac{6!}{10!}$. ალბათობა იქნება $\frac{6!}{10!}\cdot\frac{2!3!}{10!} = \frac{72}{(10!)^2}$.

17. არც ერთი არ არის „გულის ქალი“. ალბათობა იქნება $\frac{51}{52}\cdot\frac{51}{52}$. ალბათობა იმისა, რომ ერთი მაინც არის „გულის ქალი“, იქნება $1 - \frac{51^2}{52^2} = \frac{103}{52^2}$.

18. ა) $\frac{25}{81}$; ბ) $\frac{16}{81}$; გ) $1 - \left(\frac{25}{81} + \frac{16}{81}\right) = \frac{40}{81}$.

19. 50-ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რიცხვია C_{200}^{50}. მათ შორის ისეთი, რომელშიც არც ერთი არ არის მომგებიანი იქნება C_{180}^{50}. ალბათობა იმისა, რომ არც ერთი არ არის მომგებიანი, იქნება $\frac{C_{180}^{50}}{C_{200}^{50}}$. ერთი მაინც მომგებიანია, ალბათობა $1-\frac{C_{180}^{50}}{C_{200}^{50}}$.

20. ვთქვათ ამ წევრის ნომერია n. მაშინ ეს წევრი იანება $C_{20}^{n-1}\left(\sqrt{x}\right)^{20-(n-1)}\left(\sqrt[4]{x}\right)^{n-1}$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $x^{\frac{21-n}{2}}\cdot x^{\frac{n-1}{4}}=x^7 \Rightarrow 41–n=28 \Rightarrow n=13$.

21. $C_{44}^{19}\cdot\sqrt[4]{x}^{19}=C_{44}^{20}\cdot\sqrt[4]{x}^{20}$. $\quad \frac{44!}{19!25!}=\frac{44!}{20!24!}\sqrt[4]{x}\Rightarrow\frac{1}{25}=\frac{1}{20}\sqrt[4]{x}\Rightarrow\sqrt[4]{x}=\frac{4}{5}\Rightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^4$.

22. პირობის თანახმად, $C_{3n}^{0}+C_{3n}^{1}+....+C_{3n}^{3n}=64=2^4\Rightarrow n=5$, ე.ი.

$(10-x)^{16-k}\cdot\left(\frac{1}{10x^2}\right)^{k-1}=10^{16-k-k+1}\cdot x^{16-k}\left(x^{-2}\right)^{k-1}=10^{17–2k}\cdot x^{16–k–2x+2}$, საიდანაც მივიღებთ $18–3k=0$ (x-ის კოეფიციენტი უნდა იყოს 0). k=6.

23. ა) ბოლო ციფრის ამორჩევის 2 ვარიანტია. ე.ი. პირველისთვის დარჩა 4 და ა.შ. პასუხია; 48. ბ) პასუხია: $2\cdot5^3$.

24. ვთქვათ ბოლო ციფრია 0, მაშინ (რიცხვი რომ იყოფოდეს 4-ზე, ბოლო ციფრით შედგენილი რიცხვი უნდა იყოფოდეს 4-ზე) ბოლო ორ ადგილზე შეიძლება იყოს 2 ან 4. სულ 2 ვარიანტი. რადგან ბოლო ციფრი ფიქსირებულია, დარჩენილი სამი ადგილისთვის გვექნება:

ა) **4 3 2 0** ბ) **5 6 2 0**.

ა) რადგან ციფრები არ შეიძლება მოცემული 6 ციფრიდან (2 უკვე ჩავწერეთ), დარჩა 4, ანუ პირველ ადგილზე გვაქვს 4, მეორე თუ 3 შემთხვევა ვარიანტების რაოდენობაა 24. ბ) პირველ ადგილზე ვერ იქნება 0. ე.ი. იქ გვაქვს 5 ვარიანტი, მეორეზე 6. სულ 60 ვარიანტი.
ვთქვათ ბოლოში 2-ია, მაშინ წინა ციფრი კენტია, ე.ი. გვაქვს 3 შემთხვევა. ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

ა) **3 3 3 3** ბ) **5 6 3 2**.

ა) $3\cdot3\cdot3=27$; ბ) $5\cdot6\cdot3=90$.

თუ ბოლოში 4-ია, ბოლოს წინა ციფრისთვის გვაქვს ორი შემთხვევა. ..**04I** ან ..**24II**.

I. ა) **4 3 0 4** შემთხვევების რაოდენობაა 12.

ბ) **6 6 2 4** 36 შემთხვევა.

II. ა) **3 3 2 4** 9 შემთხვევა. ბ) **5 6 2 4** 30 შემთხვევა.

ა) 24+27+12+9=72; ბ) 60+90+66+30=244.

დამხმარე ლიტერატურა:

1. ა. ბენდუქიძე - მათემატიკა. სერიოზული და სახალისო "ნაკადული", თბილისი, 1988 წ.
2. ა. ბენდუქიძე - მათემატიკური ნარკვევები. "ლეგა". 1995 წ.
4. ჯ. კაკნაძე - აზრის ჯაჭვი. "ინტელექტი". თბილისი, 2001 წ.
5. მ. კობალეიშვილი - მოგზაურობა რიცხვთა სამყაროში. განათლება. 1989 წ.
6. თ. ებანოიძე – წერილები ქართველ მათემატიკოსებზე. "მეცნიერება". 1981 წ.
7. Энциклопедический словарь юного математика, Издательство "Педагогика", 1985 г.
8. М. Гарднер. Математические досуги.
9. С.В. Фомин. Системы счисления.
10. http:/google.com - golden section; www. solarviews.com; www.project.ex.ac.uk; http:/primes.utm.edu. http:/olympiads.win.tue.nl; www.problems. ru; www.olimpiada.ru; www.zaba.ru; www.mathematics.ru